KNIHOVNA SPISŮ MATEMATICKÝCH A FYSIKÁLNÍCH
SVAZEK 6.

Dr. BOHUMIL KUČERA:

ZÁKLADY MECHANIKY
TUHÝCH TĚLES.

NAKLADATELSTVÍ
JEDNOTY ČESKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ
V PRAZE.

KNIHOVNA SPISŮ MATEMATICKÝCH A FYSIKÁLNÍCH.
SVAZEK 6.

ZÁKLADY MECHANIKY TUHÝCH TĚLES.

JAKO ÚVOD DO STUDIA FYSIKY

NAPSAL

DR. BOHUMIL KUČERA,

ŘEDITEL FYSIKÁLNÍHO ÚSTAVU PŘI ČESKÉ UNIVERSITĚ KARLOVĚ V PRAZE.

V PRAZE 1921.

NÁKLADEM JEDNOTY ČESKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ.

TISKEM POLYGRAFIE V BRNĚ.

Obsah.

Strana

O pohybu relativním.

III. Dynamika hmotného bodu.

IV. Dynamika soustavy bodové.

V. Obecné principy dynamiky soustav.

VI. Kinematika tuhého tělesa.

VII. Dynamika tuhého tělesa.

VIII. Dodatky.

ČESKÁ AKADEMIE VĚD A UMĚNÍ.

Slovutný pán

pan Prof. Dr. BOH. KUČERA,
řádný člen České Akademie atd.

v Praze.

Valné shromáždění České Akademie, konané dne 13. t. m., povolilo Vám z Nadání Josefa, Marie a Zdeňky Hlávkových podporu 2000·— (dva tisíce) korun na vydání „Fysikální mechaniky".

Podporu vyplatí Vám na potvrzení kancelář Akademie.

Dle § 17. příslušného statutu se vyžaduje, aby publikace, kterou tento úděl umožnil, přinesla doslovný opis udělovacího přípisu.

Tři výtisky spisu račte zdarma dodati Akademii.

V Praze, dne 20. prosince 1919.

K. Vrba,
president.

R. Dvořák,
generální sekretář.

Předmluva.

Ke svému čtyřletému přednáškovému kursu o vyšších partiích experimentální fysiky, který jsem po čtrnácte let na české universitě Karlově v Praze konal, podával jsem úvodem hlavní věty mechanické, jichž jsem v dalších vývodech potřeboval. Přemítaje o tom, jak bych je vštípil v mysl začátečníků co nejživěji, připadl jsem na myšlenku, abych užil při odvozování jich počtu vektorového. Pokus se zdařil a vedl mne k tomu, že jsem později (r. 1917) věnoval celou tříhodinovou přednášku zimního semestru úvodu do mechaniky na základě tohoto moderního způsobu geometrického myšlení. Kolokvia s posluchači mne přesvědčila, že zrno padlo na úrodnou půdu a utvrdila mne v mínění, že, je-li vůbec jaká královská cesta k porozumění základům mechaniky, vede přes vektorovou analysi. Nevěřím s Voigtem, že jest to pouze jakýsi matematický těsnopis, nýbrž myslím, že velmi přispívá k ujasnění názoru a živosti představ, že rovnice mechaniky nabývají vektorovým výrazem neobyčejné průzračnosti a plastičnosti. A při tom jest vektorová analyse ve svých základech tak jednoduchá, že několik málo hodin jí věnovaných nese ovoce daleko bohatší než odpovídá námaze, kterou je nutno vynaložiti, abychom pochopili tento nový početní způsob. Jest ovšem pravda, že se při užití mechanických vět ve fysikální praxi zpravidla musíme utéci k staré geometrii kartézské, ale přepsati v ni vzorce vektorové jest téměř hračkou. Ostatně se vektorové analyse užívá čím dále tím více po celém světě, takže všechny omluvy jsou zbytečné; spíše má se věc tak, že není téměř možno představiti si dnes fysika, který by její základy neovládal.

A tak vznikla tato kniha. Obsahuje více než prozrazuje její skrovný objem. Ač se mohla opříti o některé předlohy (knihu Marcolongovu, Hamelovu, Föpplovy), liší se od nich podstatně a jest zpracována úplně samostatně a výsledkem mnohého přemýšlení i úsilovné práce. Její podstatný ráz jest určen tím, že ji psal fysik pro fysiky. Ač se týká látky elementární a mnoho a mnohokráte zpracované, přece v ní odborník najde mnohé metodicky nové obraty a postupy, ba i některé nové myšlenky a vývody. Jako vždy užil jsem svědomitě veškeré literatury cizojazyčné, pokud mi byla přístupna; její přehled uvádím na konci textu.

Můj spis je určen začátečníkům, kteří znají pouze prvé základy počtu infinitesimálního a proto obsahuje i úvod do počtu vektorového, aby byl nezávislý na předchozím studiu knih jiných. Chtěl jsem jej původně vetkati do textu, tam, kde jest ho potřebí, leč později jsem

poznal, že bude lépe shrnouti jeho počátky systematicky v prvém, úvodním oddílu knihy. Jen jednu obavu chovám, přehlížeje hotovou práci: Že jsem snad šel ve své snaze po stručnosti slovního výrazu poněkud dále, než bylo nezbytně nutno. Přes to však pevně doufám, že vážnému studiu nebude kniha má skýtati přílišných obtíží. Články hvězdičkou označené lze při prvém studiu vynechati. Sem patří mimo jiné §§ 50 a 51, které jsem pojal do knihy proto, aby formální výstavba vektorové analyse byla operacemi div a rot ucelena, ač jich v knížce elementární nebylo nezbytně potřebí. Do počtu dyadického jsem se ovšem blíže nepouštěl. Právě pro začátečníky byla obšírně probírána mechanika bodu, ježto jest průhlednější než dynamika systémů a ježto její diferenciální rovnice jsou formálně stejné s rovnicemi v nauce o elektřině a pod. Z téhož důvodu pojednávám v dodatcích o soustavách spřažených.

Typografická úprava knihy jest hodně stěsnaná, což neprospívá rychlému přehledu v matematické sazbě, ale ovšem jest zvláště za nynějšího nedostatku papíru velmi výhodné pro nakladatele. Také tečky nad písmenami a pruhy vektory vyznačující nevyšly vždy tak pěkně, jak bych si byl přál — leč nezapomínejme doby, v níž žijeme! Brněnská „Polygrafie“ zajisté se činila, co mohla. Jest mi zde vzdáti díky výboru Jednoty Českých Matematiků a Fysiků, a zvláště též příteli min. radovi v ministerstvu školství dru Mil. Valouchovi, jejímu řediteli, jehož zásluhou vůbec došlo k tisku knihy v dohledné době. Při prvé korektuře pomáhal mi můj asistent, s. docent dr. Aug. Žáček, jemuž za to budiž můj srdečný dík. Byla tím obtížnější, že knihtiskárna lámala sazbu již před prvou opravou.

Obrazce, vesměs původní, kreslil jsem pro úsporu nákladu sám, a budiž jim proto leccos prominuto. Ježto jsou z téhož důvodu rozměrů nepatrných — snad až příliš — nemohl jsem se v nich zachovati dle velmi vtipného návodu Heunova, aby se totiž písmeno, označující nějakou trať jakožto vektor, kladlo vždy na tutéž její stranu, na př. vždy na pravý „břeh“ vektoru, představujeme-li si jej jakožto tekoucí vodu. A tak nebylo možno zbýti se šipek označujících směr, které v obrazcích nepůsobí příliš pěkným dojmem. Časté odkazy v textu se vztahují k paragrafům a vzorcům, v nichž pak (16d) znamená: vzorec d v § 16. Není-li paragraf uveden, jedná se o týž, v němž jest citát. Odkazy se snadno hledají pomocí číslic v závorkách, jež se nacházejí na každé stránce nad textem a značí paragrafy.

Na konec budiž mně dovoleno pronésti přání, aby má kniha byla s touž láskou k věci studována, s jakou byla psána, tak aby výsledky, jichž se dodělá, odpovídaly svědomité snaze jejího původce. Druhá třída České Akademie uznala tuto snahu podporou 2000 Kč z nadání Josefa a Marie Hlávkových, jíž bylo užito najmě k zakoupení pomocné literatury. Budiž jí za to srdečný dík! Nemenší díky jest mi vzdáti našemu ministerstvu školství a národní osvěty, které věnovalo značný obnos, aby kniha mohla býti prodávána co nejlevněji, zejména též studentům-legionářům.

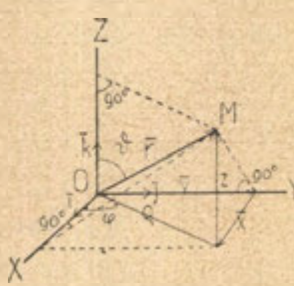
Bohumil Kučera.

V Praze, v říjnu 1919.

I. Geometrický úvod.

1. Prostorové souřadnice.

Polohu libovolného bodu M v prostoru vztahujeme k pevné soustavě pravoúhlých souřadnic XYZ. Dle ujednání budeme užívati vždy soustavy pravotočivé, totiž takové, že otáčení od kladné osy X k Y přes 90^0 odpovídá postup obyčejného šroubu v kladném směru osy Z. Jest to systém vinné révy čili anglický oproti francouzskému (chmelového keře) levotočivému, kde osy X a Y jsou vzájemně přemístěny.



Obr. 1.

Polohu bodu M určujeme pak souřadnicemi x, y, z. Jinak lze ji určiti také vzdáleností $OM = r$ od bodu počátečního, a dvěma úhly, totiž úhlem φ, který svírá průmět ϱ průvodiče r na rovinu XY s osou X a úhlem ϑ, který svírá průvodič s osou Z. Veličiny r, φ, ϑ jsou polárními souřadnicemi bodu M. Veškeré body prostoru lze vyčerpati, nabývá-li r všech možných hodnot kladných od 0 do ∞, φ všech hodnot od 0^0 do 360^0, ϑ všech od 0^0 do 180^0.

Základní vztahy mezi oběma systémy souřadnic lze odečísti z obrazce 1; jsou:

$$x = r \sin\vartheta \cos\varphi, \quad y = r \sin\vartheta \sin\varphi, \quad z = r\cos\vartheta. \qquad (a)$$

Vzdálenost r bodu M (x, y, z) od počátku $(0, 0, 0)$ jest dle věty Pythagorovy dána vztahem

$$r^2 = \varrho^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2. \qquad (b)$$

Směr průvodiče r jest dán buď úhly φ, ϑ, nebo směrovými kosinusy, to jest kosinusy úhlů $\widehat{(rx)}$, $\widehat{(ry)}$, $\widehat{(rz)}$, které svírá s jednotlivými osami. Směrové kosinusy jsou patrně

$$\cos\widehat{(rx)} = \frac{x}{r}, \quad \cos\widehat{(ry)} = \frac{y}{r}, \quad \cos\widehat{(rz)} = \frac{z}{r}, \qquad (c)$$

mezi nimiž dle (b) je vztah

$$\cos^2\widehat{(rx)} + \cos^2\widehat{(ry)} + \cos^2\widehat{(rz)} = 1. \qquad (d)$$

Násobíme-li (c) levými stranami, plyne, což jest známá věta o průmětech,

$$r = x \cdot \cos(\widehat{rx}) + y \cdot \cos(\widehat{ry}) + z \cdot \cos(\widehat{rz}). \qquad (e)$$

Kdybychom měli dva body $M_1(x_1, y_1, z_1)$ a $M_2(x_2, y_2, z_2)$, jichž vzdálenost $\overline{M_1M_2} = r_{12}$, platí obdobně

$$r_{12}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2, \qquad (f)$$

$$\cos(\widehat{r_{12}x}) = \frac{x_2 - x_1}{r_{12}}, \quad \cos(\widehat{r_{12}y}) = \frac{y_2 - y_1}{r_{12}}, \quad \cos(\widehat{r_{12}z}) = \frac{z_2 - z_1}{r_{12}}, \qquad (g)$$

kde zase součet čtverců směrových kosinusů je roven 1.

Jsou-li body M_1 a M_2 nekonečně blízko na prostorové křivce, přechází jejich vzdálenost r_{12} v délkový element křivky $ds = s_2 - s_1$, kde s je vzdálenost od libovolného bodu křivky, podél ní měřená. Průměty elementu na osách jsou $x_2 - x_1 = dx$, $y_2 - y_1 = dy$, $z_2 - z_1 = dz$. Dle (f) platí pro čtverec jeho délky

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \qquad (h)$$

a pro směrové kosinusy elementu ds

$$\cos(\widehat{sx}) = \frac{dx}{ds}, \quad \cos(\widehat{sy}) = \frac{dy}{ds}, \quad \cos(\widehat{sz}) = \frac{dz}{ds}. \qquad (i)$$

To jsou patrně také směrové kosinusy tečné ku křivce v bodě M_1.

2. Vektory a jich sčítání.

V průvodiči (radiu vektoru), jemuž přiřkneme vedle velikosti r určitý směr v prostoru a to směr $\overrightarrow{OM}$, můžeme viděti nový elementární útvar geometrický. Chceme zcela obecně jmenovati **vektorem** veličinu takovou, že souhrnu všech různých hodnot, kterých může nabýti, lze jedno-jednoznačně a spojitě přiřaditi souhrn tratí, vedených v prostoru z libovolně zvoleného bodu počátečního O. Nejjednodušším vektorem jest tedy průvodič $O \rightarrow M$; ve fysice jsou vektory různé síly, rychlosti, zrychlení, momenty, spády teplotové. Každý vektor má patrně jistou **velikost**, kterou označujeme obyčejným písmenem a **směr**. Od veličin, jímž přísluší pouze velikost, t. zv. **skalárů***), jako jimi jsou velikost vektoru (nebo jeho „absolutní hodnota"), teplota, práce a pod., odlišujeme vektory**) horizontální čarou nad písmenou, která sama značí jeho velikost. Průvodič jako vektor psán jest tedy $\bar{r}$, a značí trať $\overline{OM}$ co do velikosti i směru. Čte se r-vektor. Absolutní hodnotu či velikost vektoru značíme někdy, má-li na tuto vlastnost zvláště býti poukázáno, $|\bar{r}| = r$. Vektor $a\bar{r}$ je téhož směru jako $\bar{r}$, ale velikosti a-kráte větší; $-\bar{r}$ je vektor téže velikosti jako $\bar{r}$, ale směru opačného, tedy $\overline{MO}$. Směr lze charakterisovati vektorem jedničkovým, v daném směru jed-

*) Veličina nějaká jest skalárem, můžeme-li souhrnu hodnot, jichž může nabýti, jedno jednoznačně a spojitě přiřaditi řadu reálných čísel.

**) Stejně jako G. Hamel v Elementare Mechanik, Lipsko 1912.

ničkovou velikost majícím, na př. $\bar r^0$, čteno „r-vektor jedničkový“*). Lze tedy znázorniti každý vektor velikostí a vektorem jedničkovým, na př.

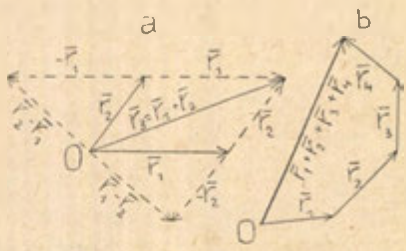
$$\bar r = |\bar r| . \bar r^0 = r . \bar r^0. \qquad (a)$$

Koordinaty $\bar x$, $\bar y$, $\bar z$, které dle své podstaty rovněž jsou vektory, znázorňujeme jedničkovými vektory ve směru kladných os $\bar\imath$, $\bar\jmath$, $\bar k$, takže

$$\bar x = x\bar\imath, \quad \bar y = y\bar\jmath, \quad \bar z = z\bar k. \qquad (b)$$

Sčítání vektorů. Definitoricky stanovíme, že součtem dvou vektorů $\bar r_1$ a $\bar r_2$ jest vektor $\bar r_3$, daný úhlopříčkou rovnoběžníka z obou daných vektorů tak sestrojeného, že buď ku konci vektoru $\bar r_1$ připojíme co do směru i velikosti $\bar r_2$, nebo k $\bar r_2$ vektor $\bar r_1$. Jest patrno, že předpisem dán jest zákon komutativní

$$\bar r_3 = \bar r_1 + \bar r_2 = \bar r_2 + \bar r_1. \qquad (c)$$



Obr. 2.

U několika vektorů vede tento předpis ku konstrukci mnohoúhelníka (polygonu) vektorů (obr. 2b). Pořádek sčítanců je libovolný. $\Sigma \bar r_\lambda = 0$ značí graficky, že mnohoúhelník vektorů jest uzavřený, vrací se do bodu O. Zároveň lze z obrazce 2a vyčísti smysl odečítání vektorů a jest patrně

$$\bar r_1 - \bar r_2 = -(\bar r_2 - \bar r_1).$$

Každá rovnice mezi třemi vektory jako $\bar r_1 + \bar r_2 = \bar r_3$ nebo, což jest totéž, $\bar r_1 + \bar r_2 - \bar r_3 = 0$ aneb i obecně $a\bar r_1 + b\bar r_2 + c\bar r_3 = 0$ značí, že všechny tři vektory $\bar r_1$, $\bar r_2$ a $\bar r_3$ leží v téže rovině, jsou komplanární. Z dosavadního též jest patrno, že pro součin vektorů a skalárů platí zákon komutativní a asociativní, t. j.

$$m(n\bar r) = n(m\bar r) = (mn)\bar r, \; m(\bar r_1 + \bar r_2) = m\bar r_1 + m\bar r_2, \; (m+n)\bar r = m\bar r + n\bar r. \qquad (d)$$

Jsou-li $d\bar r$ elementy libovolné křivky, je $\Sigma d\bar r = \int_{\bar r_1}^{\bar r_2} d\bar r$ tetivou, spojující začátek prvého s koncem posledního, tedy $= \bar r_2 - \bar r_1$. Je-li křivka uzavřena, je patrně $\oint_0 d\bar r = 0$.

Znázornění semikartézské. Z obr. 1 a (2b) plyne názorně, že

$$\bar r = \bar x + \bar y + \bar z = x\bar\imath + y\bar\jmath + z\bar k. \qquad (e)$$

Toto znázornění bodu v prostoru zveme semikartézským. Jest obdobou znázornění komplexního čísla v rovině a velmi výhodné,

*) S článkem Abraham-Langevinovým ve franc. vydání encyklopedie mat. věd volíme tento symbol pro jedničkové vektory. Upomíná na algebraickou větu, že r^0 je vždy jedničkou a ponechává místo za písmenou pro obyčejné indexy volným. Pro některé typické vektory jedničkové volíme typograficky jednodušší písmenu, zpravidla řeckou.

kdykoli chceme přejíti od počtu vektorového k pravoúhlé soustavě souřadnic. Lzeť si obsah různých vzorců fysikálních, zvláště pak v oboru mechaniky, velmi jednoduše představiti ve tvaru vektorovém a každý vzorec vektorový obejímá tři vzorce kartézské, jež pomocí (e) a z něho odvozených lze okamžitě přepsati na tvar obvyklý. Osové komponenty vektorů budeme zpravidla značiti indexy, takže

$$\bar a = a_x \bar i + a_y \bar j + a_z \bar k. \qquad (f)$$

Místo „složka v ose x“ nebo „složka x-ová“ budeme často říkati $\bar i$-složka a pod., nahražujíce název osy jedničkovým vektorem jí příslušejícím. Vedle libozvučnější výslovnosti upomíná název, na příklad $\bar j$-složka vektoru $\bar a$ ($= a_y$), na to, že ji obdržíme skalárním součinem $\bar j \bar a$. (Viz níže.) Jediná rovnice vektorová, na př.:

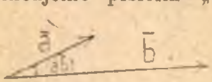
$$m\bar a = n\bar b \quad \text{čili} \quad m(a_x \bar i + a_y \bar j + a_z \bar k) = n(b_x \bar i + b_y \bar j + b_z \bar k)$$

zastupuje tři rovnice skalární, v něž se rozpadá,

$$ma_x = nb_x, \quad ma_y = nb_y, \quad ma_z = nb_z.$$

3. Součin skalární.

Ve fysikálním užití počtu vyskytuje se velmi často součin dvou vektorů, jímž je skalár, který obdržíme, násobíme-li velikost jednoho vektoru průmětem velikosti druhého do směru prvého. Proto se nazývá tento součin dvou vektorů **skalárním**. Píšeme*) jej $\bar a \bar b$ nebo $\bar a \,.\, \bar b$ nebo i v složitějších vzorcích opatřený kulatými závorkami ($\bar a \bar b$). Čteme nebo diktujeme píšícím „a vektor krát b vektor“, přidávajíce ještě slovo „skalárně“, mají-li se současně napsati kulaté závorky. Dle definice jest to skalár



Obr. 3.

$$\bar a \,.\, \bar b = |\bar a| . |\bar b| . \cos(\widehat{ab}) = ab \cos(\widehat{ab}); \qquad (a)$$

jest z ní hned patrno, že skalární násobení jest úkolem komutativním,

$$\bar a \bar b = \bar b \bar a. \qquad (b)$$

Je-li buď jeden z obou vektorů velikosti nulové, nebo stojí-li oba vektory na sobě kolmo, t. j. $\cos(\widehat{ab}) = \cos 90^\circ = 0$, je skalární součin jejich roven nule. Jest tedy $\bar a \bar b = 0$ u dvou vektorů nenulových podmínkou orthogonálnosti (kolmosti). Mají-li oba týž směr, jest skalární součin roven součinu jejich velikostí, neboť $\cos 0 = 1$. Násobíme-li tedy vektor skalárně sám sebou, na př. $\bar a . \bar a$, což často píšeme $\bar a^2$, vychází nám čtverec jeho velikosti a^2, nebo u vektoru jedničkového prostě jednotka. Takto tedy snadno stanovíme absolutní velikost vektoru.

*) Jest to Grassmannův „vnitřní“ součin $[\bar a / \bar b]$, psaný Hamiltonem $-S\bar a \bar b$, Föpplem původně $S\bar a \bar b$, Heavisidem $\bar a \bar b$, Gibbsův „direct or dot product“ $\bar a . \bar b$ či $(\bar a, \bar b)$; Burali-Forti a Marcolongo označují jej ojediněle $\bar a \times \bar b$. Francouzské vydání mat. encyklopedie rozlišuje vektory polární $\bar a$ a axiální na př. $\vec c$, čehož se později dotkneme. Součin skalární píše jako Heaviside nebo užívá Gibbsovy tečky.

Z definice a geom. názoru bezprostředně plynou zákony distributivnosti

$$m\bar{a}\,.\,\bar{b} = \bar{a}\,.\,m\bar{b} = m\bar{a}\bar{b}, \quad (\bar{a} + \bar{b},\, \bar{c}) = \bar{a}\bar{c} + \bar{b}\bar{c}, \tag{c}$$

předpisy pro počítání semikartézské

$$\bar{\imath}\bar{\imath} = \bar{\jmath}\bar{\jmath} = \bar{k}\bar{k} = 1 = \bar{\imath}^2 = \bar{\jmath}^2 = \bar{k}^2, \quad \bar{\imath}\bar{\jmath} = \bar{\jmath}\bar{k} = \bar{k}\bar{\imath} = \bar{\jmath}\bar{\imath} = \bar{k}\bar{\jmath} = \bar{\imath}\bar{k} = 0, \tag{d}$$

jakož i kartézský tvar skalárního součinu

$$\bar{a}\bar{b} = (a_x\bar{\imath} + a_y\bar{\jmath} + a_z\bar{k})(b_x\bar{\imath} + b_y\bar{\jmath} + b_z\bar{k}) = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z. \tag{e}$$

Invariance výrazu na pravé straně vzhledem k libovolnému posunutí nebo otočení souřadnic není na prvý pohled patrna, z vektoriálního významu plyne ihned sama sebou.

Užitím na průvodič, který, má-li definovati polohu určitého bodu — svého konce — v prostoru, budeme nazývati také vektorem p o l o h o v ý m (p o s i č n í m)

$$\bar{r}\bar{r} = \bar{r}^2 = r^2 = (x\bar{\imath} + y\bar{\jmath} + z\bar{k})^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

plyne ihned vzorec (1 *b*), užitím na dva průvodiče $\bar{r}_1$ a $\bar{r}_2$ svírající úhel $(\widehat{r_1r_2})$ pak, píšeme-li za komponenty dle (1 *c*) $x_1 = r_1 \cos(\widehat{r_1x}), \ldots$ a $x_2 = r_2 \cos(\widehat{r_2x}), \ldots$.

$$\bar{r}_1\,.\,\bar{r}_2 = r_1\,.\,r_2\,.\cos(\widehat{r_1r_2}) = r_1r_2(\cos(\widehat{r_1x})\,.\,\bar{\imath} + \cos(\widehat{r_1y})\,\bar{\jmath} + \cos(\widehat{r_1z})\,\bar{k})$$
$$\times(\cos(\widehat{r_2x})\,\bar{\imath} + \cos(\widehat{r_2y})\,\bar{\jmath} + \cos(\widehat{r_2z})\,\bar{k})$$

po zkrácení známý vzorec analytické geometrie

$$\cos(\widehat{r_1r_2}) = \cos(\widehat{r_1x})\cos(\widehat{r_2x}) + \cos(\widehat{r_1y})\cos(\widehat{r_2y}) + \cos(\widehat{r_1z})\cos(\widehat{r_2z}). \tag{f}$$

Komponenty vektoru $\bar{a}$ v osách souřadnicových najdeme součiny

$$\bar{a}\bar{\imath} = (a_x\bar{\imath} + a_y\bar{\jmath} + a_z\bar{k})\,\bar{\imath} = a_x, \quad \bar{a}\bar{\jmath} = a_y, \quad \bar{a}\bar{k} = a_z, \tag{g}$$

absolutní hodnotu, vyjádřenou komponentami, součinem

$$\bar{a}\bar{a} = \bar{a}^2 = a^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2, \tag{h}$$

směrové kosinusy směru $\bar{a}$ součiny s vektorem jedničkovým

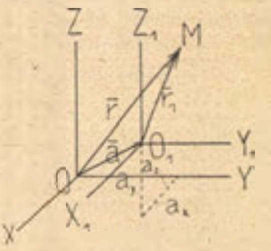
$$\bar{a}^0\bar{\imath} = \cos(\widehat{ax}) = \frac{a_x}{a}, \quad \bar{a}^0\bar{\jmath} = \cos(\widehat{ay}) = \frac{a_y}{a}, \quad \bar{a}^0\bar{k} = \cos(\widehat{az}) = \frac{a_z}{a}, \tag{i}$$

neboť dle (*g*) $\bar{a}\bar{\imath} = a\,.\,\bar{a}^0\bar{\imath} = a_x$ atd. Obecně dává vždy skalární součin dvou vektorů jedničkových kosinus úhlu sevřeného.

4. Změna soustavy souřadnicové.

Semikartézské vyjádření dovoluje nám velmi jednoduše vyjádřiti vztahy, které vzniknou, změní-li se systém souřadnic. Stane-li se v z t a ž n ý m b o d e m (počátkem souřadnic) místo O bod O_1, který je určen polohovým vektorem $\overline{OO_1} = \bar{a} = a_x\bar{\imath} + a_y\bar{\jmath} + a_z\bar{k}$, platí pro polohový vektor bodu M starý $\bar{r}$ a nový $\bar{r}_1$ samozřejmý vztah

$$\bar{r} = \bar{r}_1 + \bar{a}. \tag{a}$$



Obr. 4.

Byly-li pravoúhlé osy *XYZ* posunuty do nového počátku samy s sebou rovnoběžně, zůstává směr nových jedničkových vektorů $\bar i_1, \bar j_1, \bar k_1$ nezměněn, takže $\bar i_1 = \bar i$, $\bar j_1 = \bar j$, $\bar k_1 = \bar k$ a vztahy (3*d*) zůstávají platnými.

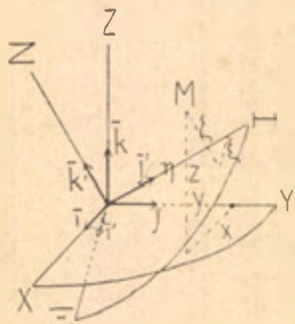
Je-li v nových souřadnicích

$$\bar r_1 = x_1 \bar i_1 + y_1 \bar j_1 + z_1 \bar k_1,$$

plyne rozepsáním vztahu (*a*)

$$x = x_1 + a_x, \quad y = y_1 + a_y, \quad z = z_1 + a_z. \qquad (b)$$

Zůstal-li bod vztažný (počátek) *O* týž a byla-li soustava souřadnicová *XYZ* kolem něho otočena do polohy *ΞHZ*, nezměnil se polohový vektor $\bar r$, jen jeho semikartézské rozepsání jest jiné. Místo pravoúhlých jedničkových vektorů $\bar i, \bar j, \bar k$ máme nyní $\bar i', \bar j', \bar k'$, které jsouce na sobě kolmy splňují vztahy (3*d*) $\bar i'^2 = \ldots\ldots = 1$, $\bar i'\bar j' = \ldots. = 0$.



Obr. 5.

Označíme-li nové koordinaty ξ, η, ζ, jest

$$\bar r = x\bar i + y\bar j + z\bar k = \xi \bar i' + \eta \bar j' + \zeta \bar k'. \qquad (c)$$

Násobme skalárně $\bar r$ postupně $\bar i, \bar j, \bar k$; obdržíme

$$\begin{aligned} \bar i\bar r &= x = \xi \bar i\bar i' + \eta \bar i\bar j' + \zeta \bar i\bar k', \\ \bar j\bar r &= y = \xi \bar j\bar i' + \eta \bar j\bar j' + \zeta \bar j\bar k', \\ \bar k\bar r &= z = \xi \bar k\bar i' + \eta \bar k\bar j' + \zeta \bar k\bar k'. \end{aligned} \qquad (d)$$

Součiny jedničkových vektorů jsou směrovými kosinusy os

$$\bar i\bar i' = \bar i'\bar i = \cos(\widehat{x\xi}) = \cos(\widehat{\xi x}), \quad \bar i\bar j' = \cos(\widehat{x\eta}) \text{ atd.} \qquad (e)$$

Vzorce slouží k přechodu od staré soustavy do nové. K přechodu opačnému obdrželi bychom obdobné vzorce, násobíce $\bar r$ postupně $\bar i', \bar j', \bar k'$. Ovšem musí býti nový systém souřadnicový opět pravotočivý.

Nejobecnější proměnu soustavy souřadnicové obdržíme, přejdouce od počátku O do O_1 se soustavou rovnoběžnou a otočíce ji potom kolem O_1. Jest tudíž

$$x = \xi \bar i\bar i' + \eta \bar i\bar j' + \zeta \bar i\bar k' + a_x,$$

čili

$$x = \xi \cos(\widehat{x\xi}) + \eta \cos(\widehat{x\eta}) + \zeta \cos(\widehat{x\zeta}) + a_x \qquad (f)$$

a dva podobné další vztahy pro y a z.

Směrové kosinusy $\cos(\widehat{x\xi}), \cos(\widehat{x\eta}), \ldots \cos(\widehat{z\zeta})$, jichž jest devět, nejsou ovšem na sobě nezávislé. Jsou mezi nimi různé vztahy, které vektoranalyticky snadno dovodíme.

Dosadme do (*c*) za x, y, z hodnoty (*d*). Pak

$$\begin{aligned} \xi \bar i' + \eta \bar j' + \zeta \bar k' = {} & \xi \bar i(\bar i\bar i') + \eta \bar i(\bar i\bar j') + \zeta \bar i(\bar i\bar k') \\ & + \xi \bar j(\bar j\bar i') + \eta \bar j(\bar j\bar j') + \zeta \bar j(\bar j\bar k') \\ & + \xi \bar k(\bar k\bar i') + \eta \bar k(\bar k\bar j') + \zeta \bar k(\bar k\bar k'). \end{aligned} \qquad (g)$$

Ze tří veličin ξ, η, ζ jsou dvě libovolné, třetí jest určena vztahem (*c*). Volíme-li jednou $\eta = \zeta = 0$, po druhé $\zeta = \xi = 0$ a po třetí $\xi = \eta = 0$, dostáváme z (*g*)

$$\bar{\imath}' = \bar{\imath}(\bar{\imath}\bar{\imath}') + \bar{\jmath}(\bar{\jmath}\bar{\imath}') + \bar{k}(\bar{k}\bar{\imath}'),$$
$$\bar{\jmath}' = \bar{\imath}(\bar{\imath}\bar{\jmath}') + \bar{\jmath}(\bar{\jmath}\bar{\jmath}') + \bar{k}(\bar{k}\bar{\jmath}'), \qquad (h)$$
$$\bar{k}' = \bar{\imath}(\bar{\imath}\bar{k}') + \bar{\jmath}(\bar{\jmath}\bar{k}') + \bar{k}(\bar{k}\bar{k}').$$

Nezapomínejme, že uzávorkované součiny jsou prosté skaláry. Ježto ($3d$) platí jak pro nečárkovanou tak pro čárkovanou soustavu jedničkových vektorů, plyne násobením $\bar{\imath}'$ z (h) pro $\bar{\imath}'\bar{\imath}' = 1$

$$(\bar{\imath}'\bar{\imath})(\bar{\imath}\bar{\imath}') + (\bar{\imath}'\bar{\jmath})(\bar{\jmath}\bar{\imath}') + (\bar{\imath}'\bar{k})(\bar{k}\bar{\imath}') = 1,$$

čili $$\cos^2(\widehat{x\xi}) + \cos^2(\widehat{y\xi}) + \cos^2(\widehat{z\xi}) = 1 \qquad (i)$$

a podobné dvě další z $\bar{\jmath}'^2 = \bar{k}'^2 = 1$.

Ze skalárního součinu $\bar{\imath}'\bar{\jmath}' = 0$ plyne z (h) a ($3d$)

$$(\bar{\imath}\bar{\imath}')(\bar{\imath}\bar{\jmath}') + (\bar{\jmath}\bar{\imath}')(\bar{\jmath}\bar{\jmath}') + (\bar{k}\bar{\imath}')(\bar{k}\bar{\jmath}') = 0,$$

čili $$\cos(\widehat{x\xi})\cos(\widehat{x\eta}) + \cos(\widehat{y\xi})\cos(\widehat{y\eta}) + \cos(\widehat{z\xi})\cos(\widehat{z\eta}) = 0 \qquad (j)$$

a ze součinů $\bar{\jmath}'\bar{k}' = \bar{k}'\bar{\imath}' = 0$ dvě podobné další.

Kdybychom do (c) byli dosazovali za ξ, η, ζ, byly by výsledkem podobného počtu vztahy

$$\cos^2(\widehat{\xi x}) + \cos^2(\widehat{\eta x}) + \cos^2(\widehat{\zeta x}) = 1, \qquad (k)$$

$$\cos(\widehat{\xi x})\cos(\widehat{\xi y}) + \cos(\widehat{\eta x})\cos(\widehat{\eta y}) + \cos(\widehat{\xi x})\cos(\widehat{\xi y}) = 0 \qquad (l)$$

a podobné čtyři, které plynou z (i) a (j) záměnou řeckých a latinských písmen.

Další vztahy plynou z pojmu vektorového součinu, o němž později bude řeč. Všechny si lze snadno pamatovati ze schematu směrových kosinů

	X $\bar{\imath}$	Y $\bar{\jmath}$	Z $\bar{k}$
Ξ $\bar{\imath}'$	$\cos(\widehat{x\xi})$	$\cos(\widehat{y\xi})$	$\cos(\widehat{z\xi})$
H $\bar{\jmath}'$	$\cos(\widehat{x\eta})$	$\cos(\widehat{y\eta})$	$\cos(\widehat{z\eta})$
Z $\bar{k}'$	$\cos(\widehat{x\zeta})$	$\cos(\widehat{y\zeta})$	$\cos(\widehat{z\zeta})$

Součet čtverců veličin v kterémkoli řádku nebo sloupci je roven 1, součet tří součinů ze dvou stejnolehlých veličin ve dvou řádcích nebo sloupcích je roven nule. Výsledek další, který v § 7 stejně snadně dokážeme, zní: Považujeme-li obrazec kosinů symbolicky za determinant třetího stupně, rovná se každý člen svému příslušným znamením opatřenému subdeterminantu (minoru); na př.:

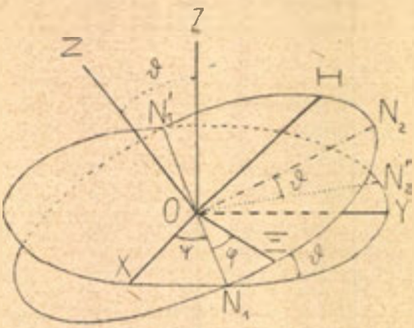
$$\cos(\widehat{x\eta}) = \cos(\widehat{y\zeta})\cos(\widehat{z\xi}) - \cos(\widehat{z\zeta})\cos(\widehat{y\xi}). \qquad (m)$$

Hodnota determinantu, jak se snadno můžeme přesvědčiti, rovná se $+1$, jsou-li oba systémy pravotočivé. Je-li jeden pravotočivý, druhý levotočivý, je velikost determinantu rovna -1 a jednu stranu vztahů (m) jest násobiti zápornou jedničkou.

*5. Úhly Eulerovy.

Vztahy (4 i, j, m) lze ovšem snadno odvoditi geometricky. V prvých vidíme výraz věty Pythagorovy, v druhých použití vzorce (3 e). Ale nejsou zase všechny na sobě nezávislé, lze je redukovati na 6. Z toho plyne, že devět úhlů $(\widehat{x\xi}), \ldots (\widehat{z\zeta})$ lze nahraditi třemi navzájem nezávislými údaji, které úplně definují novou polohu otočených os. Volíme jimi t. zv. úhly Eulerovy φ, ψ, ϑ.

Jejich význam jest patrný z obrazce 6. Označení není naprosto ustálené, proto se zde přidržujeme „Encyklopedie mat. věd". Roviny XY a ΞH protínají se v uzlové přímce $N_1 N'_1$. ON_2 je kolmé na ON_1 a to tak, že ON_1, ON_2 a OZ tvoří pravotočivý systém souřadnic, jehož též se někdy s výhodou používá.



Obr. 6.

Odklon os Z a Z, t. j. úhel ϑ (mezi 0^0 a 180^0), jenž jest zároveň úhlem rovin XY a ΞH, nazýváme úhlem nutace, úhel XON_1 azimutem uzlové přímky nebo úhlem precese ψ (od 0^0 do 360^0), úhel $N_1 O \Xi$ pak úhlem φ čisté rotace (od 0^0 do 360^0). Kosinusy úhlů mezi starými a novými osami jsou dány schematem

	X $\bar{i}$	Y $\bar{j}$	Z $\bar{k}$
Ξ $\bar{i}'$	$\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\vartheta$	$\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\vartheta$	$\sin\varphi\sin\vartheta$
H $\bar{j}'$	$-\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi\cos\vartheta$	$-\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\vartheta$	$\cos\varphi\sin\vartheta$
Z $\bar{k}'$	$\sin\psi\sin\vartheta$	$-\cos\psi\sin\vartheta$	$\cos\vartheta$

(a)

Snadno lze potvrditi, že splňují vztahy (4 i, j, m).

Relace obsažené ve schematu nalezneme, proložíme-li bodem O jakožto středem kouli o jedničkovém poloměru a užijeme-li na trojúhelníky, z největších kruhů na ni vytvořené, vzorců sférické trigonometrie.

Stejně snadno odvodíme je vektoranalyticky bez znalosti sférické trigonometrie následujícím způsobem: Vyjděme od počáteční polohy, v níž osy XYZ a ΞHZ splývají v jedno a otočme nové osy kolem $OZ \equiv OZ$ o úhel ψ do polohy $O\Xi_1 \equiv ON_1$, charakterisované jedničkovým vek-

torem $\bar{i}_1$ a $OH_1 \equiv ON_2'$ ve směru $\bar{j}_1$. Pak platí pro dvě pravoúhlé soustavy $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ a $\bar{i}_1, \bar{j}_1, \bar{k}_1 = \bar{k}$, jak je přímo patrno

$$\bar{i}\bar{i}_1 = \cos\psi, \quad \bar{i}\bar{j}_1 = \cos(90^0 + \psi) = -\sin\psi, \quad \bar{i}\bar{k}_1 = \cos 90^0 = 0,$$
$$\bar{j}\bar{i}_1 = \cos(90^0 - \psi) = \sin\psi, \quad \bar{j}\bar{j}_1 = \cos\psi, \quad \bar{j}\bar{k}_1 = \cos 90^0 = 0,$$
$$\bar{k}\bar{i}_1 = \bar{k}\bar{j}_1 = \cos 90^0 = 0, \quad \bar{k}\bar{k}_1 = \cos 0^0 = 1.$$

Ze vzorců (4 *h*), kde za čárkované veličiny píšeme veličiny opatřené indexem 1, nebo bez tohoto počítání i z přímého názoru plyne

$$\bar{i}_1 = \bar{i}\cos\psi + \bar{j}\sin\psi,$$
$$\bar{j}_1 = -\bar{i}\sin\psi + \bar{j}\cos\psi,$$
$$\bar{k}_1 = \bar{k}.$$

Druhým krokem je přechod soustavy $N_1N_2'Z$ v soustavu N_1N_2Z otočením o úhel ϑ kolem osy ON_1. Jedničkové vektory $\bar{i}_1, \bar{j}_1, \bar{k}_1$ přejdou v $\bar{i}_2, \bar{j}_2, \bar{k}_2$, mezi nimiž lze obdobně dokázati nebo přímo viděti vztahy

$$\bar{i}_2 = \bar{i}_1,$$
$$\bar{j}_2 = \bar{j}_1\cos\vartheta - \bar{k}_1\sin\vartheta,$$
$$\bar{k}_2 = -\bar{j}_1\sin\vartheta + \bar{k}_1\cos\vartheta.$$

Konečně přejdem od soustavy N_1N_2Z k definitivní soustavě ΞHZ, t. j. od jedničkových vektorů $\bar{i}_2, \bar{j}_2, \bar{k}_2$ k $\bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'$ otočením o úhel φ kolem OZ. Pak

$$\bar{i}' = \bar{i}_2\cos\varphi + \bar{j}_2\sin\varphi,$$
$$\bar{j}' = -\bar{i}_2\sin\varphi + \bar{j}_2\cos\psi,$$
$$\bar{k}' = \bar{k}_2.$$

Zpětným dosazováním pak obdržíme na př.

$$\bar{k}' = \bar{k}_2 = -\bar{j}_1\sin\vartheta + \bar{k}_1\cos\vartheta$$
$$= (\bar{i}\sin\psi - \bar{j}\cos\psi)\sin\vartheta + \bar{k}\cos\vartheta,$$

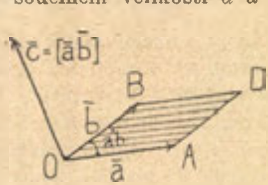
z čehož dle třetí rovnice (4 *h*) plyne

$$\bar{i}\bar{k}' = \sin\psi\sin\vartheta, \quad \bar{j}\bar{k}' = -\cos\psi\sin\vartheta, \quad \bar{k}\bar{k}' = \cos\vartheta.$$

Jest to třetí řádek našeho schematu. Prvé dva dostaneme obdobně.

6. Součin vektorový.

Vektorovým (někdy „vnějším") součinem dvou vektorů $\bar{a}$ a $\bar{b}$ nazýváme vektor $\bar{c}$, jehož velikost jest dána součinem velikostí a a b a sinusu úhlu sevřeného, t. j. $ab\sin(\widehat{ab})$, a jenž jest kolmý na rovině proložené oběma vektory $\bar{a}$ a $\bar{b}$, a toho směru, že vektory $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ v tomto pořadí tvoří pravotočivý systém. Točíme-li tedy od $\bar{a}$ k $\bar{b}$ přes úhel menší než 180^0 obyčejným šroubem, postupuje ve směru vektoru $\bar{c}$. Absolutní hodnota či velikost $|\bar{c}| = ab\sin(\widehat{ab})$ jest numericky rovna ploše rovnoběžníka $OADB$, z vektorů $\bar{a}$ a $\bar{b}$ sestrojeného. Vektorový součin budeme důsledně označovati **hranatými závorkami** $[\bar{a}\bar{b}]$, oddělujíce



Obr. 7.

uvnitř závorek složitější výrazy obyčejnou čárkou*). Čteme nebo diktujeme píšícím: „a vektor krát b vektor vektoriálně.“

Jest tedy dle definice

$$\bar{c} = c \cdot \bar{c}^0 = [\bar{a}\bar{b}] = ab \sin(\widehat{ab}) \cdot [\bar{a}\bar{b}]^0. \qquad (a)$$

Z definice směru vektoru $\bar{c}$ plyne názorně, že

$$[\bar{b}\bar{a}] = -[\bar{a}\bar{b}], \qquad (b)$$

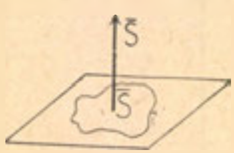
že tedy zákon komutativnosti neplatí, že komutace vede k změně znamení. Jsou-li $\bar{a}$ a $\bar{b}$ vektory téhož směru nebo protisměrné ($\bar{a}^0 = \pm \bar{b}^0$), jest jejich vektorový součin roven nule, což jest vektorovým znakem rovnoběžnosti dvou vektorů nenulových. Je-li $\bar{a} \perp \bar{b}$, je velikost $|[\bar{a}\bar{b}]| = ab$. Z toho plynou základní pravidla pro vektory jedničkové $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$:

$$[\bar{i}\bar{i}] = [\bar{j}\bar{j}] = [\bar{k}\bar{k}] = 0, \quad \begin{aligned} [\bar{i}\bar{j}] &= -[\bar{j}\bar{i}] = \bar{k}, \\ [\bar{j}\bar{k}] &= -[\bar{k}\bar{j}] = \bar{i}, \\ [\bar{k}\bar{i}] &= -[\bar{i}\bar{k}] = \bar{j}. \end{aligned} \qquad (c)$$

Dále jest z geometrického významu definice přímo patrno pro libovolný skalár m

$$[m\bar{a}, \bar{b}] = [\bar{a}, m\bar{b}] = m[\bar{a}\bar{b}]. \qquad (d)$$

Na snadě ležící zevšeobecnění pojmu vektorového součinu vede nás k poznání, že můžeme rovinné plochy nebo rovinné elementy ploch křivých znázorňovati vektory. Jsouť jimi svou podstatou, majíce určitou velikost (plošný obsah) a určitou polohu v prostoru, danou kolmicí — „normálou“ — na nich vztyčenou. Ovšem musíme se smluviti o nějakém pravidle, dle něhož určujeme kladný směr normály.



Obr. 8.

Je-li naše plocha částí uzavřené plochy, chceme za kladnou bráti vnější normálu. Je-li však daná plocha na př. částí nekonečné roviny nebo libovolné neuzavřené plochy, dá se její positivní strana určiti pouze tehdy, přiřkneme-li jejímu ohraničení pevný směr oběhu. Je-li ten dán, zveme positivní stranou plochy, stranou, na níž se nachází kladná normála, tu, k níž směřuje hrot pravotočivého šroubu, otáčeného dle směru oběhu kontury. Jinak můžeme říci: Po positivní straně

---

*) Theorie kvaternionů (W. R. Hamiltonova) označuje vektorem $\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}$, kde $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ odpovídající třem osám jsou imaginární, takže $\bar{i}\bar{i} = \bar{j}\bar{j} = \bar{k}\bar{k} = -1$, $\bar{i}\bar{j} = -\bar{j}\bar{k} = \bar{k}$, $\bar{j}\bar{k} = -\bar{k}\bar{j} = \bar{i}$, $\bar{k}\bar{i} = -\bar{i}\bar{k} = \bar{j}$. Součinem dvou vektorů vznikne pak kvaternion, t. j. spojení skaláru (náš záporný skalární součin) a vektoru (náš vektorový součin identický s H. Grassmannovým „doplňkem“, „Ergänzung“). Ve fysice, přes dřívější prudký odpor Taitův a jiných čistých kvaternionistů, užívá se nyní téměř zcela výhradně vektorové analyse naší, jejímiž průkopníky byli Heaviside a Gibbs. Vektorový součin označují Hamilton, Heaviside a Föppl $V\bar{a}\bar{b}$, Gibbs a encyklopedie $\bar{a} \times \bar{b}$ („cross-product“), Burali-Forti a Marcolongo $\bar{a} \wedge \bar{b}$, Hamel ab. Poslední označení je nejjednodušší, ale u složitějších výrazů velmi nepohodlné. Přidržujeme se velmi častého označení $[\bar{a}\bar{b}]$ (Abraham, Gans, Ignatowski a mn. jiní).

plochy kráčí chodec, jenž jde po kontuře daným směrem, leží-li plocha sama po jeho levé ruce. U uzavřených ploch je tímto ustanovením a volbou vnější normály za kladnou dán směr oběhu plošných elementů.

Naneseme-li na kladnou normálu délku numericky rovnou plošnému obsahu dané rovinné plochy, nebo plošného elementu u ploch zakřivených, znázorňuje tak vzniklý vektor danou plochu, resp. plošný element. Základní jedničkový vektor ve směru normály budeme označovati $\bar{\nu}$ (bez exponentu 0); pak jest rovinná plocha resp. plošný element jednoznačně dán vektorem $\bar{S} = S\bar{\nu}$, resp. $d\bar{S} = dS \, . \, \bar{\nu}$.

Promítneme-li rovinnou plochu na jinou rovinu, jest velikost průmětu rovna ploše, násobené kosinusem úhlu mezi normálami. Průmět sám co do velikosti i polohy jest tedy určen skalárním součinem jedničkového vektoru roviny a vektoru, znázorňujícího danou plochu, na příklad průmět na rovinu $[\bar{i}\bar{j}] = \bar{k}$ (t. j. na rovinu XY) výrazem $\bar{k}\bar{S} = \bar{S}\bar{k} = S \, . \, \bar{k}\bar{\nu}$.

Z názoru jest patrno, že průmět uzavřené plochy na libovolnou rovinu jest roven nule, neboť příslušná část roviny pokryje se dvakrát (nebo obecně sudým počtem), a oba průměty mají opačné znamení, tedy algebraický součet nulu. Je-li tedy $\bar{\nu}_0$ jednotková normála roviny, na níž promítáme, je

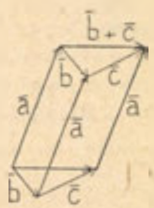
$$\int\limits_0 \bar{\nu}_0 d\bar{S} = \bar{\nu}_0 \int\limits_0 d\bar{S} = 0, \qquad \text{a tedy} \qquad \int\limits_0 d\bar{S} = 0,$$

neboť stálé, ale jinak libovolné $\bar{\nu}_0$ jsme mohli vytknout před znamení sumace dle (3c).

Na základě této věty snadno dokážeme zákon distributivnosti u vektorového součinu. Sestrojme trojboký hranol na základně $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{b} + \bar{c}$ s hranou $\bar{a}$. Vektorové vyjádření povrchu (pozor na oběh jednotlivých ploch) jest

$$[\bar{b}\bar{a}] + [\bar{c}\bar{a}] + [\bar{a}, (\bar{b} + \bar{c})] + \tfrac{1}{2}[\bar{b}\bar{c}] - \tfrac{1}{2}[\bar{b}\bar{c}] = 0;$$

z toho
$$[\bar{a}, (\bar{b} + \bar{c})] = [\bar{a}\bar{b}] + [\bar{a}\bar{c}]. \qquad (e)$$



Obr. 9.

Jest snadno rozšířiti zákon distributivnosti na

$$[(m\bar{a}_1 + n\bar{b}_1 + \ldots), (p\bar{a}_2 + q\bar{b}_2 + \ldots.)] = mp[\bar{a}_1\bar{a}_2] + mq[\bar{a}_1\bar{b}_2] + \ldots + np[\bar{b}_1\bar{a}_2] + nq[\bar{b}_1\bar{b}_2] + \ldots \quad (f)$$

Jen jest nutno zachovávati pořad vektorů v jednotlivých součinech výsledku.

Dle toho je snadno vytvořiti semikartézský tvar vektorového součinu pomocí pravidel (c).

Je-li $\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}$, $\bar{b} = b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k}$, máme

$$[\bar{a}\bar{b}] = (a_yb_z - a_zb_y)\,\bar{i} + (a_zb_x - a_xb_z)\,\bar{j} + (a_xb_y - a_yb_x)\,\bar{k}, \qquad (g)$$

čili ve tvaru determinantu, jenž snadno utkví v paměti,

$$[\bar{a}\bar{b}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \qquad (h)$$

Pravidlo (b) je z něho evidentní, přemístěním dvou sousedních řádků změní determinant své znamení. Subdeterminanty u $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ nejsou než velikosti průmětů plochy $[\bar{a}\bar{b}]$ na roviny $[\bar{j}\bar{k}] = \bar{i}$, $[\bar{k}\bar{i}] = \bar{j}$ a $[\bar{i}\bar{j}] = \bar{k}$;

obdržímeť je, násobíme-li explicitní tvar (g) skalárně postupně těmito jedničkovými vektory.

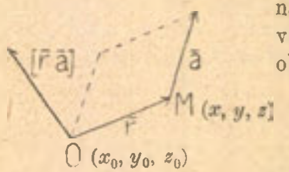
Velikost vektoru $[\bar{a}\bar{b}]$ obdržíme jako vždy ze skalárního součinu $\sqrt{|[\bar{a}\bar{b}]|^2}$. V rozvinutém tvaru kartézském netřeba ji ani psát.

Má-li vztažný bod O souřadnice x_0, y_0, z_0, podobně konec A vektoru $\bar{a}$ souřadnice x_1, y_1, z_1 a podobně $B\,(x_2, y_2, z_2)$ jest $a_x = x_1 - x_0, \ldots\ldots b_z = z_2 - z_0$, a tedy vzorec pro plochu trojúhelníka mezi body $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$ dle polovičního subdeterminantu u k rozšířením a přičtením prvého řádku k ostatním

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 \\ 0 & x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ 0 & x_2 - x_0 & y_2 - y_0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

7. Moment vektoru.

Působí-li vektor $\bar{a}$ v bodě M, daném polohovým vektorem $\bar{r}$, nazýváme vektorový součin $[\bar{r}\bar{a}]$ **momentem vektoru $\bar{a}$ vzhledem k bodu O.** Jest obecně semikartézsky dán

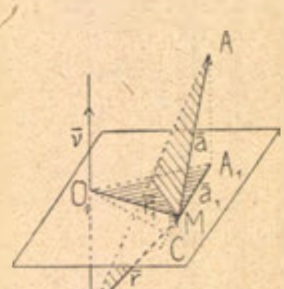


Obr. 10.

$$[\bar{r}\bar{a}] = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}. \quad (a)$$

Moment vektoru vzhledem ke každému bodu, ležícímu v jeho prodloužení, jest nulou, neboť ve výraze $[\bar{r}\bar{a}] = ra[\bar{r}^0, \bar{a}^0]$ jedničkový vektor $\bar{r}^0 = \pm \bar{a}^0$. Budeme důsledně jedničkový vektor $\bar{r}^0$ ve směru průvodiče (polohového vektoru) $\bar{r}$ nadále označovati $\bar{\varrho}$. Nazýváme-li $\bar{b}$ a $\bar{c}$ „**složkami**“ výsledného vektoru („**výslednice**“) $\bar{b} + \bar{c}$, praví věta (6e), že **moment výslednice vzhledem k libovolnému bodu prostoru se rovná součtu momentů složek vzhledem k témuž bodu.**

Mluvíme-li o **momentu vektoru** $\bar{a} = \overline{MA}$ **vzhledem k přímce** $\bar{\nu}$, míníme tím součin z vektoru $\bar{a}_1 = \overline{MA}_1$, který je průmětem daného vektoru na rovinu $\bar{\nu}$ (k dané přímce kolmou) a z kolmice $O_1C \perp MA_1$, spuštěné s paty přímky O_1 na směr průmětu. Z obrazce 11, kde jsou kresleny místo momentů (rovnoběžníků) pouze poloviční momenty (trojúhelníky), je bez dalšího názorně patrno, že moment vektoru $\bar{a}$ k přímce $\bar{\nu}$ jest $[\bar{r}_1\bar{a}_1] = \bar{\nu}\,[\bar{r}\bar{a}]$, t. j. že se rovná průmětu momentu vektoru $\bar{a}$ vzhledem k libovolnému bodu O přímky $\bar{\nu}$ na tuto přímku. Jsou tedy subdeterminanty v (a) zároveň momenty k přímkám rovnoběžným s osami $\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k}$ a procházejícím bodem (x_0, y_0, z_0). Jsou-li $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, jsou to momenty vektoru $\bar{a}$ k osám. Jak se najde velikost momentu výsledného ze složek — momentů to k osám —, bylo již řečeno.



Obr. 11.

Mluvíme-li o **momentech vektorů v rovině**, míníme tím vždy momenty, jako $[\bar{r}_1\bar{a}_1]$, vektoru $\bar{a}_1$ vzhledem k nějakému bodu O_1 dané a vektorem $\bar{a}_1$ proložené roviny.

Dodatek k § 4. Zůstali jsme dlužni důkaz vzorců (4m). Vidíme nyní, že jest prostým důsledkem definice vektorového součinu. Jestiť dle (4h) a (6c)

$$\bar{i}' = [\bar{j}'\bar{k}'] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \bar{i}\bar{j}' & \bar{j}\bar{j}' & \bar{k}\bar{j}' \\ \bar{i}\bar{k}' & \bar{j}\bar{k}' & \bar{k}\bar{k}' \end{vmatrix}$$

a tedy, násobíme-li na př. $\bar{i}$ obě strany,

$$\bar{i}\bar{i}' = (\bar{j}\bar{j}')(\bar{k}\bar{k}') - (\bar{k}\bar{j}')(\bar{j}\bar{k}'),$$

což jest, píšeme-li za skalárné součiny dle (4e) kosinusy úhlů mezi příslušnými osami,

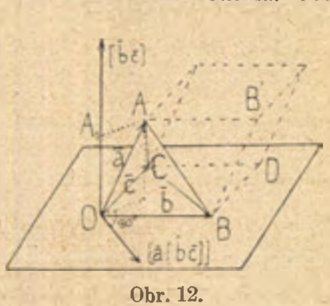
$$\cos(\widehat{x\xi}) = \cos(\widehat{y\eta}) \cdot \cos(\widehat{z\zeta}) - \cos(\widehat{x\eta}) \cdot \cos(\widehat{y\zeta}).$$

Vzorec (4m) plyne obdobně z $\bar{j}' = [\bar{k}'\bar{i}']$ násobením $\bar{i}$ a podobně i všechny ostatní.

8. Součiny ze tří vektorů a složitější.

1. $\bar{a}(\bar{b}\bar{c})$. Skalární součin z vektoru a skalárního součinu neskýtá ničeho zajímavého. Patrně $\bar{a}(\bar{b}\bar{c}) = \bar{a}(\bar{c}\bar{b})$. Setkali jsme se s ním u vektorů jedničkových již v (4g) a nebylo potřebí zvláštního objasnění. Ovšem $\bar{a}(\bar{b}\bar{c}) \neq (\bar{a}\bar{b})\bar{c}$, leč by měly $\bar{a}$ a $\bar{c}$ týž směr.

2. $\bar{a}[\bar{b}\bar{c}]$. Skalární součin z vektoru a vektorového součinu. Jest to skalár, který má zajímavý význam geometrický. Značí patrně (základna $OBDC$ násobená výškou OA_1) krychlový obsah rovnoběžnostěnu z vektorů $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ sestrojeného neboli šestinásobný obsah čtyrstěnu $OABC$ (obr. 12). Ze základních vztahů je patrno, že $\bar{a}[\bar{c}\bar{b}] = (\bar{a}, -[\bar{b}\bar{c}]) = -\bar{a}[\bar{b}\bar{c}]$. Vychází tedy krychlový obsah se znamením kladným či záporným dle toho, leží-li vektor $\bar{a}$ na téže straně základny $bc \sin(\widehat{bc})$ jako normála $\bar{\nu} = [\bar{b}\bar{c}]^0$ nebo na straně opačné.



Obr. 12.

Z geometrického významu jest též přímo patrno, že

$$\bar{a}[\bar{b}\bar{c}] = \bar{b}[\bar{c}\bar{a}] = \bar{c}[\bar{a}\bar{b}] = [\bar{a}\bar{b}]\bar{c} = [\bar{b}\bar{c}]\bar{a} = [\bar{c}\bar{a}]\bar{b}. \qquad (a)$$

Pořad vektorů můžeme beze změny hodnoty a znamení **cyklicky** proměniti; při změně necyklické změní se znamení. To jest okamžitě patrno též ze semikartézského vyjádření, které obdržíme, násobíme-li výraz $[\bar{a}\bar{b}]$ ve vzorci (6f) skalárně vektorem $\bar{c} = c_x\bar{i} + c_y\bar{j} + c_z\bar{k}$. Plyne

$$\bar{a}[\bar{b}\bar{c}] = c_x(a_yb_z - a_zb_y) + c_y(a_zb_x - a_xb_z) + c_z(a_xb_y - a_yb_x) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \qquad (b)$$

Pro vlastnost (a) a determinantové vyjádření označují někteří (na př. Gibbs-Wilson, Libický) součin náš prostě $(\bar{a}\bar{b}\bar{c})$.

Z determinantu nebo geometrického názoru či ze zákona (6*b*) plyne

$$\bar{a}[\bar{a}\bar{b}] = \bar{b}[\bar{a}\bar{a}] = 0.$$

Leží-li vektory $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ v téže rovině, musí, jak patrno na př. ihned z geometrického významu, kterýkoli z těchto potrojných součinů se rovnati nule, nehledě k pořadí vektorů. Jest tudíž u nenulových vektorů $\bar{a}[\bar{b}\bar{c}] = 0$ podmínkou komplanárnosti.

Důkaz, že je totožná s dřívější v § 2, přenechán budiž čtenáři. Máme-li místo vektoru $\bar{a}$ součet dvou (neb více) vektorů, plyne z (3*c*)

$$(\bar{a} + \bar{b}, [\bar{c}\bar{d}]) = \bar{a}[\bar{c}\bar{d}] + \bar{b}[\bar{c}\bar{d}]. \qquad (c)$$

Součin $\bar{a}[\bar{b}\bar{c}]$ má ve fysice důležitý význam, vystižený názvem „tok vektoru $\bar{a}$ plochou $[\bar{b}\bar{c}]$". Kdyby totiž vektor $\bar{S} = \nu S = [\bar{b}\bar{c}]$ znamenal otvor ve stěně, kterým by proudila nestlačitelná kapalina rychlostí $\bar{v}$, která je co do směru i velikosti dána vektorem $\bar{a}$, pak značí $\bar{a}[\bar{b}\bar{c}] = \bar{a}\,\bar{S} = aS\bar{a}^0\nu = aS\cos(\widehat{\nu a})$ objem kapaliny za jedničku časovou vyteklý. Odtud název. Mluvíme podobně také o toku síly plochou a pod. Jedná-li se o plochu zakřivenou, je tok vektoru roven

$$\int \bar{a}d\bar{S} = \int a\cos(\widehat{\nu a})\,.\,dS = \int a_\nu dS,$$

je-li a_ν normální složka vektoru v místě elementu dS.

Obdobně jako v § 6 lze dovoditi z (b) výraz pro krychlový obsah čtyrstěnu, jehož rohy jsou $O(x_0, y_0, z_0)$, $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ a $C(x_3, y_3, z_3)$, jejž známe z analytické geometrie, a jenž zní

$$OABC = \tfrac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 & z_0 \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

3. $[\bar{a}, [\bar{b}\bar{c}]]$. Tento vektorový součin z vektoru a vektorového součinu nemá daleko té důležitosti jako předcházející. Jak z úvahy o geometrickém významu vektorového součinu jest ihned patrno, je to vektor, který leží v rovině $[\bar{b}\bar{c}]$ a to kolmo k průmětu vektoru $\bar{a}$ (viz obr. 12). Musíť býti kolmým k rovině vektorů a a $[\bar{b}\bar{c}]$. Jeho hodnota, již nalezneme nejkratšeji semikartézským rozepsáním, jest

$$[\bar{a}[\bar{b}\bar{c}]] = \bar{b}\,.\,(\bar{a}\bar{c}) - \bar{c}\,.\,(\bar{a}\bar{b}). \qquad (d)$$

Z ní plyne

$$[\bar{a}[\bar{b}\bar{c}]] + [\bar{b}[\bar{c}\bar{a}]] + [\bar{c}[\bar{a}\bar{b}]] = 0. \qquad (e)$$

Vektory složitější se téměř nikdy v počtu nevyskytují. Semikartézským rozepsáním plynou pro dva nejblíže složitější

$$([\bar{a}\bar{b}],\ [\bar{c}\bar{d}]) = (\bar{a}\bar{c})(\bar{b}\bar{d}) - (\bar{a}\bar{d})(\bar{b}\bar{c}) \qquad (f)$$

a

$$[[\bar{a}\bar{b}],\ [\bar{c}\bar{d}]] = (\bar{a}\bar{c}\bar{d})\,\bar{b} - (\bar{b}\bar{c}\bar{d})\,\bar{a} = (\bar{a}\bar{b}\bar{d})\,\bar{c} - (\bar{a}\bar{b}\bar{c})\,\bar{d}. \qquad (g)$$

Jest zajímavo jen to, že z nich (značí-li $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{d}$ jedničkové vektory z téhož začátku O, takže jejich konce vytvoří sférický čtyrúhelník na jedničkové kouli) lze velmi snadno vyvoditi všechny hlavní poučky sférické trigonometrie.

*9. Vektory polární a axiální. Pseudoskaláry.

Průvodič $\bar{r}$ nebo přímočaré posunutí a po druhé vektor $\bar{c}$, který vznikne jak žto vektorový součin dvou vektorů podobných $\bar{r}$, přes to, že počítání s nimi nebo jejich složkami stále v téže, na př. pravotočivé, soustavé, třeba různě posunuté nebo otočené, se řídí naprosto týmiž pravidly, přece jen mají vlastnosti, jimiž se od sebe liší. Zastupují jakožto typy dvě veliké skupiny, ve které lze vektory roztříditi; prvé jsou vektory polárními, druhý vektorem axiálním. Tyto Voigtovy názvy podržujeme s francouzskou mat. encyklopedií. Maxwell, který prvý na jejich rozdíl upozornil, tuše, že síla elektrická je vektorem polárním, magnetická axiálním, (jak později Koláček vskutku ukázal z Hallova zjevu), zval je translatorickými a rotatorickými, Curie a Wiechert pak vektory a rotory. Nejobvyklejšími příklady jejich jsou rychlost postupná a rotační. Počítáme-li s komponentami vektorů, uplatní se rozdíl obou druhů teprve tehdy, přejdeme-li od pravotočivé soustavy k levotočivé (nebo ovšem naopak), na př. inversí směru všech os souřadnicových. Volíme-li novými souřadnicemi $\bar{i}'=-\bar{i}$, $\bar{j}'=-\bar{j}$, $\bar{k}'=-\bar{k}$, bude polární vektor

$$\bar{a}=a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k}=-a_x(-\bar{i})-a_y(-\bar{j})-a_z(-\bar{k})=$$
$$\bar{a}=-a_x\bar{i}'-a_y\bar{j}'-a_z\bar{k}'.$$

Jeho složky změnily svoje znaménka.

Ve vzorci (6g), který dává vektorový součin dvou axiálních vektorů, je psáno $\bar{i}$ vlastně za $[\bar{j}\bar{k}]$ a podobně též $\bar{j}$ a $\bar{k}$. Jest viděti, že $[\bar{j}\bar{k}]=[-\bar{j},-\bar{k}]=[\bar{j}',\bar{k}']$.

Zavedeme-li nyní také v nové, čárkované soustavě jedničkových vektorů stejné předpisy jako (6c), bude $[\bar{j}'\bar{k}']=\bar{i}'$ atd. a komponenty $(a_y b_z - a_y b_z)$ atd. vektoru axiálního inversí svoje znaménka nezměnily. Ovšem jest důvodem toho, že jsme nyní za kladný postup $\bar{i}'$, $\bar{j}'$, $\bar{k}'$ zvolili postup v technické praxi velmi zřídka užívaného šroubu levotočivého, za kladný směr normály při oběhu plošky $d\bar{s}$ směr opačný než dříve.

V rovnicích, v nichž se vyskytují složky obou druhů vektorů, mění se tedy některá znaménka, přejdeme-li od pravotočivého systému k levotočivému. Proto jest dobře znáti následující pravidla, která nebudeme odvozovati, přenechávajíce to čtenáři, nebo odkazujíce na citovaný spisek Ignatowského: Vektorový součin dvou polárních nebo dvou axiálních vektorů je vektor axiální, vektorový součin z polárního a axiálního vektoru je vektor polární.

Ale také výsledek skalárního násobení dvou vektorů vede k dvěma různým druhům skalárů. K prvým patří takové, jež nejsou pouhým výsledkem počtu, jako množství hmoty, energie a pod. Ty ovšem inversí souřadnic svého znamení nezmění. Podobně chová se skalární součin dvou polárních vektorů. To jsou skaláry obyčejné, pravé. Ve skalárním součinu polárního vektoru a vektoru axiálního $\bar{a}\,\bar{b}\bar{c}]$ setkali jsme se však se skalárem, jehož znamení bylo jednou kladné, jednou záporné. Nazývá se pseudoskalárem a při inversi mění své znamení. Ná-

sobíme-li jím vektor nějaký, mění se polární v axiální a naopak. Plocha $\int d\bar{S} \sim [\bar{a}\bar{b}]$ je vektorem axiálním, objem $\sim a[\bar{b}\bar{c}]$ pseudoskalárem.

Připojme hned sem, třebaže pojmy ty poznáme teprve později, že divergence vektoru polárního je pravý skalár, axiálního pseudoskalár; gradient pravého skaláru polární vektor, pseudoskaláru axiální; konečně rotor polárního vektoru axiální, axiálního polární vektor, tak jakoby Hamiltonův operátor ∇ byl vektor polární.

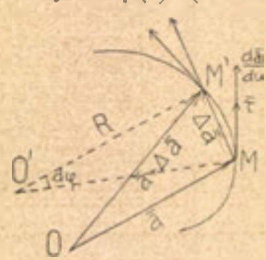
Netřeba připomínati, že znamení rovnosti může státi pouze mezi dvěma vektory nebo skaláry téhož druhu. Neboť je-li $a = b$ event. $c = d$, a jsou-li na př. a a c při inversi invariantními, musí totéž platiti i o b a d.

10. Diferenciace vektorů.

Změní-li se libovolný vektor $\bar{a}$ na $\bar{a}'$, jest změna $\Delta\bar{a} = \bar{a}' - \bar{a}$ ovšem zase vektorem. Je-li $\bar{a}$ funkcí jediné skalární (numerické) proměnné na př. u, jest $\Delta\bar{a}$ určeno hodnotami u' a u, k nimž patří $\bar{a}'$ a $\bar{a}$. Mezní hodnotu

$$\lim_{\Delta u = 0} \frac{\Delta\bar{a}}{\Delta u} = \frac{d\bar{a}}{du} \tag{a}$$

definujeme za diferenciální poměr nebo derivaci vektoru $\bar{a}$ dle proměnné u. Důležita jest její interpretace. Znázorněme si funkční závislost graficky tak, že $\bar{a}$ kreslíme jakožto z téhož bodu O vedené průvodiče křivky $\bar{a} = \bar{f}(u)$. (U funkčního znamení užili jsme označení vektorem, ježto na pravé straně musí ovšem státi funkce vektorová.) Pak (obr. 13) jest $\bar{a} = \overline{OM}$, $\bar{a} + \Delta\bar{a} = \overline{OM'}$ a tedy $\Delta\bar{a} = \overline{MM'}$ po směru i velikosti sečna křivky $\bar{f}(u)$. Jest patrno, že v limitě bude $\frac{d\bar{a}}{du}$ vektor, který má směr tečné k znázorňující křivce, směr, který budeme označovati jedničkovým vektorem $\bar{\tau}$ (bez exponentu 0).



Obr. 13.

V různých kombinacích skalárů a vektorů, které závisí na téže skalární proměnné u, děje se diferenciace stejně jako v obyčejné analysi. Tak na př:

$$\frac{d}{du}(\bar{a}\bar{b}) = \frac{d\bar{a}}{du}\bar{b} + \bar{a}\frac{d\bar{b}}{du}, \tag{b}$$

neboť $(\bar{a} + \Delta\bar{a}, \bar{b} + \Delta\bar{b}) - \bar{a}\bar{b} = \Delta(\bar{a}\bar{b}) = \bar{a} \,.\, \Delta\bar{b} + \Delta\bar{a} \,.\, \bar{b} + \Delta\bar{a} \,.\, \Delta\bar{b}$,

tedy $$\frac{\Delta(\bar{a}\bar{b})}{\Delta u} = \bar{a}\frac{\Delta\bar{b}}{\Delta u} + \frac{\Delta\bar{a}}{\Delta u} \,.\, \bar{b} + \frac{\Delta\bar{a} \,.\, \Delta\bar{b}}{\Delta u}$$

z čehož pro $\lim \Delta u = 0$ plyne napsaný vzorec (b).
Podobně

$$\frac{d(m\bar{a})}{du} = \frac{dm}{du}\bar{a} + m\frac{d\bar{a}}{du}, \tag{c}$$

$$\frac{d(\bar{a}+\bar{b}+\ldots)}{du}=\frac{d\bar{a}}{du}+\frac{d\bar{b}}{du}+\ldots, \qquad (d)$$

$$\frac{d[\bar{a},\bar{b}]}{du}=\left[\frac{d\bar{a}}{du},\bar{b}\right]+\left[\bar{a},\frac{d\bar{b}}{du}\right], \qquad (e)$$

a dle týchž pravidel u součinů složitějších. Jedno však sluší míti na paměti — kdekoli se vyskytuje vektorový součin, je nutno pořad vektorů v hranatých závorkách přesně dodržovati.

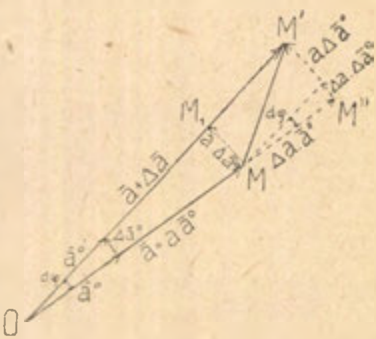
Stejně postupujíce, můžeme vytvořiti derivace vyšší. V semikartézském rozepsání plyne z daných pravidel bezprostředně

$$\frac{d\bar{a}}{du}=\frac{da_x}{du}\bar{\imath}+\frac{da_y}{du}\bar{\jmath}+\frac{da_z}{du}\bar{k},$$

až

$$\frac{d^n\bar{a}}{du^n}=\frac{d^na_x}{du^n}\bar{\imath}+\frac{d^na_y}{du^n}\bar{\jmath}+\frac{d^na_z}{du^n}\bar{k}, \qquad (f)$$

neboť jedničkové vektory $\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k}$ jsou co do směru i velikosti stálé, neproměnné. Jinak nemusí býti ani orthogonální, nýbrž mohou míti libovolné různé směry v prostoru. Snadno lze rozepsati v semikartézský tvar vzorce (*b*) až (*e*). Heaviside dokazuje tyto vzorce právě opačným postupem ze semikartézského tvaru. Všimněme si ještě blíže geometrického znázornění velmi malé změny vektoru $\bar{a}=a\,.\,\bar{a}^0$. Dle (*c*) jest $d\bar{a}=da\,.\,\bar{a}^0+a\,.\,d\bar{a}^0$.



Obr. 14.

Změna $\Delta\bar{a}^0$ proměnného jedničkového vektoru v limitě $d\bar{a}^0$, jest vektor kolmý na $\bar{a}^0$ a jeho velikost, svírají-li vektory $\bar{a}$ a $\bar{a}+d\bar{a}$ úhel $d\varphi$, jest rovna $1\,.\,d\varphi=d\varphi$. Vidíme toto důležité pravidlo přímo z obrazce 14; kolmost formálně vyplývá také diferenciací (dle vzorce (*b*)) součinu $\bar{a}^0\bar{a}^0=1$, neboť

$$d(\bar{a}^0\bar{a}^0)=\bar{a}^0d\bar{a}^0+d\bar{a}^0\,.\,\bar{a}^0=2\bar{a}^0d\bar{a}^0=0,\quad \text{tedy}\quad d\bar{a}^0\perp\bar{a}^0. \qquad (g)$$

Jest patrno z obrazce 14, že

$$\Delta\bar{a}=\Delta a\,.\,\bar{a}^0+\Delta a\,.\,\Delta\bar{a}^0+a\Delta\bar{a}^0.$$

Při přechodu k nahoře napsané limitě ztotožňujeme oblouky MM_1 a $M''M'$ s kolmicemi na OM a zanedbáváme součin $\Delta a\,.\,\Delta\bar{a}^0$ nekonečně malý druhého řádu.

Je-li vektorem $\bar{a}$ skutečný průvodič (vektor polohový) $\bar{r}$, jehož jedničkový vektor zveme $\bar{\varrho}\,(\equiv\bar{a}^0)$, a volíme-li za skalární neodvisle proměnnou délku s křivky, měřenou od kteréhosi začátečního bodu $s=0$

na ní, má tetiva $MM' \equiv \Delta\bar{a} = \Delta\bar{r}$ v limitě směr tečné $\bar{\tau}$ a délku $dr = ds$, takže

$$d\bar{r} = ds \, . \, \bar{\tau}, \quad \frac{d\bar{r}}{ds} = \bar{\tau}. \tag{h}$$

Ježto dle (f) je

$$\bar{\tau} = \frac{d\bar{r}}{ds} = \frac{dx}{ds}\bar{\imath} + \frac{dy}{ds}\bar{\jmath} + \frac{dz}{ds}\bar{k},$$

dostáváme skalárními součiny

$$\bar{\imath}\bar{\tau} = \cos(\widehat{\tau x}) = \frac{dx}{ds}, \quad \cos(\widehat{\tau y}) = \frac{dy}{ds}, \quad \cos(\widehat{\tau z}) = \frac{dz}{ds}, \tag{i}$$

což jsou směrové kosinusy tečné.

Jaký význam má $\frac{d^2\bar{r}}{ds^2} = \frac{d\bar{\tau}}{ds}$? Ježto $\bar{\tau}$ je vektor jedničkový, jest to vektor na tečně kolmý, ležící v rovině dvou konsekutivních tečen, sestrojených v bodech M a M' dané křivky, čili v tak zvané rovině oskulační (obr. 13). Velikost vektoru $d\bar{\tau}$ jest $d\varphi$, tedy $\left|\frac{d\bar{\tau}}{ds}\right| = \frac{d\varphi}{ds}$, zveme-li $d\varphi$ úhel mezi oběma tečnami, t. zv. úhel kontingenční. Vztyčíme-li kolmice na obou tečnách, protnou se „uvnitř křivky“ (t. j. na její konkávní straně) v bodě O', ve vzdálenosti $O'M = O'M' = R$, kterou označujeme názvem poloměr křivosti R. Úhel mezi kolmicemi je $d\varphi$, takže $ds = R d\varphi$. Jest tedy $R = \frac{ds}{d\varphi}$ a t. zv. křivost $\frac{1}{R} = \frac{d\varphi}{ds}$. Kolmici na tečné, ležící v oskulační rovině, nazýváme (prvou) normálou křivky, a charakterisujeme-li její směr „dovnitř“ křivky jedničkovým vektorem $\bar{\nu}$, můžeme vše, co jsme řekli, shrnouti ve vztah

$$\frac{d^2\bar{r}}{ds^2} = \frac{d\bar{\tau}}{ds} = \frac{1}{R}\bar{\nu}. \tag{j}$$

Z

$$\frac{1}{R}\bar{\nu} = \frac{d^2\bar{r}}{ds^2} = \frac{d^2x}{ds^2}\bar{\imath} + \frac{d^2y}{ds^2}\bar{\jmath} + \frac{d^2z}{ds^2}\bar{k} \tag{k}$$

dostáváme jednak směrové kosinusy normály

$$\cos(\widehat{\nu x}) = R\frac{d^2x}{ds^2}, \quad \cos(\widehat{\nu y}) = R\frac{d^2y}{ds^2}, \quad \cos(\widehat{\nu z}) = R\frac{d^2z}{ds^2}, \tag{l}$$

jednak z $\bar{\nu}^2 = 1$ pro poloměr křivosti

$$\frac{1}{R^2} = \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2. \tag{m}$$

Budiž připomenuto, že kolmici na tečné kolmou na rovině oskulační, nazýváme binormálou. Pro její jedničkový vektor $\bar{\nu}'$ volíme kladný směr tak, že $\bar{\tau}$, $\bar{\nu}$, $\bar{\nu}'$ tvoří pravotočivý systém, takže $[\bar{\tau}\bar{\nu}] = \bar{\nu}'$, $[\bar{\nu}\bar{\nu}'] = \bar{\tau}$, $[\bar{\nu}'\bar{\tau}] = \bar{\nu}$. Jako dává (j) poloměr křivosti křivky v určitém bodě, resp. křivost $\frac{1}{R}$, t. j.

otočení tečné kolem binormály při postupu o jedničku délkovou (volenou vhodně malou) podél křivky, tak dává

$$\frac{d\bar{\nu}'}{ds} = \frac{1}{R'}\bar{\nu}, \qquad (n)$$

poloměr torse křivky, t. j. otočení oskulační roviny (a normály $\bar{\nu}$) kolem tečné při témž postupu. Lze snadno dokázati, že

$$\frac{d\bar{\nu}}{ds} = -\frac{1}{R}\bar{\tau} - \frac{1}{R'}\bar{\nu}', \qquad (o)$$

a

$$\frac{1}{R'} = \frac{\frac{d\bar{r}}{ds}\cdot\left[\frac{d^2\bar{r}}{ds^2}, \frac{d^3\bar{r}}{ds^3}\right]}{\left(\frac{d^2\bar{r}}{ds^2}\right)^2}. \qquad (p)$$

Vzorce (j, n, o) jsou vektorovým tvarem vzorců Frenetových.

11. Gradient. Operátor Hamiltonův.

Již na tomto místě zmíníme se ještě o jednom vztahu mezi vektory a diferenciací, který jest příbuzný diferenciaci dle určitého směru. Mějme skalár U, který jest dle názvosloví Laméova „bodovou funkcí“, t. j. má v každém bodě prostoru určitou, jen od polohy toho bodu závislou hodnotu, takže je funkcí souřadnic $U(x, y, z)$. Postoupíme-li z bodu (x, y, z) do libovolného sousedního $(x + dx,\ y + dy,\ z + dz)$ podél směru s, jest celková změna dU našeho skaláru

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz. \qquad (a)$$

Postoupili jsme celkem o trať ds, danou vzorem ($1h$), a dělením plyne

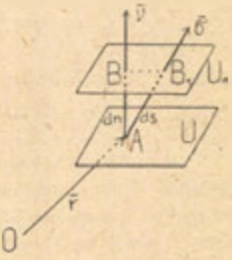
$$\frac{dU}{ds} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{ds}$$

čili dle ($1i$)

$$\frac{dU}{ds} = \frac{\partial U}{\partial x}\cos(\widehat{sx}) + \frac{\partial U}{\partial y}\cos(\widehat{sy}) + \frac{\partial U}{\partial z}\cos(\widehat{sz}),$$

jakožto velikost vzrůstu U (t. j. přírůstku veličiny U na jednotce délkové vhodně malou volené) ve směru postupu ds.

Vyberme nyní z celého prostoru všechny ty body, v nichž má U danou stálou hodnotu C. Je-li U v uvažované části prostoru (zvané polem skaláru U) funkce spojitá, vyplní tyto body jistou plochu $U = C$, kterou nazýváme hladinou nebo plochou stálého U. Udělujíce konstantě C postupně jiné a jiné na př. rostoucí hodnoty, obdržíme nové a nové hladiny, takže jimi můžeme pole proměnného U mapovati. Tak jsou na př. na zeměpisných mapách vrstevnice průseky zemského povrchu s hladinami téže výše nad hladinou mořskou — povrchem geoidu. V obr. 15



Obr. 15.

jsou znázorněny části dvou hladin C a $C+dC$. Přejdemé-li od jedné k druhé, jest změna $U_1-U=dU$ vždy stejná dC. Změna nejrychlejší nastává patrně při přechodu z jedné hladiny (libovolného bodu A) do druhé ve směru normály $\bar{\nu}$, dle $\overrightarrow{AB}=\bar{\nu}\,.\,dn$, neboť pro libovolný jiný směr odpovídá táž změna dC délce $AB_1=ds$, kde $dn=ds\,.\,cos(\widehat{\nu\sigma})$, takže změna na jedničce délkové je menší, rovnajíc se

$$\frac{dU}{ds}=\frac{dU}{dn}\,.\,cos(\widehat{\nu\sigma}). \tag{b}$$

Utvoříme-li vektor $\bar{\nu}\dfrac{dU}{dn}$, zvaný gradientem U, udává nám jak směr nejrychlejšího vzrůstu skaláru U, tak i velikost tohoto vzrůstu.

Definujeme tedy gradient skaláru

$$\text{grad } U=\nabla U=\bar{\nu}\frac{dU}{dn}. \tag{c}$$

Označení obráceným delta čteme „del U“ (s Gibbsem, jiní čtou též „nabla U“ dle tvaru starožidovské harfy); ∇ značí symbolický Hamiltonův operátor, který, aplikován na skalár, dává jeho gradient, tedy vektor*).

Z definice gradientu je přímo viděti, že jeho hodnota i směr je nezávislý na poloze soustavy souřadnicové.

Vzrůst skaláru U na jedničku délkovou v libovolném směru $\bar{\sigma}$ jest dle (b)

$$\frac{dU}{ds}=cos(\widehat{\nu\sigma})\frac{dU}{dn}=\bar{\sigma}\bar{\nu}\frac{dU}{dn}=\bar{\sigma}\,.\,\nabla U, \tag{d}$$

takže komponenty gradientu v osách $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$, t. j. $\bar{i}\nabla U, \bar{j}\nabla U$ a $\bar{k}\nabla U$ jsou vzrůsty U ve směru os, které, jak jest zvykem, píšeme $\dfrac{\partial U}{\partial x}, \dfrac{\partial U}{\partial y}$ a $\dfrac{\partial U}{\partial z}$. Složíme-li z těchto komponent gradient stejně jako vůbec každý vektor v semikartézský tvar, jest

$$\text{grad } U=\nabla U=\bar{i}\frac{\partial U}{\partial x}+\bar{j}\frac{\partial U}{\partial y}+\bar{k}\frac{\partial U}{\partial z}, \tag{e}$$

což lze symbolicky psáti

$$\nabla U=\left(\bar{i}\frac{\partial}{\partial x}+\bar{j}\frac{\partial}{\partial y}+\bar{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)U. \tag{f}$$

Můžeme tedy Hamiltonův operátor ∇ považovati za uzávorkovaný symbolický vektor diferenciační, který z každé skalární bodové funkce

---

*) Ježto, jak hned uvidíme, jest to symbolický vektor, měl by se psáti důsledně $\bar{\nabla}$. Nečiníme tak, abychom zůstali v souhlase s jinými autory, ač by to bylo prospěšno již také z toho důvodu, aby se ∇ ostře odlišilo od obyčejného Δ, které značívá konečnou diferenci nějaké veličiny. Ostatně by se mělo také psáti $\overline{\text{grad}}\ U$.

vytváří její gradient výše uvedeného významu*). Z tvaru (e) ovšem není již invariantnost gradientu vzhledem k systému souřadnic přímo patrna. Podobně lze v (d) považovati součin jedničkového vektoru $\bar{\sigma}$ a operátoru ∇ za nový operátor

$$(\bar{\sigma}\nabla) = \left(\bar{\sigma}\bar{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \bar{\sigma}\bar{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \bar{\sigma}\bar{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) = \left(\cos(\widehat{sx})\frac{\partial}{\partial x} + \cos(\widehat{sy})\frac{\partial}{\partial y} + \cos(\widehat{sz})\frac{\partial}{\partial z}\right), \quad (g)$$

který dává derivaci ve směru $\bar{\sigma}$, čili vzrůst skalárné veličiny ve směru $+\bar{\sigma}$.

Charakterisujíce bod A polohovým vektorem $\bar{r}$ a píšíce (obr. 15) za libovolné $AB_1 = \bar{\sigma} ds = d\bar{r} = \bar{\imath}dx + \bar{\jmath}dy + \bar{k}dz$, dostáváme z ($d$)

$$dU = \bar{\sigma} \,.\, ds \,.\, \nabla U = d\bar{r} \,.\, \nabla U \quad (h)$$

a rozepsáním semikartézským dle (e) po provedení skalárního násobení základní vzorec (a), jak tomu při důsledné symbolice ovšem musí být**). Téhož výsledku bychom se byli dodělali pomocí symbolického operátoru

$$(d\bar{r}.\nabla) = (\bar{\imath}dx + \bar{\jmath}dy + \bar{k}dz)\left(\bar{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \bar{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \bar{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) =$$
$$= \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y} + dz\frac{\partial}{\partial z}\right), \quad (i)$$

působícího na U, jímž vzniká úplný diferenciál skaláru U, t. j. celá změna U na trati $d\bar{r}$. V těchto operátorech (g) a (i) smíme zaměniti pořad obou vektorů jenom tehdy, pamatujeme-li, že operace ∇ má působiti pouze na veličinu U, což se někdy označuje indexem ∇_U.

Velikost či absolutní hodnota gradientu obdrží se stejně jako u každého vektoru vůbec ze „skalárního čtverce",

$$|\nabla U| = \sqrt{(\nabla U)^2}.$$

Lamé ji pro důležitost a časté vyskytování opatřil zvláštním názvem „prvého diferenciálního parametru".

Snadno lze dokázati početní pravidla

$$\nabla(U + V) = \nabla U + \nabla V, \quad (j)$$

a

$$\nabla(UV) = V \,.\, \nabla U + U \,.\, \nabla V. \quad (k)$$

*) Užívání operátorů, s nimiž se nakládá stejně, jakoby byly obyčejnými vektory (nebo skaláry), je pro vektorovou analysi příznačné. Dá se zdůvodniti přísně vědecky na podkladě theorie invariantů; často lze výsledek snadno verifikovati na př. prováděním operace s jednou složkou a pod. V Anglii se ostatně ode dávna těšilo značné přízni i v jiných odvětvích matematiky, jak tomu svědčí na př. anglické učebnice diferenciálních rovnic.

**) Vzhledem k (h) píší mnozí (Hamel) za gradient ∇U symbol $\frac{dU}{d\bar{r}}$. Ježto v pojmu dělení vektorem leží mnohoznačnost (viz na př. knihu Libického, str. 23 a násl.), jest lépe setrvati na obecněji užívané symbolice starší.

II. Kinematika hmotného bodu.

12. Prostor a čas.

Veškeré děje v anorganické přírodě, jichž popis jest úlohou mechaniky, odehrávají se v čase, mají průběh časový. I klid stavu rovnovážného posuzujeme časově, mluvíce o něm tehdy, když nepozorujeme za průběhu konečné doby žádné změny. Nejjednodušší změnou jest změna polohy tělesa P_0 vzhledem k okolním tělesům P_1, P_2, . . P_n, která během téže doby svých vzájemných poloh nezměnila. Soubor těles P_0, P_1, . . P_n, s jistou libovůlí, ale vhodně za určitým účelem námi vybraných, nazýváme soustavou, systémem, abstrahujeme-li zatím od veškerých ostatních těles na zeměkouli, od slunce, oběžnic, stálic a celého všehomíra. Vzhledem k tělesům P_1, . . P_n můžeme si mysliti pevnou soustavu os souřadnicových, za jichž počátek O — resp. bod vztažný při užití vektorového počtu — můžeme zvoliti na př. zcela určitý bod „klidného" tělesa P_k. Každý bod tělesa P_0 opsal během jisté doby dráhu, jejíž tvar lze potom pomocí okamžitých souřadnic x, y, z, resp. okamžitého vektoru polohového $\bar{r}$, popsati jakožto zcela určitou křivku prostorovou.

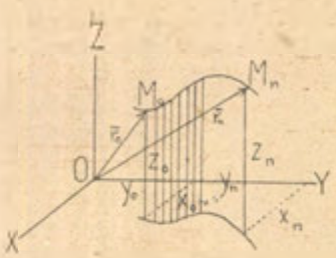
Abychom mohli postupovati od jednodušších případů k složitějším, myslíme si zprvu těleso pohybované P_0 nesmírně malým, nahražujeme je fikcí hmotného bodu M, takže jeho dráha je jedinou prostorovou křivkou a nemusíme při popisu zatím přihlížeti k svazku nekonečně mnoha různých křivek, jako je vytvořují jednotlivé body tělesa P_0 konečných rozměrů. Za takový hmotný bod M volíme často nějaký určitě definovaný bod skutečného tělesa P_0. I tehdy, jedná-li se o hmotný bod, jest patrna relativnost našeho zatím čistě geometrického popisu dráhy; závisíť její tvar na tom, která tělesa jsme pojali do systému, přiřknuvše jim vlastnost klidu. V systému slunce, zeměkoule, kamínek na zeměkouli volně padající, bude dráha tohoto kamínku přímkou, přiřkneme-li zeměkouli vlastnost klidu, t. j. myslíme-li systém souřadnic pevně se zemí spojený (stanovisko geocentrické). Za to musíme popisovati dráhu slunce — i tehdy, považujeme-li je za hmotný bod — velmi složitou křivkou, jakousi spirálou (pro otáčení či rotaci zemskou), jejíž otvor se během roku spojitě mění s proměnlivou vzdáleností slunce a zeměkoule (následkem ročního oběhu či revoluce zemské). Kdybychom slunci přiřkli vlastnost klidu a pevně s ním spojili soustavu souřadnicovou (stanovisko heliocentrické), bude dráha středu zeměkoule poměrně jednoduchá — elipsa —, dráha libovolného, vzhledem k zeměkouli klidného bodu jejího povrchu už značně složitější (následkem rotace zemské), dráha padajícího kamene pak nad míru složitou.

Při popisu zjevů na zeměkouli vystačíme ve valné většině případů se stanoviskem geocentrickým, nejpohodlnějším, protože je dáno

přímým názorem. Theoretický astronom, popisuje zjevy v sluneční soustavě, dochází nutně k poznání, že jest pro něho pohodlnější stanovisko heliocentrické. V nejvyšší abstrakci, která vůbec jest možná, a která se po prvé projeví v axiomech Newtonových, musí lidský duch sáhnouti k pojmu absolutně pevné soustavy souřadnicové, která zachycuje a fixuje absolutní prostor, jakéhosi nám neznámého nositele (substrát) kosmu. Pro zjevy mechanické na povrchu zemském vystačíme, považujeme-li prostor daný sluncem a stálicemi za absolutní, ač dle výsledků fysikální astronomie jest jisto, — to znamená nejvýše pravděpodobno —, že slunce s celou svojí soustavou oběžnic se pohybuje směrem k hvězdě α-Centauri. Ale absolutní prostor stejně jako absolutní čas jsou výtvorem abstrakce lidského ducha a nemusí odpovídati žádným skutečnostem (realitám).

13. Pohyb.

Čistě geometrický popis dráhy hmotného bodu nám nestačí, nevystihuje zjev do všech podrobností, které nás zajímají, a které i makroskopicky přímému názoru jsou přístupny. Nestačí nám poznatek, že hmotný bod M přešel určitou drahou, danou vztahem $\varphi(\bar{r}) = 0$, z polohy $M_0(x_0, y_0, z_0)$, resp. $M_0(\bar{r}_0)$ do nové polohy $M_n(x_n, y_n, z_n)$, resp. $M_n(\bar{r}_n)$ (obr. 16). Zajímá nás otázka, za jaký čas se tak stalo, a kde se v určitém okamžiku bod na své dráze nacházel. Ku třem proměnným x, y, z, resp. s nimi ekvivalentnímu polohovému vektoru $\bar{r}$ přistupuje jakožto čtvrtá čas t.



Obr. 16.

Z oblasti geometrie vstupujeme v oblast kinematiky*) neboli foronomie, v níž se zabýváme popisem časového průběhu pohybu hmotného bodu. Takový, ač nedokonalý, ale přece nejjednodušší popis bychom získali, kdybychom celou dráhu M_0M_n rozdělili na sled velmi mnoha poloh bodu $M_0M_1M_2 \ldots M_n$, kde ku každé bychom připsali údaj časový. Čím větší počet těch poloh bychom volili, tím přesnějším stával by se popis, který můžeme označiti jakožto kinematografický, z jednotlivých fotogramů složený. Vskutku se takto zkoumají na př. pohyby střel. Teprve kdybychom dovedli nalézti jednoduché funkční vztahy mezi okamžitými hodnotami souřadnic a údaji časovými, byla by úloha uspokojivě řešena ve tvaru

$$x = f_1(t) \quad y = f_2(t) \quad z = f_3(t) \quad \text{anebo} \quad \bar{r} = F(t) = \bar{i} f_1(t) + \bar{j} f_2(t) + \bar{k} f_3(t). \tag{a}$$

*) Původcem názvu kinematika jest Ampère (Essay sur la philosophie. Paris 1834), ač „geometrie pohybu“ byla před ním pěstována zvláště D'Alembertem a Eulerem.

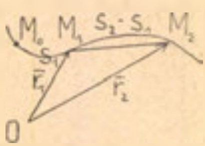
Pro každý daný okamžik časový t_k dovedli bychom početně najíti příslušnou polohu pohyblivého bodu. Eliminací času z rovnic (a) dojdeme k rovnicím dráhy jakožto křivky prostorové. Z povahy pojmu času, který si představujeme spojitě plynulým, vychází, že funkce f_1, f_2, f_3 musí býti vesměs spojité a jak hned zde lze připojiti, spojitě diferencovatelné, ježto uvažovaný bod se nemůže v témž okamžiku nacházeti ve dvou místech prostoru a nemůže přejíti z jistého místa na jiné, aniž proběhl spojitou řadou poloh, obě místa nepřetržitou čarou spojujících. Z hořeních vývodů je patrno, že všechny nás zajímající údaje o dráze hmotného bodu daly by se vyjádřiti křivkou v prostoru čtyrdimensionálním.

Jako každá věda, musí i mechanika silně schematisovati, omezovati se na popis pohybů poměrně jednoduchých typů, jež však podivuhodně se blíží těm, které v anorganické přírodě samovolně se vyskytují, nebo v technice uměle se způsobují, nebo alespoň tvoří prvky pohybů složitějších.

Za účelem zjednodušení popisu vytváří si kinematika dva nové názorné pojmy, totiž pojem rychlosti a zrychlení.

14. Rychlost.

Nacházel-li se pohyblivý hmotný bod v čase t_1 v poloze M_1 (obr. 17), v čase t_2 pak v poloze M_2, proběhl v době $t_2 - t_1$ jistou, obecně křivočarou dráhu. Polohový vektor změnil se z $\bar{r}_1$ na $\bar{r}_2$, délka proběhnuté dráhy, kterou měříme podél dráhy od libovolně ustanoveného bodu na ní M_0, označujíce skaláry $M_0M_1 = s_1$, $M_0M_2 = s_2$, jest $s_2 - s_1$. Poměr



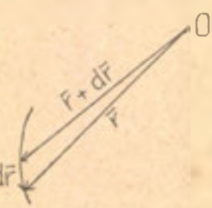
Obr. 17.

$$\frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = v_{12} \qquad (a)$$

nazýváme střední rychlostí na trati M_1M_2. Jednoduché a přehledné definice a vztahy obdržíme, přejdeme-li k úvahám infinitesimálním. Zkracujme v mysli dobu průběhu $t_2 - t_1$ uvažovaného děje. Druhá uvažovaná poloha M_2 bude se blížiti k prvé M_1; píšeme-li s_2 ve tvaru $s_2 = s_1 + \Delta s_1$ a podobně $t_2 = t_1 + \Delta t_1$, bude se poměr přírůstků blížiti k limitě

$$\lim_{\Delta t_1 = 0} \frac{\Delta s_1}{\Delta t_1} = \frac{ds_1}{dt_1} = v_1. \qquad (b)$$

Jest totiž dráha spojitou funkcí času a druhý možný případ, totiž vzrůstu napsaného poměru $\frac{\Delta s_1}{\Delta t_1}$ do nekonečna, postulatoricky vylučujeme. Limitu v_1 nazýváme okamžitou (momentanní) rychlostí postupnou hmotného bodu v místě M_1. Tímto místem může býti libovolný bod dráhy a proto je nyní označujeme prostě M bez indexu (obr. 18). Z definice okamžité rychlosti vyniká také její ráz jakožto vektoru. Přejdeť spojnice ds dvou sousedních bodů M_1 a M_2, resp. M a M' v přímku směru tečné ku křivce dráhové, velikost pří-



Obr. 18.

růstku ds je táž jako přírůstku polohového vektoru $d\bar{r}$, a nic nám nepřekáží, abychom definovali okamžitou postupnou rychlost bodu jakožto vektor

$$\bar{v} = \frac{ds}{dt}\bar{\tau} = \frac{d\bar{r}}{dt}, \qquad (c)$$

jenž má velikost limity poměru přírůstku dráhy a jí odpovídajícího času a směr tečné ku křivce dráhové, daný jedničkovým vektorem $\bar{\tau}$. Z definice plyne, že $d\bar{r} = ds.\bar{\tau}$, což souhlasí s bezprostředním geom. názorem. Definici můžeme čísti také jinak, názorněji: $d\bar{r} = ds.\bar{\tau}$ je dráha bodu, vykonaná v čase dt. Je-li $dt = 1$, můžeme (c) čísti takto: Rychlost postupná je číselně a směrem rovna dráze, vykonané za jedničku časovou. Jen ovšem musíme míti na paměti, že toto čtení je obecně jen tehdy platné, volíme-li [ve smyslu limity (b)] časovou jedničku dostatečně malou. Jen ve zcela zvláštních případech můžeme říci, že rychlost se numericky rovná dráze za vteřinu vykonané.

Slovo numericky nebo číselně vkládáme sem proto, že rychlost a dráha nemají téže fysikální dimense či rozměru. Jeť dráha veličinou, měřenou v jedničce délkové, čas měřen počtem vteřin (minut, hodin, dní) a proto, abychom zůstali v souhlase s definicí (c), tak aby veličiny po obou stranách rovnítka byly stejné, připíšeme-li k nim jedničky, v nichž byly měřeny, musíme přiřknouti rychlosti dimensi délka dělena časem. Jest známo, že dimense píšeme obvykle velikými začátečními písmenami L, T, M slov longitudo (délka), tempus (čas) a materia (hmota) v hranatých závorkách. Jsou tedy dimense dráhy času a rychlosti postupně $[L]$, $[T]$ a $[L/T] = [LT^{-1}]$. Třem uvedeným základním dimensím odpovídají tři základní jedničky měrné. Jsou-li jimi *cm*, *sec* a *gram*, říkáme, že měříme v absolutní soustavě měr.

Dimense skýtají nám dvojí výhodu: 1. V žádné správně dovozené fysikální rovnici nesmí býti spojeny rovnítkem nebo znamením součtu či rozdílu veličiny dimensí různých. Doporučuje se sledovati tuto větu v různých rovnicích, se kterými se setkáme. Často se ukáže, že konstanty do počtu zaváděné (na př. konstanty integrační, různé zkušeností dané faktory v rovnicích a pod.), nejsou pouhými čísly, nýbrž musí míti rozměr. 2. Pomocí dimensí snadno přepočítáme údaje v různých jedničkách. Tak na př. průměrná rychlost rychlíku 60 kilometrů za hodinu jest rovna $60\,\frac{1000\,m}{60.60\,sec} = 60.\frac{100000\,cm}{60.60\,sec}$ čili $16{\cdot}66\,.\,m/sec$ a $1666{\cdot}66\,.\,cm/sec$ čili jedniček absolutních, kterým se někdy, ne právě libozvučně, říká vel ($= 1\,cm/sec$).

15. Skládání rychlostí.

Vyjádříme-li polohový vektor $\bar{r}$ ve tvaru semikartézském $\bar{r} = \bar{\imath}x + \bar{\jmath}y + \bar{k}z$ nebo obecněji, neleží-li vztažný bod O v začátku koordinat, nýbrž má-li souřadnice x_0, y_0, z_0,

$$\bar{r} = \bar{\imath}(x - x_0) + \bar{\jmath}(y - y_0) + \bar{k}(z - z_0),$$

máme, abychom obdrželi rychlost, dáti na $\bar{r}$ působiti **skalárnímu operátoru** *d/dt*, který, působí-li na skalár, zveme diferenciací dle času. Vyjadřuje na jedničku časovou vztaženou změnu. Ježto $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ jsou co do velikosti i směru časově neproměnné vektory, a podobně x_0, y_0, z_0 neproměnné skaláry, jsme vedeni k tomu, že klademe

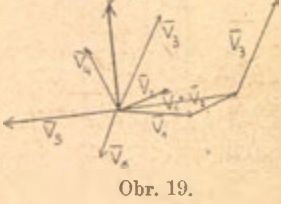
$$\bar{v} = \frac{d}{dt}(\bar{r}) = \frac{d}{dt}(\bar{i}(x-x_0)+\bar{j}(y-y_0)+\bar{k}(z-z_0)) = \bar{i}\frac{dx}{dt}+\bar{j}\frac{dy}{dt}+\bar{k}\frac{dz}{dt}. \quad (a)$$

Význam členů na pravé straně je názorem dán: $\bar{i}\frac{dx}{dt}$ je co do směru i velikosti rychlost, kterou postupuje po ose x-ové průmět pohybujícího se hmotného bodu. Násobíme-li obě strany na př. $\bar{i}$, vidíme, že **průmět rychlosti se rovná rychlosti průmětu**. Velikost $\frac{dx}{dt} = v_x$ nazýváme $\bar{i}$-**složkou (komponentou) rychlosti** v. Podobně druhé členy s $\frac{dy}{dt} = v_y$ a $\frac{dz}{dt} = v_z$.

Leč význam rovnice (a) je hlubší. Nemá-li vésti ke sporům se skutečnými zjevy, musí býti dovoleno, nejen nahradit jedinou rychlost pohyblivého bodu třemi rychlostmi v různých (zde navzájem kolmých, ale obecně libovolných, v téže rovině neležících) směrech, ale i počínání opačné. Jinými slovy: Musí býti dovoleno nejen **rozkládati rychlost bodu na složky**, ale i různé témuž bodu příslušné*) **rychlosti skládati dle pravidla vektorového součtu.** Shrnujeme to vše názvem **princip o superposici (současných) rychlostí.** Dokázati se nedá. Také jeho původce je neznám. Víme jen tolik, že již **Galileo Galilei** ho užíval, nepřikládaje mu valného významu, který plně pochopili teprve **Newton** a **Varignon**. Jest tudíž nedokazatelným axiomem, jehož oprávněnost vyplývá jedině z té okolnosti, že ač nesčetněkráte ho bylo užito, nevedl dosud k neshodě se skutečným průběhem zjevů.

Všeobecný vektoriální výraz pravidla o skládání rychlosti je velmi jednoduchý. Přísluší-li témuž bodu současně několik rychlostí $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots \bar{v}_n$, jest jeho rychlost skutečná neboli výsledná

$$\bar{v} = \sum_{\nu=1}^{n} \bar{v}_\nu. \quad (b)$$



Obr. 19.

Geometricky jest dán součet rychlostí vektorovým součtem, to jest u dvou rychlostí rovnoběžníkem nebo trojúhelníkem rychlostí, u několika pak mnohoúhelníkem (obr. 19). Na pořadu sčítanců nezáleží.

U rychlostí téhož směru, nebo protisměrných, v téže přímce ležících, stává se vektorový („geometrický“) součet totožným s algebraickým. Rozepíšeme-li všechny rychlosti dle koordinat, jest

*) Často říkáme personifikujíce: „na týž bod působící“ rychlosti.

$$\bar{v} = \bar{\imath} \,.\, \sum_{\nu=1}^{n} v_{x\nu} + \bar{\jmath} \,.\, \sum_{\nu=1}^{n} v_{y\nu} + \bar{k} \,.\, \sum_{\nu=1}^{n} v_{z\nu} \tag{c}$$

takže sčítáme nejprve algebraicky veškeré $\bar{\imath}$-složky ve výslednou $\bar{\imath}$-složku, podobně u složek dle os $\bar{\jmath}$ a $\bar{k}$, a tyto výsledné složky skládáme geometricky. Násobíme-li rovnici (a) skalárně samu sebou, obdržíme čtverec velikosti výslednice (viz (3 h))

$$v^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2. \tag{d}$$

Směrové kosinusy rychlosti jsou dle ($3i$) a ($2c$)

$$\cos(\widehat{vx}) = \frac{v_x}{v} = \frac{dx}{dt} : \frac{ds}{dt} = \frac{dx}{ds} = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}},$$

$$\cos(\widehat{vy}) = \frac{dy}{ds}, \quad \cos(\widehat{vz}) = \frac{dz}{ds}, \tag{e}$$

t. j. totožné se směrovými kosinusy tečné ku křivce dráhové ($10i$).

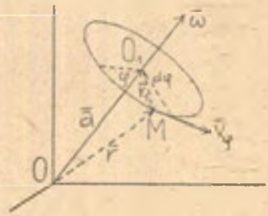
Při pohybu rovinném jsou poměry jednodušší, vzorce příslušné obdržíme z našich, klademe-li všude $z = 0$ a $\frac{dz}{dt} = v_z = 0$. Zveme-li, jak je obvyklo, úhel $\widehat{vx} = \varphi$, je $v_x = v \,.\, \cos\varphi$ a $v_y = v \,.\, \sin\varphi$, neboť $\widehat{vy} = 90^0 - \varphi$.

16. Rychlost v souřadnicích polárních.

Polárními souřadnicemi bodu M v rovině jsou velikost r polohového vektoru $\bar{r}$ a úhel φ, který svírá s jistým základním směrem,



Obr. 20a.



Obr. 20b.

polární osou, kterou při přechodu k souřadnicím kartézským ztotožníme s osou X (obr. 20a).

Veškeré body roviny vyčerpáme, nabývá-li r všech kladných hodnot od 0 do ∞, a φ (rostoucí proti směru ručiček hodinových) od 0^0 do 360^0. Rychlost lze psáti dle vývodů § 10 o diferenciaci vektorů

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\bar{\varrho}) = \frac{dr}{dt}\bar{\varrho} + r\frac{d\bar{\varrho}}{dt}.$$

Změna jedničkového vektoru $d\bar{\varrho}$ je vektor kolmý na $\bar{\varrho}$ (srov. 10g), charakterisovaný jedničkovým vektorem $\bar{\varphi} \perp \bar{\varrho}$ ve směru vzrůstu φ a velikostí $d\varphi$, tedy $d\bar{\varrho} = \bar{\varphi} \,.\, d\varphi$, čili

$$\bar{v} = \frac{dr}{dt}\bar{\varrho} + r\frac{d\varphi}{dt}\bar{\varphi} \,.\, = \bar{v}_\rho + \bar{v}_\varphi. \qquad (a)$$

Místo na pevné osy $\bar{\imath}$ a $\bar{\jmath}$ můžeme tedy ve vhodných případech rozkládati postupnou rychlost bodu na osy $\bar{\varrho}$ a $\bar{\varphi}$, které se kolem O otáčejí. Složkou radiální $\frac{dr}{dt}\bar{\varrho} = \bar{v}_\rho$ vzdaluje se pohyblivý bod od středu O, složkou transversální či oběžnou $r\frac{d\varphi}{dt}\bar{\varphi} = \bar{v}_\varphi$ obíhá kolem O. Obě složky sčítají se ovšem zase jakožto vektory. Tento rozklad, podobně jako obdobný $\bar{c}$ zrychlení, pochází od Huygense a byl pro vývoj elementární kinematiky v 17. století největší důležitosti.

Výraz $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$, vzrůst úhlu za (dostatečně malou) jedničku časovou, nazýváme rychlostí úhlovou. Jest to rychlost, se kterou obíhá kolem pozorovatele, stojícího v O (obr. 20a) a hledícího na M, zorná přímka. Odtud její důležitost v popisné a sférické astronomii. Úhlu φ, zpravidla měřenému mírou obloukovou, t. j. poměrem oblouku na kruhu k jeho poloměru (úhlu 360° tedy odpovídá v obl. míře 2π), nepřísluší dimense žádná (vlastně $[L \,.\, L^{-1}] = 1$), proto je dimensí úhlové rychlosti $[T^{-1}]$. Rovnice (a) jest tedy dimensionálně správná.

Pro úsporu místa budeme v dalším velmi často označovati diferenciální poměr dle času po způsobu Newtonových fluxí tečkou nad dotyčnou veličinou, ať skalární, ať vektorovou, takže

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad \frac{d\bar{r}}{dt} = \dot{\bar{r}}.$$

Podobně i u druhých diferenciálních poměrů

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}, \quad \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \ddot{\bar{r}} \quad \text{a pod.}$$

Přepočítávání rychlosti v složkách v_x a v_y na radiální a rotační složku plyne velmi jednoduše z identity

$$\bar{v} = v_x\bar{\imath} + v_y\bar{\jmath} = \dot{r} \,.\, \bar{\varrho} + r\dot{\varphi} \,.\, \bar{\varphi}, \qquad (b)$$

všimneme-li si, že jedničkové vektory $\bar{\varrho}$ a $\bar{\varphi}$ tvoří systém orthogonální, takže

$$\bar{\varrho}^2 = \bar{\varphi}^2 = 1, \quad \bar{\varrho} \,.\, \bar{\varphi} = 0$$

a dále, že dle významu skalárního součinu

$$\bar{\varrho}\bar{\imath} = \cos\varphi = \bar{\varphi}\bar{\jmath}, \; \bar{\varrho}\bar{\jmath} = \cos(90 - \varphi) = \sin\varphi, \; \bar{\varphi}\,\bar{\imath} = \cos(90 + \varphi) = -\sin\varphi.$$

Násobením identity (b) postupně $\bar{\imath}$, $\bar{\jmath}$, $\bar{\varrho}$, $\bar{\varphi}$ plyne bezprostředně

$$\begin{aligned} v_x &= \dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi, & \dot{r} &= \dot{x}\cos\varphi + \dot{y}\sin\varphi, \\ v_y &= \dot{y} = \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi, & r\dot{\varphi} &= -\dot{x}\sin\varphi + \dot{y}\cos\varphi. \end{aligned} \qquad (c)$$

Z téže identity (b) plyne pro velikost rychlosti

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = v_\rho^2 + v_\varphi^2 = \dot{r}^2 + (r\dot{\varphi})^2. \qquad (d)$$

Vztahy (c) lze ovšem stejně jednoduše odvoditi diferenciací z transformačních rovnic $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

Budiž již zde připomenuto, že později objeví se vhodným, charakterisovati úhlovou rychlost co do směru i velikosti jinak, než zde (vektorem $\dot{\varphi}\bar{\varphi}$), totiž vektorem $\bar{\omega} = \omega \,.\, \bar{\omega}^0 = \dot{\varphi} \,.\, \bar{\omega}^0$, kde jedničkový vektor má směr osy, kolem které se otáčení děje, a to ten, že otáčení dle vzrůstajícího φ odpovídá postupu obyčejného šroubu podél rotační osy v kladném směru vektoru $\bar{\omega}$.

V obr. 20a byl by to směr kolmý před papír. V obr. 20b, kde $\overline{OM} = \bar{r}_1 = r_1\bar{\rho}_1$, $OO_1 = \bar{a} = a\bar{\omega}^0$ je patrně $\bar{\varphi} = |\bar{\omega}^0\bar{\rho}_1|$ a rotační rychlost kolem osy OO_1 je $\dot{\varphi} = \omega$, takže postupná rychlost od rotace této pocházející je $\bar{v}_\varphi = r_1\dot{\varphi}\,|\bar{\omega}^0\bar{\rho}_1| = |\bar{\omega}\bar{r}_1|$. Ale $\bar{r} = \bar{a} + \bar{r}_1$, takže

$$\bar{v}_\varphi = [\bar{\omega}\bar{r}_1] = [\bar{\omega}\bar{r}] - [\bar{\omega}\bar{a}] = [\bar{\omega}\bar{r}], \qquad (e)$$

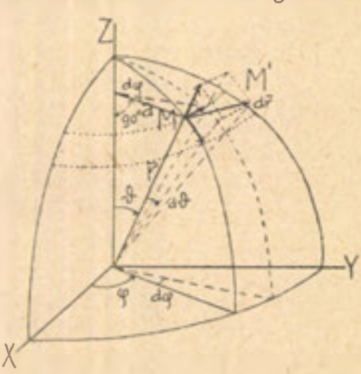
neboť $\bar{\omega}$ a $\bar{a}$ mají týž směr, jejich vektorový součin je nula.

Jest patrno, že počátek O může být volen kdekoli na ose rotační, na velikosti a vektoru $\bar{a} = \bar{\omega}^0 a$ v (e) nic nezávisí.

Označíme-li $\frac{1}{2}v^2 = \Phi$, lze z (d) snadno verifikovati zajímavé vztahy

$$v_\rho = \frac{\partial\Phi}{\partial\dot{r}}, \quad rv_\varphi = \frac{\partial\Phi}{\partial\dot{\varphi}}. \qquad (f)$$

O polárních souřadnicích v prostoru stačiž krátká zmínka. Libovolnou nek. malou změnu $d\bar{r}$ polohového vektoru r lze rozkládati dle tří orthogonálních os (obr. 21). Prvá odpovídá změně jedině velikosti r o obnos dr, druhá změně jedině úhlu φ o $d\varphi$ a tedy změně vektoru o $ad\varphi = r \,.\, sin\,\vartheta \,.\, d\varphi$, třetí změně jedině úhlu ϑ o $d\vartheta$ a tedy změně vektoru o $r\,.\,d\vartheta$.



Obr. 21.

$\bar{v}_\rho = \dot{r}\bar{\rho}$ nazýváme rychlostí radiální, $\bar{v}_\varphi = r\dot{\varphi}\sin\vartheta \,.\, \bar{\varphi}$ rychlostí v poledníku a $\bar{v}_\vartheta = r\dot{\vartheta} \,.\, \bar{\vartheta}$ rychlostí v šířce dle obdob zeměpisných. Vzorce pro rovinu plynou dosazením $\vartheta =$ stálé $= 90^0$. Ježto $\bar{v} = \bar{v}_\rho + \bar{v}_\varphi + v_\vartheta$ a jedničkové vektory $\bar{\rho}$, $\bar{\varphi}$, $\bar{\vartheta}$ významu samozřejmého tvoří orthogonální soustavu, máme skalárním součinem

$$v^2 = v_\rho^2 + v_\varphi^2 + v_\vartheta^2 = \dot{r}^2 + (r\dot{\varphi}\sin\vartheta)^2 + (r\dot{\vartheta})^2. \qquad (g)$$

Složky dle os kartézských bychom obdrželi, násobíce skalárně identitu

$$\bar{v} = \bar{i}\dot{x} + \bar{j}\dot{y} + \bar{k}\dot{z} = \bar{\rho}\dot{r} + \bar{\varphi}\,.\,r\dot{\varphi}\sin\vartheta + \bar{\vartheta}\,.\,r\dot{\vartheta}$$

postupně $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$. Význam součinů $\bar{i}\bar{\rho}, \ldots \bar{k}\bar{\vartheta}$ jakožto kosinusů úhlů mezi jistými směry, které lze považovati za otočenou a původní soustavu kartézských souřadnic, je jasný. Bylo by pak ovšem lépe, zavésti dalším postupem úhly Eulerovy.

17. Moment rychlosti, rychlost plošná.

Jako moment libovolného vektoru, je též moment rychlosti vzhledem k bodu O dle (7a) dán vektorovým součinem s polohovým vektorem a tedy, je-li vztažný bod O začátkem souřadnic,

$$[\bar{r}\bar{v}] = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ x & y & z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix}. \qquad (a)$$

Dle geometrického významu toho součinu jest jeho velikost dána dvojnásobnou plochou, kterou průvodič $\bar{r}$ opíše v jedničce časové. Pro názornost můžeme si mysliti hmotný bod M spojený s počátkem O nesmírně pružnou nití. Označíme-li dle návodu § 6 plochu jí opsanou, počínajíc od jistého okamžiku $t = 0$, ve kterém počínáme počítati čas, vektorem $\bar{S}$, jest plocha v jedničce časové opsaná a plošnou rychlostí zvaná dána vzrůstem $\dot{\bar{S}}$, takže můžeme psáti

$$[\bar{r}\bar{v}] = 2\dot{\bar{S}} = 2(\bar{\imath}\dot{S}_x + \bar{\jmath}\dot{S}_y + \bar{k}\dot{S}_z). \qquad (b)$$

Subdeterminanty v (a) jsou průměty plošné rychlosti na roviny souřadnicové $yz(\equiv\bar{\imath})$, $zx(\equiv\bar{\jmath})$ a $xy(\equiv\bar{k})$, nebo což jest dle § 7 totéž, momenty rychlosti $\bar{v}$ vzhledem k osám x, y, z.

Jest tudíž plošná rychlost v rovině $[\bar{\imath}\bar{\jmath}]$ rovna

$$2\dot{\bar{S}}_z = (x\dot{y} - \dot{x}y)\bar{k}. \qquad (c)$$

Plošnou rychlost obdržíme v souřadnicích polárních z výrazu (16a) pro rychlost. Jestiť

$$[\bar{r}\bar{v}] = \dot{r}[\bar{\varrho}\bar{\varrho}] + r^2\dot{\varphi}[\bar{\varrho}\bar{\varphi}].$$

Ovšem $[\bar{\varrho}\bar{\varrho}] = 0$, takže velikost plošné rychlosti jest $r^2\dot{\varphi}$. Z obr. 20a je přímo patrno, že plocha trojúhelníka

$$\triangle OMM'_1 = \tfrac{1}{2}r\dot{\varphi} \, . \, r = \tfrac{1}{2}r^2\dot{\varphi}.$$

Ploška MM'_1M_1 jakožto nekonečně malá druhého řádu se při plošné rychlosti zanedbává. Jedničkový vektor $[\bar{\varrho}\bar{\varphi}]$ není ničím jiným, než v minulém paragrafu zmíněným vektorem $\bar{\omega}^0$. Charakterisujeme-li úhlovou rychlost vektorem $\bar{\omega} = \omega\bar{\omega}^0 = \dot{\varphi}\bar{\omega}^0$, je plošná rychlost zcela obecně

$$2\dot{\bar{S}} = r^2\dot{\varphi}[\bar{\varrho}\bar{\varphi}] = r^2\omega\bar{\omega}^0 = r^2\bar{\omega}. \qquad (d)$$

Její velikost a směr (t. j. směrové kosinusy kolmice na $[\bar{r}\bar{v}]$) obdržíme stejně jako u každého vektoru skalárním čtvercem a poměrem průmětu k celkové velikosti (viz § 3). Je-li plošná rychlost stálá, rovna $\bar{C}$, přibývá plochy opsané úměrně s časem, neboť z

$$\dot{\bar{S}} = \frac{d\bar{S}}{dt} = \bar{C} \quad \text{plyne} \quad \bar{S} - \bar{S}_0 = \bar{C}(t - t_0).$$

18. Zrychlení. Hodograf.

Rychlost není obecně stálá, nýbrž mění se s časem; změna může se týkati buď jen její velikosti, nebo jen jejího směru nebo

obecně obou zároveň. Byla-li v čase t_1 rychlost hmotného bodu $\bar{v}_1$, v čase t_2 pak $\bar{v}_2$, nazýváme změnu



Obr. 22.

$$\frac{\bar{v}_2 - \bar{v}_1}{t_2 - t_1} = \bar{a}_{12} \qquad (a)$$

středním zrychlením v čase $t_2 - t_1$. Přejdeme-li v limitě k času dostatečně krátkému, přechází zrychlení střední v zrychlení okamžité v čase t_1

$$\lim_{t_2 - t_1 = 0} \frac{\bar{v}_2 - \bar{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{a}. \qquad (b)$$

Jest postulátem, aby rychlost $\bar{v}$ byla spojitou funkcí času a případ, že by se napsaný poměr v limitě blížil nekonečnu, vylučujeme. Patrně jest

$$\bar{a} = a\bar{a}^0 = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\bar{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}. \qquad (c)$$

Dimense zrychlení je dle jeho definice $[LT^{-2}]$, absolutní jednička cm/sec^2.

Dosadíme-li za rychlost z (15a), plyne

$$\bar{a} = \frac{d}{dt}\left(\bar{i}\frac{dx}{dt} + \bar{j}\frac{dy}{dt} + \bar{k}\frac{dz}{dt}\right) = \bar{i}\frac{d^2x}{dt^2} + \bar{j}\frac{d^2y}{dt^2} + \bar{k}\frac{d^2z}{dt^2}, \qquad (d)$$

neboť $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ se s časem nemění. Složky zrychlení dle os jsou tedy $a_x = \ddot{x}$, $a_y = \ddot{y}$, $a_z = \ddot{z}$. Podobně jako u rychlosti vidíme, že průmět zrychlení se rovná zrychlení průmětu a že předpokládáme vektoriální skládání zrychlení, takže za působení různých současných zrychlení je výsledné

$$\bar{a} = \bar{i}\sum_{\nu=1}^{n} a_{x\nu} + \bar{j}\sum_{\nu=1}^{n} a_{y\nu} + \bar{k}\sum_{\nu=1}^{n} a_{z\nu}. \qquad (e)$$

Velikost zrychlení plyne skalárním čtvercem

$$a^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = \dot{v}_x^2 + \dot{v}_y^2 + \dot{v}_z^2 = \ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2. \qquad (f)$$

Kdežto však u rychlosti jsme mohli přímo usouditi, že její směr spadá v jedno s tečnou k dráze vedenou, nemůžeme zatím říci o zrychlení u křivočarého pohybu nic podobně jednoduchého. Známe ovšem jeho směrové kosinusy

$$\cos(\widehat{ax}) = \frac{a_x}{a}, \quad \cos(\widehat{ay}) = \frac{a_y}{a}, \quad \cos(\widehat{az}) = \frac{a_z}{a}. \qquad (g)$$

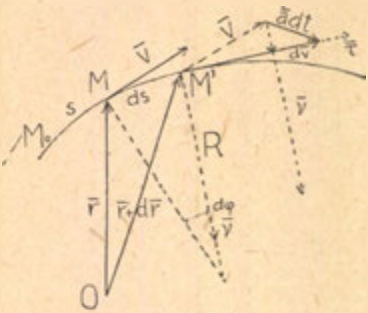
Od vztahu k libovolnému sice, leč přece určitému systému souřadnic, který jest něčím vnuceným, s definicí nesouvisícím, se osvobodíme, použijeme-li v definici (c) výrazu (14c) pro rychlost. Pak dle pravidel diferenciace (§ 10)

$$\bar{a} = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\bar{\tau}\right) = \frac{d^2s}{dt^2}\bar{\tau} + \frac{ds}{dt}\frac{d\bar{\tau}}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}\bar{\tau} + \frac{v^2}{R}\bar{\nu} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_\nu, \qquad (h)$$

neboť dle (10j)

$$\frac{d\bar{\tau}}{dt} = \frac{d\bar{\tau}}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{1}{R}\frac{ds}{dt}\bar{\nu},$$

kde R je poloměr křivosti. Za $\ddot{s}$ ve vzorci (h) mohli jsme také psát $\dot{v}$; jen musíme míti dobře na zřeteli, že $\ddot{s}$ je časová změna velikosti rychlosti $\dot{v}$, nikoli celé rychlosti jakožto vektoru, neboť $\dot{\bar{v}} = \bar{a}$ je celé zrychlení. Takto jest zrychlení rozloženo na „přirozené" složky (Huygens) a_τ v tečné a a_ν v normále (prvé nebo hlavní). Prvou nazýváme zrychlením v dráze, druhou zrychlením středovým (středoběžným) nebo centripetálním, ježto směřuje vždy k středu křivosti dráhy. Celé zrychlení leží tedy v oskulační rovině dráhy, nemá složky v binormále. To je ekvivalent výroku, že rychlost leží v tečně.



Obr. 23.

Rovnice (h) vyhovuje principu dimensí, ježto vektory jedničkové nemají dimense (resp. jejich dimense se rovná 1).

Je-li rychlost v dráze stálá a rovná jedničce, $v = \dot{s} = 1$, je zrychlení v dráze rovno nule a z (h) plyne, že $\frac{1}{R} = a_\nu = a$, t. j. že křivost dráhy je numericky rovna centripetálnímu zrychlení. To je kinematická definice křivosti.

Abychom nalezli zrychlení, přenesli jsme v obr. 23 obě rychlosti $\bar{v}$ a rychlost po čase dt, t. j. $\bar{v} + d\bar{v}$ do téhož bodu M'. Počínáme-li si podobně při libovolném pohybu, nanášejíce z téhož (libovolného) počátečního bodu O' veškeré rychlosti pohyblivého bodu v jednotlivých po sobě následujících okamžicích, a to jakožto vektory po směru i velikosti, vyplní jejich konečné body křivku, kterou nazýváme hodografem daného pohybu. Vymyslil jej Möbius (Mechan. des Himmels 1843), jménem označil a blíže jej studoval Sir Rovan Hamilton (1846), původce kvaternionů, od něhož pochází také název vektor. Jest na prvý pohled zřejmo, že úhel mezi dvěma sousedními rychlostmi v hodografu není než kontingenční úhel dvou sousedních tečen skutečné dráhy. Rychlost, kterou se pohybuje konečný bod vektorů po hodografu, jest co do směru (tečná k hodografu) i velikosti rovna zrychlení pohyblivého bodu hmotného v odpovídajícím místě skutečné dráhy. Jestiť zrychlení dle definice „rychlostí rychlosti".

19. Zrychlení v souřadnicích polárních.

Složky zrychlení při křivočarém rovinném pohybu dle os $\imath$ a $\jmath$ získáme diferenciací rovnic (16 c). Snadno nalezneme

$$a_x = \ddot{x} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\cos\varphi - (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\sin\varphi$$
$$a_y = \ddot{y} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\sin\varphi + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\cos\varphi. \qquad (a)$$

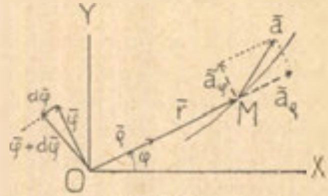
Již sám tvar těchto rovnic volá po „přirozeném“ systému. Dle (16 *d*) je

$$\bar v = \dot r \bar\varrho + r\dot\varphi\bar\varphi.$$

Především vzpomeňme znovu, že

$$d\bar\varrho = d\varphi \,.\, \bar\varphi \quad \text{čili} \quad \dot{\bar\varrho} = \dot\varphi\bar\varphi.$$

Z obrazce jest patrno, že $d\bar\varphi$ je vektor velikosti $1 \times d\varphi$ a směru opačného než $\bar\varrho$, t. j. směru $-\bar\varrho$, takže $d\bar\varphi = -d\varphi \,.\, \bar\varrho$ a $\dot{\bar\varphi} = -\dot\varphi\bar\varrho$. Diferenciací rychlosti dle času obdržíme nyní snadno



Obr. 24.

$$\bar a = \dot{\bar v} = \ddot r \bar\varrho + \dot r \dot{\bar\varrho} + \dot r\dot\varphi\bar\varphi + r\ddot\varphi\bar\varphi + r\dot\varphi\dot{\bar\varphi},$$

čili
$$\bar a = (\ddot r - r\dot\varphi^2)\bar\varrho + (2\dot r\dot\varphi + r\ddot\varphi)\bar\varphi = \bar a_\rho + \bar a_\varphi. \qquad (b)$$

Faktor u $\bar\varrho$ udává velikost **radiální složky zrychlení** a_ρ, faktor u $\bar\varphi$ velikost složky **transversální** a_φ. Promítneme-li je na osy $\bar\imath$ a $\bar\jmath$, obdržíme vzorce (*a*), u nichž nám nyní jest jasno, proč vystupují v závorkách tytéž výrazy. Ostatně bychom obdrželi (*a*) stejně jednoduše z identity

$$\bar a = \ddot x\bar\imath + \ddot y\bar\jmath = (\ddot r - r\dot\varphi^2)\bar\varrho + (2\dot r\dot\varphi + r\ddot\varphi)\bar\varphi,$$

násobíce obě strany jednou jedničkovým vektorem $\bar\imath$, po druhé $\bar\jmath$, a majíce na paměti význam součinů $\bar\imath\bar\varrho, \ldots\ldots \bar\jmath\bar\varphi$. (Viz § 16.)

Celkové zrychlení jest co do velikosti dáno

$$a^2 = (\ddot r - r\dot\varphi^2)^2 + (2\dot r\dot\varphi + r\ddot\varphi)^2 = a^2_\rho + a^2_\varphi. \qquad (c)$$

Veličinu $\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot\varphi$ dimense $[T^{-2}]$ nazýváme **zrychlením úhlovým**. Označíme-li stejně jako v § 16 $\frac{1}{2}v^2 = \Phi$, můžeme zkouškou z (16 *d*) dokázati správnost vztahů odpovídajících (16 *f*)

$$a_\rho = \frac{d}{dt}\frac{\partial\Phi}{\partial\dot r} - \frac{\partial\Phi}{\partial r}, \quad r a_\varphi = \frac{d}{dt}\frac{\partial\Phi}{\partial\dot\varphi} - \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}. \qquad (d)$$

20. Moment zrychlení. Zrychlení plošné.

Dle všeobecné definice (7 *a*) jest dán moment zrychlení vzhledem k počátku souřadnic jakožto bodu vztažnému výrazem

$$[\bar r\bar a] = \begin{vmatrix} \bar\imath & \bar\jmath & \bar k \\ x & y & z \\ \ddot x & \ddot y & \ddot z \end{vmatrix}. \qquad (a)$$

Vektorový výraz můžeme přepsati dle (10 *e*) na

$$[\bar r\bar a] = \left[\bar r \frac{d\bar v}{dt}\right] = \frac{d}{dt}[\bar r\bar v] - \left[\frac{d\bar r}{dt}, \bar v\right].$$

Druhým členem pravé strany jest vektorový součin téže veličiny, rychlosti. Jest tudíž roven nule, takže vzpomeneme-li (17 *b*), dostáváme

$$[\bar r\bar a] = \frac{d}{dt}[\bar r\bar v] = \frac{d}{dt}(2\dot{\bar S}) = 2\ddot{\bar S}. \qquad (b)$$

$\ddot{\bar{S}}$, zvané **plošným zrychlením**, dostáváme z plošné rychlosti $\dot{\bar{S}}$ diferenciací dle času, stejně jako zrychlení obyčejné z obyčejné rychlosti. Dosadíme-li za zrychlení jeho složky dle „přirozených“ os z (19b), je

$$2\ddot{\bar{S}} = [\bar{r}\bar{a}] = [\bar{r}\bar{a}_\rho] + [\bar{r}\bar{a}_\varphi] = [\bar{r}\bar{a}_\varphi], \qquad (c)$$

neboť jak $\bar{r}$, tak $\bar{a}_\rho$ mají týž směr $\bar{\varrho}$, jejich vektorový součin se rovná nule. Plošné zrychlení jest tedy způsobeno pouze transversální složkou zrychlení. Není-li jí, to jest, existuje-li pouze zrychlení radiální, jest plošné zrychlení rovno nule a plošná rychlost $\dot{\bar{S}} = \overline{\text{const}}$ je časově stálá, ovšem jakožto vektor, co do směru i velikosti.

Veškeré pohyby, dané definicí

$$\bar{a} = \pm f(r)\,\bar{\varrho},$$

u nichž celkové zrychlení leží ve směru (rostoucího nebo klesajícího) průvodiče, nazývané **pohyby centrálními**, jsou vyznačeny tím, že vzhledem k vztažnému bodu $O(\bar{r}=0)$ počítaná **plošná rychlost jest stálá**. Z toho plyne bezprostředně, že se dějí v **rovinné křivce**, neboť stálý vektor $\dot{\bar{S}}$, kolmý dle definice na $\bar{r}$ i na $\bar{v}$, určuje stálou rovinu dráhy.

Snadno nalezneme vztah mezi velikostí zrychlení plošného a transversálního. Dle (c), (19b) a (6d) jest

$$2\ddot{\bar{S}} = [\bar{r}\bar{a}_\varphi] = ra_\varphi[\bar{\varrho}\bar{\varphi}] \quad \text{čili} \quad a_\varphi = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = \frac{2}{r}\,|\ddot{\bar{S}}|. \qquad (d)$$

Ve spojení se (17d) a (b) plyne identita

$$a_\varphi = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} \equiv \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}). \qquad (e)$$

Volíme-li za rovinu dráhovou rovinu $[\bar{i}\bar{j}] = \bar{k}$ je

$$2\dot{\bar{S}} = [\bar{r}\bar{v}] = \bar{k}(x\dot{y} - y\dot{x}), \qquad 2\ddot{\bar{S}} = [\bar{r}\bar{a}] = \bar{k}(x\ddot{y} - y\ddot{x}).$$

Vskutku můžeme, podobně jako i u ostatních složek, zjistiti obyčejnou diferenciací, že

$$x\ddot{y} - y\ddot{x} = \frac{d}{dt}(x\dot{y} - y\dot{x}). \qquad (f)$$

V souřadnicích kartézských jeví se pohyby centrální takto: Směrové kosinusy zrychlení a radia vektoru musí býti (až na znamení) totožné, t. j.

$$\frac{\ddot{x}}{a} = \pm\frac{x}{r}, \quad \frac{\ddot{y}}{a} = \pm\frac{y}{r}, \quad \frac{\ddot{z}}{a} = \pm\frac{z}{r},$$

kde platí buď vesměs znamení kladná nebo vesměs záporná. Celkem v obou případech

$$\ddot{x} : \ddot{y} : \ddot{z} = x : y : z.$$

Subdeterminanty v (a), z nichž prvý je v (f) napsán, jsou vesměs nulové, z čehož plyne, že subdeterminanty v (17a) jsou časově stálé, takže nazveme-li je A_x, A_y, A_z, je

$$2\dot{\bar{S}} = [\bar{r}\bar{v}] = A_x\bar{i} + A_y\bar{j} + A_z\bar{k} = \text{stálé}.$$

Dosazením zjistíme, že

$$xA_x + yA_y + zA_z = 0,$$

t. j. dráha je rovinou, která prochází začátkem O.

Typy pohybů.

21. Pohyb přímočarý, rovnoměrný.

Na základě obecných vět kinematických můžeme studovati různé typy pohybů hmotného bodu, nehledíce ovšem zatím k tomu, kdy a zdali vůbec se v přírodě vyskytují.

Kinematicky nezajímavý je případ $\bar{v} \equiv \dot{\bar{r}} = 0$, čili integrací $\bar{r} = \bar{c}$, který odpovídá klidu.

Nejjednodušším typem pohybu jest ten, u něhož rychlost zůstává co do směru i velikosti stálou, tedy

$$\bar{v} \equiv \dot{\bar{r}} = \bar{c}, \quad \text{neboli} \quad \dot{s}\bar{\tau} = c\bar{c}^0, \quad \text{takže} \quad \bar{a} \equiv \dot{\bar{v}} = 0, \tag{a}$$

kde c je skalár časově stálé velikosti, $\bar{c}^0$ jedničkový vektor časově stálého směru. Z druhého tvaru nutně plyne, že $\bar{\tau} = \bar{c}^0$ a $\dot{s} = c$. Dráha jest tudíž křivkou, jejíž tečna má neproměnný směr, tedy **přímkou**. Integrací plyne

$$s = ct + s_0, \tag{b}$$

kde s_0 je integrační konstanta. Její význam obdržíme, položíme-li čas $t = 0$; pak $s_{t=0} = s_0$ udává místo M_0, určené délkou podél dráhy měřenou, počínaje od jejího libovolného bodu O', a to místo, v němž se pohyblivý bod nachází v okamžiku, od kterého počínáme počítati čas. Vztah $s - s_0 = ct$ praví, že dráhy přibývá rovnoměrně s časem, odkudž název **pohyb přímočarý, rovnoměrný**. Často zjednodušujeme algebraické výrazy zákonů, udělujíce integrační konstantě jistou pohodlnou hodnotu. Zde na př. můžeme klásti $s_0 = 0$, měříme-li dráhu od místa, v němž se nacházel pohyblivý bod v čase $t = 0$. Pak je celková dráha $s = ct$ úměrna času. Odpovídají-li libovolným časům t_1 a t_2 polohy hmotného bodu s_1 a s_2, je obecně dle (b)

$$v_{12} \equiv \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = c,$$

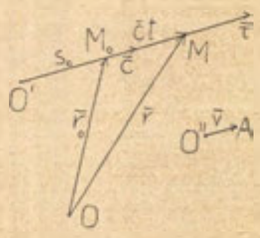
to jest, průměrná rychlost v úplně libovolném intervalu dráhovém nebo časovém je vždy rovna rychlosti okamžité.

Těsněji ve smyslu vektorové analyse si počínáme, integrujeme-li přímo vektorovou rovnici diferenciální, prvý tvar rovnic (a). Tak plyne z

$$\dot{\bar{r}} = \bar{c}, \qquad \bar{r} = \bar{c}t + \bar{r}_0 = ct\bar{\tau} + \bar{r}_0. \tag{c}$$

Integrační konstanta musí být vektorem, má-li princip dimensí být zachován. Jediný pohled na obr. 25 vysvětluje smysl vektorové rovnice (c). Vidíme rovněž bezprostředně, že rovnice toho tvaru, v níž $\bar{c}$ a $\bar{r}_0$ jsou konstantní vektory, t proměnlivý skalární parametr, je **vektorovou rovnicí přímky**. Rovněž je patrno, že klademe-li $\bar{r}_0 = 0$, přenášíme vztažný bod polohových vektorů do bodu M_0 dráhy.

Hodograf pohybu přímočarého, rovnoměrného jest, jak zase z obrazce odečteme, bod A.



Obr. 25.

Plošná rychlost $\dot{S} = \frac{1}{2}|\bar{r}\bar{c}| = \frac{1}{2}[\bar{c}t + \bar{r}_0, \bar{c}] = \frac{1}{2}[\bar{r}_0, \bar{c}]$ jest stálá. Semikartézské rozepsání dle (15a)

$$\bar{v} = \bar{i}\dot{x} + \bar{j}\dot{y} + \bar{k}\dot{z} = \bar{i}c_x + \bar{j}c_y + \bar{k}c_z,$$

kde mimochodem řečeno mohou být $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ tři libovolné směry v prostoru, neležící v téže rovině, rozpadá se na $\dot{x} = c_x$, $\dot{y} = c_y$, $\dot{z} = c_z$, to jest pohyb přímočarý, rovnoměrný rozpadá se na tři přímočaré, rovnoměrné pohyby ve směru oněch tří os. Stejně také jejich složením v jediný docházíme zase k témuž typu pohybu, což lze snadno rozšířiti na libovolný počet složek dle (15c).

22. Pohyb přímočarý, rovnoměrně zrychlený.

Je-li směr rychlosti trvale týž, na př. $\bar{v}^0 = \bar{\tau}$ = stálé, ale její velikost s časem proměnlivá, můžeme psáti obecně $\bar{v} = f(t) \,.\, \bar{\tau}$. Dráha všech těchto pohybů bude dle úvahy obdobné, jako u (21 a), přímka; také hodograf bude přímka, ježto ovšem konce všech $\bar{v}$ leží na přímce směru $\bar{v}^0$. V předchozím paragrafu jednali jsme o případě nejjednodušším, kladouce $f(t)$ = stálé.

Nejblíže jednoduchý případ nastává tehdy, je-li $v = f(t) = a_0 t + v_0$, t. j. lineární funkce času; a_0 a v_0 jsou ovšem časově stálé koeficienty. Velikosti rychlosti přibývá úměrně s časem, $v - v_0 = a_0 t$.

Mohli jsme tento případ vhodněji charakterisovati tím, že $\bar{a}$ = stálé, zrychlení jest časově stálé co do směru i velikosti a má směr rychlosti, tedy i dráhy, neboť

$$\bar{a} = a\bar{a}^0 = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}((a_0 t + v_0)\bar{\tau}) = a_0\bar{\tau},$$

takže velikost zrychlení $|\bar{a}| = a = a_0$ a směr $\bar{a}^0 = \bar{\tau}$. Zrychlení okamžité jest zde rovno zrychlení střednímu v libovolném intervalu, neboť

$$\bar{a}_{12} = \frac{\bar{a}_2 - \bar{a}_1}{t_2 - t_1} = a_0\bar{\tau} = \bar{a}.$$

Proto se nazývá tento pohyb přímočarým, rovnoměrně zrychleným.

Vycházíme-li od obecnějšího předpokladu zrychlení stálého, máme integrací

$$\begin{aligned} \bar{a} &= \dot{\bar{v}} = \bar{a}_0, \\ \bar{v} &= \dot{\bar{r}} = \bar{a}_0 t + \bar{v}_0, \\ \bar{r} &= \tfrac{1}{2}\bar{a}_0 t^2 + \bar{v}_0 t + \bar{r}_0. \end{aligned} \tag{a}$$

$\bar{a}_0$, $\bar{v}_0$, $\bar{r}_0$ jsou vektorové integrační stálé, které mají velikost a směr začátečními podmínkami pro $t = 0$ daný. Jen tehdy, má-li začáteční rychlost $\bar{v}_0$ týž nebo opačný směr jako stálé zrychlení, nebo je-li rovna nule, dostáváme přímočarý a ovšem rovnoměrně zrychlený pohyb, neboť pak $\bar{a}_0 = a_0\bar{\tau}$, $\bar{v}_0 = v_0\bar{\tau}$ a $\bar{r} = (\frac{1}{2}a_0 t^2 + v_0)\bar{\tau} + \bar{r}_0$ je rovnicí přímky. Píšeme-li pak (srov. obr. 25) za $\bar{r} - \bar{r}_0 = (s - s_0)\bar{\tau}$, můžeme, násobíce celou rovnici jedničkovým vektorem $\bar{\tau}$, psáti relace, hledící pouze k velikosti dráhy

$$\begin{aligned} s &= \tfrac{1}{2}a_0 t^2 + v_0 t + s_0, \\ \dot{s} &= a_0 t + v_0, \\ \ddot{s} &= a_0. \end{aligned} \tag{b}$$

Je-li zrychlení záporné, má-li opačný směr než začáteční rychlost ($a_0 < 0$), nazýváme pohyb rovnoměrně zpožděným.

Plošné zrychlení jest $\ddot{\bar{S}} = \frac{1}{2}[\bar{r}, \bar{a}] = \frac{1}{2}[\frac{1}{2}\bar{a}_0 t^2 + \bar{v}_0 t + \bar{r}_0, \bar{a}_0] = \frac{1}{2}t[\bar{v}_0 \bar{a}_0] + \frac{1}{2}[\bar{r}_0 \bar{a}_0]$. U pohybu přímočarého, rovnom. zrychleného, kde $\bar{v}_0$ a $\bar{a}_0$ mají týž (neb opačný) směr, odpadá prvý člen a plošné zrychlení jest stálé. Má-li však počáteční rychlost jiný směr než zrychlení, roste plošné zrychlení úměrně s časem.

Rozložením libovolného pohybu se stálým zrychlením, tedy i pohybu přímočarého, dostáváme rovnoměrně zrychlené pohyby průmětů po osách. Nahlédneme to přímo z věty § 18, že průmět zrychlení se rovná zrychlení průmětu, nebo semikartézským rozepsáním poslední rovnice (a)

$$(x - x_0)\bar{i} + (y - y_0)\bar{j} + (z - z_0)\bar{k} =$$
$$= (\tfrac{1}{2}a_{0x}t^2 + v_{0x}t)\bar{i} + (\tfrac{1}{2}a_{0y}t^2 + v_{0y}t)\bar{j} + (\tfrac{1}{2}a_{0z}t^2 + v_{0z}t)\bar{k}.$$

Ale hned můžeme dále usuzovati, že nedostaneme obecně rovnoměrně zrychlený přímočarý pohyb složením tří přímočarých, rovnom. zr. pohybů podél os. Jedině víme, že výsledný pohyb má stálé zrychlení a dále, že dráha je křivkou rovinnou, neboť ve všech okamžicích splněný vztah

$$\tfrac{1}{2}\bar{a}_0 t^2 + \bar{v}_0 t - (\bar{r} - \bar{r}_0) = 0$$

praví dle § 2, že vektory zrychlení, rychlost a dráha jsou komplanární.

Můžeme nahlédnouti ve věc také takto: Semikartézský, námi napsaný, tvar rozpadá se ve tři čistě kartézské vztahy. Když z kterýchkoli dvou vyloučíme proměnnou t, plynou výsledkem rovnice druhého stupně v souřadnicích: Průmětem dráhy na kteroukoli rovinu souř. jest obecně kuželosečka. Když pak prvý vztah násobíme a_{0y}, druhý a_{0x} a odečteme, vypadnou členy s t^2. Podobně učiňme s prvou a třetí. Dělením obou výsledků obdržíme lineární rovnici v x, y, z, nezávislou na t, která dává rovinu dráhy. Nebylo-li v čase $t = 0$ rychlosti, t. j. $v_{0x} = v_{0y} = v_{0z} = 0$, dostáváme přímým dělením kartézských vztahů rovnice přímky dráhové

$$y - y_0 = \frac{a_{0y}}{a_{0x}}(x - x_0), \quad z - z_0 = \frac{a_{0z}}{a_{0x}}(x - x_0).$$

Podobně obdrželi bychom druhý zvláštní případ přímočarého pohybu, vznikajícího složením tří přímočarých, rovn. zr. pohybů za předpokladu $\bar{a}_0 \parallel \pm \bar{v}_0$ ze stejnosti (až na znamení) všech směrových kosinusů počáteční rychlosti a zrychlení. To vše však bylo z vektorových úvah patrno přímo bez počtu.

Hodograf každého pohybu se stálým zrychlením je přímka, jak je viděti z druhé rovnice (a).

23. Pohyb parabolický.

Krátkou úvahu věnujeme zvláštnímu případu pohybu se stálým zrychlením, který jest důležitý pro fysikální užití. Ježto jest nutně rovinným, volme stálé zrychlení proti směru osy $\bar{j}$, tedy $\bar{a} = -a_0\bar{j}$, stálou rychlost počáteční v rovině $[ij]$, tedy $\bar{v}_0 = c_x\bar{i} + c_y\bar{j}$ a počáteční polohu pohyblivého bodu v téže rovině $\bar{r}_0 = x_0\bar{i} + y_0\bar{j}$.

Semikartézským rozepsáním dávají rovnice (22a)

$$\begin{aligned} \bar{a} &= -a_0\bar{j} = \ddot{y}\bar{j}, \\ \bar{v} &= c_x\bar{i} + (-a_0t + c_y)\bar{j} = \dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j}, \\ \bar{r} &= (c_xt + x_0)\bar{i} + (-\tfrac{1}{2}a_0t^2 + c_yt + y_0)\bar{j} = x\bar{i} + y\bar{j}. \end{aligned} \tag{a}$$

Jednak z naší definice, jednak z rovnic napsaných jest patrno, že $\ddot{x} = \ddot{z} = \dot{z} = z = 0$ trvale. Volíme-li ještě místo, ve kterém se nacházel pohyblivý bod v čase $t = 0$ za počátek souřadnic, tedy $x_0 = y_0 = 0$, máme výsledkem

$$x = c_xt, \quad y = -\tfrac{1}{2}a_0t^2 + c_yt. \tag{b}$$

Dosazením za t z prvé rovnice do druhé jest

$$y = -\frac{a_0}{2c_x^2}x^2 + \frac{c_y}{c_x}x \tag{c}$$

rovnicí dráhy. Jest to tedy parabola, probíhající počátkem souřadnic. Osu $\bar{i}$ protíná ($y = 0$) po druhé v $x = X = \dfrac{2c_xc_y}{a_0}$.

Je-li $c_x > 0$, $c_y > 0$, dráha nejprve stoupá (y se zvětšuje), potom trvale klesá. Přechod mezi stoupáním a klesáním nastane tehdy, když rychlost $\dot{y} = 0$, t. j. v čase $t_1 = \dfrac{c_y}{a_0}$. K němu patří $x_1 = c_xt_1 = \dfrac{c_xc_y}{a_0} = \tfrac{1}{2}X$. Téhož bychom byli došli zjistivše maximálné y z (15d) kladouce $\dfrac{dy}{dx} = 0$.

Hodografem tohoto pohybu jest dle předchozího § 22 ovšem přímka, a to dle druhé rovnice (a) rovnoběžná s osou $\bar{j}$, a vzdálená o c_x od počátku. Probíhá se nejprve směrem $+\bar{j}$, později od okamžiku t_1 trvale směrem $-\bar{j}$. Plošné zrychlení roste úměrně s časem.

Pohyb parabolický nastává při šikmém vrhu ve vzduchoprázdném prostoru, kde si představujeme osu $\bar{j}$ svislou vzhůru.

Parabola přechází v přímku, vrh šikmý ve vrh svislý vzhůru, je-li $c_x = 0$, $c_y > 0$, ve vrh svislý dolů, je-li $c_x = 0$, $c_y < 0$. Diskuse obou je zcela snadná, stejně jako diskuse vrhu horizontálního, u něhož $c_x > 0$, $c_y = 0$. U vrhu svislého je plošné zrychlení stálé.

24. Pohyby přímočaré vyšších stupňů.

Kdybychom ve vztahu $\bar{v} = f(t)\bar{i}$, nebo jemu odpovídajícím $\bar{a} = \dfrac{df(t)}{dt}\bar{a}^0 = \varphi(t)\bar{i}$, kladli za $f(t)$ funkci vyššího stupně než lineární, a tedy za $\varphi(t)$ funkci času a nikoli konstantu, došli bychom k přímočarým pohybům nerovnoměrně zrychleným, jichž hodografem by ovšem byla vždy přímka. Kdyby na př. zrychlení rostlo úměrně s časem, t. j. $\varphi(t) = pt + q$, bylo by $\ddot{s} = pt + q$, $\dot{s} = \tfrac{1}{2}pt^2 + qt + v_0$, $s = \tfrac{1}{6}pt^3 + \tfrac{1}{2}qt^2 + v_0t + s_0$. Patrně by bylo $\bar{a} = p\bar{i}$. V tomto smyslu mluvívá se někdy o zrychlení vyšších stupňů. Pohyby těchto typů se však v matematickém zpracování přírodních zjevů vyskytují velmi zřídka.

Zvláště pak nebývá velikost zrychlení dána jakožto funkce času, nýbrž zpravidla jakožto funkce polohy pohyblivého bodu, takže integrace pohybové rovnice přestává býti tak naprosto jednoduchou jako zde. Zrychlení vyšších stupňů mají význam hlavně matematický. Větší pozornost jim věnují *Résal*, *Schell* a *Somow*.

25. Stejnoměrný pohyb kruhový.

Podobně jako jsme studovali jednoduché případy pohybů, vycházejíce z rovnic (14c) a (18c), můžeme postupovati na základě rovnic (16a) resp. (19b). Klademe-li v ní $\dot{\varphi} = 0$, obdržíme $\bar{v} = v\bar{\tau} = \dot{r}\bar{\varrho}$. Za stálého $\bar{\varrho}$ (a $\bar{\varrho}$ je stálé, neboť $\dot{\bar{\varrho}} = \dot{\varphi}\bar{\varphi} = 0$) vzniká pohyb *přímočarý, radiální*, a to je-li $\dot{r} = c$, rovnoměrný, radiální zrychlení a_ϱ jest dle (19b) nulou. Je-li $\dot{r} = a_0 t + c_0$, je pohyb radiální rovnoměrně zrychlený, $\bar{a}_\varrho = a_0\bar{\varrho}$, radiální zrychlení jest stálé. Tedy nic nového.

Je-li však v (16a) $\dot{r} = 0$, tedy $r = r_0 =$ stálé, je rychlost postupná

$$\bar{v} = r_0\dot{\varphi}\bar{\varphi}, \tag{a}$$

nemá radiální složky a stojí stále kolmo na průvodiči. Vzniká *obecný pohyb kruhový*. Nejjednodušší jeho typ mimo kinematicky nezajímavý případ klidu ($\dot{\varphi} = 0$) nastává, je-li úhlová rychlost stálá,

$$\dot{\varphi} = \omega = \text{stálé}, \qquad \varphi = \omega t + \varphi_0. \tag{b}$$

Pak také postupná rychlost $\bar{v} = r_0\omega\bar{\varphi}$ je co do velikosti stálá,

$$v = r_0\dot{\varphi} = r_0\omega, \tag{c}$$

ale ovšem neustále mění svůj směr $\bar{\tau} = \bar{\varphi}$, jenž jest směrem tečné ke kruhové dráze. Kruh poloměru r_0 se obíhá stálou rychlostí postupnou i úhlovou, nastává stejnoměrná revoluce pohyblivého bodu kolem bodu vztažného, *stejnoměrný pohyb kruhový*.

Při rovnoměrném pohybu v přímce bylo zrychlení $\bar{a}$ rovno nule; při stejnoměrném pohybu kruhovém jest však dle (19b) pouze transversální, v dráze ležící složka $\bar{a}_\varphi$ rovna nule, kdežto *zrychlení radiální je konečné a stálé*

$$\bar{a} = \bar{a}_\varrho = - r_0\omega^2\bar{\varrho} = - \frac{v^2}{r_0}\bar{\varrho}, \tag{d}$$

směřujíc trvale do středu kruhu a nazývá se proto *zrychlením středoběžným čili centripetálním*. To znal již *Huygens*. Právě pojem rychlosti jakožto vektoru nezbytně vede k tomu, že musí existovati zrychlení, má-li nastati pohyb kruhový, byť i velikost rychlosti se neměnila; *zrychlení, stojíc stále kolmo na směru rychlosti*, způsobuje zde právě pouze změnu *směru* rychlosti.

Právě tuto okolnost $\bar{a} \perp \bar{v}$ mohli bychom považovati za význačnou pro pohyb kruhový.

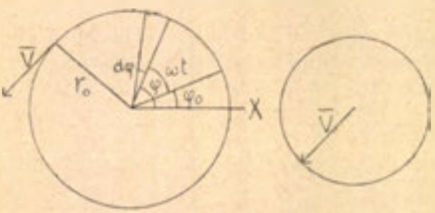
Dobu T, za kterou se oběhne celý kruh jednou dokola, nazýváme *dobou oběžnou* nebo *dobou jedné periody, periodou, dobou kmitovou*. Setkávámeť se ve stejnoměrném pohybu kruhovém s prvým příkladem čistého *pohybu periodického*, takového,

který vždy po uplynutí jistého času, periody T, se znovu týmž způsobem opakuje. Pohyby periodické jsou pro fysiku největší důležitosti. Dle hořejší definice a vztahu (b) je $\varphi + 2\pi = \omega(t + T) + \varphi_0$, čili po odečtení ($b$)

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{a} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi N, \quad \text{je-li} \quad N = \frac{1}{T}. \qquad (e)$$

Veličina N rozměru $[T^{-1}]$ udává patrně počet úplných oběhů nebo počet period za jedničku časovou. Tento počet za jednu vteřinu budeme důsledně nazývati **kmitočtem**; veličina ω, **úhlová rychlost**, udává zároveň počet oběhů za 2π vteřin a nazývá se někdy **kruhovou či cyklickou frekvencí**, ač pregnantního názvu **frekvence** užívá se většinou pro kmitočet. Není dosud úplné shody v pojmenování v různých dílech fysikálních a elektrotechnických; krátký název pro ω byl by velmi výhodným. Elektrotechnikové označují frekvenci na př. $50\frac{1}{sec}$ značkou $50\frac{\infty}{sec}$.

Úhel φ měříme v umluveném smyslu (jako koordinatu polární od osy $\bar{\imath}$ směrem k $\bar{\jmath}$, proti ručičkám hodinovým) od jisté základní polohy poloměru. Charakterisuje místo, ve kterém se pohyblivý bod v daném okamžiku nalézá a nazývá se **fáze** pohybu. Rozdíl $\varphi_1 - \varphi_2$ mezi dvěma současnými polohami u dvou pohyblivých bodů nebo dvou pohybů nazýváme **fázovým rozdílem**, **fázovou diferencí**. Úhel φ_0, **zvaný fázovou konstantou**, charakterisuje polohu pohyblivého bodu v čase $t = 0$. Máme-li pohyby $\varphi_1 = \omega t + \varphi_0$ a $\varphi_2 = \omega t$, říkáme úhlu φ_0 fázový rozdíl, nebo také se vyjadřujeme, že prvý pohyb je o φ_0 ve fázi napřed — je-li $\varphi_0 < 0$, záporné, ve fázi pozadu, zpožděn. Fázovou diferenci φ_0 místo úhlem v obloukové míře můžeme vyjádřit časem t_0, o který onen pohyb začal u základní polohy dříve (či později) než druhý. I jest pak



Obr. 26.

$$\varphi_0 = \omega t_0 = 2\pi \frac{t_0}{T} \quad \text{a} \quad \varphi = \frac{2\pi}{T}(t + t_0). \qquad (f)$$

Říkáme pak: Pohyb jest napřed o půl doby kmitové, zpožděn o čtvrt doby kmitové atd.

Hodografem stejnoměrného pohybu kmitového jest zase kruh poloměru $r_0\omega$. Korespondující body jsou na hodografu posunuty o 90^0 ve směru pohybu, či jsou ve fázi napřed o $\frac{\pi}{2}$ či o čtvrt periody.

Plošná rychlost tohoto pohybu

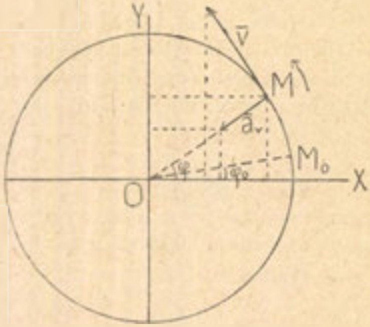
$$\dot{S} = \tfrac{1}{2}[r\bar{v}] = \tfrac{1}{2}r_0^2\dot{\varphi}[\bar{\varrho}\bar{\varphi}] = \tfrac{1}{2}r_0^2\omega[\bar{\varrho}\bar{\varphi}] = \tfrac{1}{2}r_0^2\bar{\omega}$$

jest ovšem stálá, jak je zde na prvý pohled patrno, podobně jako u stejnoměrného pohybu přímočarého.

26. Pohyb harmonický.

Dosadíme-li do rovnic (19 a) a (16 c) $\dot{r} = 0$, $\dot{\varphi} = \omega$ a integrujeme-li poslední rovnice, obdržíme z rovnoměrného pohybu kruhového

$$\left.\begin{aligned} a_x &\equiv \ddot{x} = -r_0\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) \\ a_y &\equiv \ddot{y} = -r_0\omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0) \\ v_x &\equiv \dot{x} = -r_0\omega \sin(\omega t + \varphi_0) \\ v_y &\equiv \dot{y} = +r_0\omega \cos(\omega t + \varphi_0) \\ x &= r_0 \cos(\omega t + \varphi_0) \\ y &= r_0 \sin(\omega t + \varphi_0) \end{aligned}\right| \quad (a)$$



Obr. 27.

Tytéž vztahy mohli jsme přímo odečísti z geometrického znázornění v obr. 27. Dosadíme-li ještě výrazy pro x a y do a_x a a_y, plyne

$$\ddot{x} = -\omega^2 x, \quad \ddot{y} = -\omega^2 y. \quad (b)$$

Pohyby průmětu pohyblivého bodu po libovolně položených osách jsou tedy téhož nového typu, který nazýváme jednoduchým pohybem harmonickým. Je charakterisován tím, že zrychlení je stále úměrno okamžité vzdálenosti od středu O, směřujíc vždy k němu.

Již ze vzniku pohybu harmonického jakožto průmětu stejnoměrného pohybu kruhového je patrno, že se jedná o pohyb periodický, za něhož po uplynutí periody

$$T = 2\pi : \omega \quad (c)$$

nastává vždy znovu a znovu stav úplně totožný. Pohyblivý bod provádí harmonické kmity na přímce po obou stranách středu, nebo jak se chceme jinak vyjadřovat, rovnovážné polohy O. Jest to ona poloha, v níž na pohyblivý bod nepůsobí žádné zrychlení.

Pojednáme o harmonickém kmitání poněkud zevrubněji, poněvadž se s ním setkáváme ve všech oborech fysiky velmi často. Vyskytujeť se alespoň jakožto prvé přiblížení všude tam, kde vzniká zrychlení s, do rovnovážné polohy směřující, výchylkou s z ní, takže pro $s = 0$ je $\ddot{s} = 0$. Zrychlení samo jest jistě jakousi funkcí $f(s)$ této výchylky. Rozvineme-li ji dle řady Mac-Laurinovy, můžeme psáti

$$\ddot{s} = f(s) = f_0(s) + \left(\frac{df}{ds}\right)_0 s + \left(\frac{d^2f}{ds^2}\right)_0 \frac{s^2}{2} + \left(\frac{d^3f}{ds^3}\right)_0 \frac{s^3}{2.3} + \ldots$$

Indexy 0 značí, že dosazujeme do derivací, které bychom mohli vytvořiti, kdybychom opravdu funkci f znali, hodnotu $s = 0$, takže uzávorkované výrazy jsou konstantami. Dle predpokladu je $f_0(s) = 0$. Jedná-li se o výchylky velice malé, můžeme v prvém přiblížení všechny vyšší mocniny jejich zanedbati, druhou počínaje; klademe-li ještě konstantu $\left(\frac{df}{ds}\right)_0 = -\omega^2$, vzniká jakožto přibližný popis pohybového stavu

$$\ddot{s} = -\omega^2 s,$$

to jest právě jednoduchý pohyb harmonický.

Vyjděme z obecného vztahu pro harmonický pohyb v přímce stálého směru $\bar{s}^0$; jest

$$\ddot{\bar{s}} = -\omega^2 \bar{s} \quad \text{nebo} \quad \ddot{s} = -\omega^2 s. \qquad (d)$$

Druhá, pouze k velikosti se vztahující, rovnice plyne z prvé, násobíme-li ji jedničkovým vektorem $\bar{s}^0$. Vyhovují jí, jak se můžeme přesvědčiti diferenciací, funkce $\sin \omega t$ a $\cos \omega t$. Ježto jest to homogenní, lineární rovnice diferenciální, jest integrálem též

$$s = A \sin \omega t + B \cos \omega t. \qquad (e)$$

Tento integrál jest obecný, ježto obsahuje dvě nezávislé integrační konstanty A a B. Na tvar obdobný (a) lze jej převést tímto často užívaným obratem:

Pišme

$$s = \sqrt{A^2 + B^2}\left[\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \sin \omega t + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} \cos \omega t\right],$$

kde znamení odmocniny budiž kladné. Položme

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} = \cos \varphi_0, \quad \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} = \sin \varphi_0, \quad \text{tedy} \quad tg \varphi_0 = \frac{B}{A},$$

což je dovoleno, neboť každý ze zlomků jest menší než 1 a součet jejich čtverců jest roven 1. Píšeme-li ještě $\sqrt{A^2 + B^2} = s_m$, lze psát dle známé trigonometrické poučky

$$s = s_m \sin(\omega t + \varphi_0), \qquad (f)$$

což jest s (e) rovnocenný jiný tvar obecného integrálu s konstantami integračními s_m a φ_0. Kdybychom chtěli současně vyznačiti směr přímky, v níž kmity se dějí, psali bychom obdobně

$$\bar{s} = \bar{s}_m \sin(\omega t + \varphi_0), \qquad (g)$$

což je integrál prvé, vektorové rovnice (d). Podobně jsme mohli dojít ku tvaru $s = s_m \cos(\omega t + \varphi_0)$, kdybychom nahoře byli kladli místo $\cos \varphi_0$ funkci $-\sin \varphi_0$, za $\sin \varphi_0$ pak $\cos \varphi_0$. Uvádíme zde tyto elementární věci jen proto, abychom je čtenáři připomněli; ve fysikálních výpočtech se podobných obratů často užívá.

Definitivní tvar integrálu závisí na podmínkách problému: s_m respektive r_0 v (a) jest největší hodnota, které může nabýti výchylka pohyblivého bodu z rovnovážné polohy, čili t. zv. amplituda kmitová nebo rozkmit. Okamžitou vzdálenost kmitajícího bodu od O zveme elongací, výchylkou.

Procházel-li pohyblivý bod v čase $t = 0$ právě rovnovážnou polohou $s = 0$, je v (e) $0 = B$, $s = A \sin \omega t$, v (f) pak $0 = \sin \varphi_0$, $\varphi_0 = 0, \pi, 2\pi \ldots$. Jest tudíž $A = \pm s_m$. Ve tvaru $s = s_m \cos(\omega t + \varphi_0)$ vede $t = 0$, $s = 0$ k $\varphi_0 = \pm\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots$ tedy $s = s_m \cos(\omega t \pm \frac{\pi}{2})$ čili zase $s = \pm s_m \sin \omega t$.

O znamení musíme rozhodnouti dle toho, děje-li se průchod rovnovážnou polohou z leva v pravo či naopak. ze znamení rychlosti $\dot{s}$.

Napišme rovnice harmonického pohybu znovu, kladouce dle (c) $\omega = 2\pi : T$,

$$s = s_m \sin \frac{2\pi}{T} t, \qquad v \equiv \dot{s} = s_m \omega \cos \frac{2\pi}{T} t, \qquad a \equiv \ddot{s} = -s_m \omega^2 \sin \frac{2\pi}{T} t, \quad (h)$$

a popišme harmonický pohyb.

V okamžiku $t = 0$ bod prošel rovnovážnou polohou na př. z prava v levo (v obr. 27 bychom měřili φ od osy OY proti ručičkám hodinovým). V rovnovážné poloze má rychlost největší $v = s_m \omega$ a pohybuje se v jejím nejbližším okolí téměř rovnoměrně, ježto zrychlení a je malé, přesně v rovnovážné poloze vůbec žádné. Nadále zrychlení, působící proti pohybu ($a < 0$) roste, rychlost s klesajícím kosinusem klesá, až v okamžiku $t = \frac{1}{4} T$ se stala rovnou nule. Bod se zastaví v nejzazší poloze na levo ($s = s_m$), odkud se začne vracet. Jeho rychlost má nyní směr záporný, roste (zrychlení $a < 0$ má nyní směr rychlosti), až dosáhne znovu maxima $v = -s_m \omega$ při průchodu polohou rovnovážnou z leva na pravo v čase $t = \frac{1}{2} T$. Totéž opakuje se při polokmitu v pravo a zpět. Vše to lze sledovati názorně také na průmětu pohybu kruhového*). Mezi dvěma po sobě následujícími nejzazšími polohami bodu leží polovina doby kmitové, stejně jako mezi dvěma průchody rovnovážnou polohou. Mezi dvěma průchody týmž směrem libovolnou polohou leží celá doba kmitová. Ježto kmitová doba nezávisí na amplitudě, mluvíme o isochronismu harmonických kmitů.

Velmi často se ve fysice i vědách aplikovaných setkáváme s časovým rozvinutím kmitavých pohybů. Mysleme si, že pod kmitajícím bodem se pohybuje rovnoměrně a kolmo ke směru kmitání papír, na němž bod zanechává viditelnou stopu. Vznikne diagram, na němž abscisy rovnoběžné se směrem pohybu papíru měří čas, ordináty pak, měřené od polohy rovnovážné, udávají okamžité elongace. Jednoduchému pohybu harmonickému odpovídá sinusoida (kosinusoida), jejíž všechny ordináty jsou násobeny amplitudou kmitovou. Příklady máme v ladičkovém chronografu, ve fotografickém nebo visuelním oscilografu a pod. U Edisonova fonografu jsou pružností membrány a tvrdostí záznamné látky modifikované ordináty kolmy na ploše záznamné.

---

*) Toho užívají elektrotechnikové, znázorňujíce veličiny harmonicky proměnlivé. jako jimi operují při zjevech střídavého proudu t. zv. rotujícími vektory. Jsou to trati, vedené ze středu O, jichž délka se rovná amplitudě veličiny a které tvoří s jistým pevným směrem, na př. OX, úhel rovný fázové konstantě φ_0. Tyto trati, myslí se pak, jakoby se otáčely se stálou rychlostí úhlovou ω kolem O, takže jejich průměty na směr OX dávají okamžité hodnoty veličin, které znázorňují. Tak na př. by v obr. 27 znázorňoval „rotující vektor" OM_0 veličinu $r_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$. Jest to proto pohodlné, poněvadž, jak uvidíme, za téhož ω se rotující vektory skládají zcela stejně, jako naše obyčejné vektory.

Základní rovnici (d) harmonických kmitů lze integrovati jiným způsobem, který má hlubší význam, o němž se později dozvíme, a kterého lze použíti u všech pohybů typu $\ddot s = f(s)$. Násobíce obě strany $\dot s$, obdržíme

$$\dot s \ddot s = f(s)\,.\,\dot s, \quad \text{čili} \quad \frac{d}{dt}\left(\tfrac12 \dot s^2\right) = f(s)\frac{ds}{dt},$$

takže po násobení obou stran dt a integraci

$$\tfrac12 \dot s^2 = \int f(s)\,ds + \tfrac12 v_0^2.$$

Integrační konstantu, která má rozměr čtverce rychlosti, psali jsme zde $\frac12 v_0^2$. Píšeme-li za funkci s

$$\int f(s)\,ds = -V(s), \quad \text{plyne} \quad \frac{ds}{dt} = \dot s = \sqrt{v_0^2 - 2V(s)},$$

čili

$$t = \int_0^t dt = \int_{s_0}^s \frac{ds}{\sqrt{v_0^2 - 2V(s)}},$$

je-li v čase $t = 0$, $s = s_0$.

V našem případě $f(s) = -\omega^2 s$, $-V(s) = \int f(s)\,ds = -\frac12 \omega^2 s^2$

$$t = \int_{s_0}^s \frac{ds}{\sqrt{v_0^2 - \omega^2 s^2}} = \frac{1}{\omega}\int_{s_0}^s \frac{d\left(\frac{\omega}{v_0}s\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{v_0}s\right)^2}} = \frac{1}{\omega}\,arc\,sin\,\frac{\omega}{v_0}s,$$

čili

$$s = \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t + \varphi_0).$$

Integrační konstanta v_0 jest patrně rychlost pohyblivého bodu pro $s = 0$.

27. Skládání harmonických pohybů v téže přímce.

Má-li jeden a týž bod z různých příčin vykonávati současně různé harmonické pohyby v téže přímce, jest jeho pohyb výsledný často velmi složitý. Jsou-li jednotlivé pohyby dány určujícími rovnicemi

$$\ddot s_1 = -\omega_1^2 s_1, \quad \ddot s_2 = -\omega_2^2 s_2, \ldots$$

jest výsledné zrychlení dáno vektorovým součtem

$$\ddot{\bar s} = \ddot s \bar s^0 = \Sigma \ddot{\bar s}_\nu = \bar s^0 \Sigma \ddot s_\nu, \quad \text{tedy} \quad \ddot s = \Sigma \ddot s_\nu.$$

Rovněž výsledná rychlost jest

$$\dot{\bar s} = \dot s \bar s^0 = \Sigma \dot{\bar s}_\nu = \bar s^0 \Sigma \dot s_\nu \quad \text{čili} \quad \dot s = \Sigma \dot s_\nu.$$

Násobíme-li poslední rovnici dt a integrujeme, je

$$ds = d\Sigma s_\nu \quad \text{a} \quad s = \Sigma s_\nu. \qquad (a)$$

Integrační konstanta jest rovna nule, neboť kdyby na pravé straně veškerá s_ν byla rovna nule, musí také levá strana býti nulou. Poslední vztah je nejčastějším zvláštním případem důležitého principu interference, jehož obecný tvar zní

$$\bar r = \Sigma \bar r_\nu, \qquad (a')$$

kde posunutí neleží v téže přímce, nýbrž mají libovolné směry v prostoru. Dle něho sčítají se posunutí různých, témuž hmotnému bodu příslušných, současných pohybů. Jest totožný s principem superposice současných

rychlostí (§ 15), neboť potřebujeme pouze rychlosti násobiti týmž elementem časovým dt, abychom obdrželi nekonečně malá posunutí.

Rozepíšeme-li (*a*) dle (26*f*), máme

$$s = \Sigma s_{m\nu} \sin(\omega_\nu t + \varphi_\nu) = \Sigma s_{m\nu}(\sin\omega_\nu t . \cos\varphi_\nu + \cos\omega_\nu t . \sin\varphi_\nu). \qquad (b)$$

V obecném případě nelze tento výraz dále zjednodušiti. Přehlednějším je pak **řešení grafické** časovým rozvinutím kmitů, v němž výslednou křivku diagramatickou snadno získáváme součtem okamžitých ordinát. V akustice bývá nejčastějším případem, že poměry frekvencí a tedy jednotlivých ω_ν jsou dány poměry celkem malých celistvých čísel. Pak ucho rozkládá při dodatečné amplitudě jednotlivých složek kmity, různým kmitočtům příslušné, v tolikéž různých pocitů — tónů. Lidské oko je skládá vždy v pocit jediný — složenou barvu.

Na tomto místě sluší připojiti poznámku, že **libovolná periodická funkce** $s = f(t)$ dá se rozložiti na řadu periodických kmitů takových, že $\omega_\nu = \nu\omega$, čili

$$s = f(t) = s_{m0} + s_{m1} \sin(\omega t + \varphi_1) + s_{m2} \sin(2\omega t + \varphi_2) + \ldots s_{m\nu} \sin(\nu\omega t + \varphi_\nu). \qquad (c)$$

Tato řada nazývá se **Fourierovou** a nauka, její theorií a praxí se zabývající, **harmonickou analysou**.

Jednoduchý, leč přes to v praxi velmi častý případ nastává, je-li $\omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_\nu = \omega$, kdy se tedy jedná o skládání kmitů téže frekvence v téže přímce. Pak lze (*b*) přepsati na

$$s = \sin\omega t . \Sigma s_{m\nu} \cos\varphi_\nu + \cos\omega t . \Sigma s_{m\nu} \sin\varphi_\nu = A \sin\omega t + B \cos\omega t. \qquad (d)$$

Jak je patrno ze srovnání se (26*e*), je výsledný kmit jednoduchý harmonický téže frekvence.

$$s = s_m \sin(\omega t + \varphi_0). \qquad (e)$$

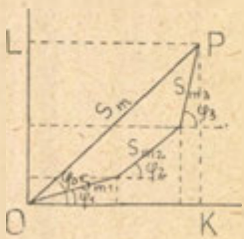
Čtverec výsledné amplitudy nalezneme dle předpisu předchozího § 26 jakožto

$$s_m^2 = (\Sigma s_{m\nu} \cos\varphi_\nu)^2 + (\Sigma s_{m\nu} \sin\varphi_\nu)^2 \qquad (f)$$

a výslednou konstantu fázovou φ_0 z

$$tg\,\varphi_0 = \frac{\Sigma s_{m\nu} \sin\varphi_\nu}{\Sigma s_{m\nu} \cos\varphi_\nu}. \qquad (g)$$

Tento obecný výsledek lze si znázorniti graficky pomocí sčítání „rotujících" vektorů, jak je beze slov patrno z obrazce, v němž pouze pro přehlednost jsou jednotlivé kmity číslovány dle vzrůstajících φ_ν. Na pořadu jinak nezáleží. Délka OK dává veličinu A, podobně OL veličinu B, takže OP jest výslednou amplitudou s_m, úhel $\sphericalangle KOP$ pak výslednou fázovou konstantou φ_0. Konstrukce tato nese jméno **mnohoúhelník (polygon) amplitud**.



Obr. 28.

Jest z něho přímo viděti: Složením libovolně mnoha harmonických pohybů v téže přímce, mají-li touž periodu i fázovou kon-

stantu, obdržíme tedy zase jednoduchý harmonický pohyb téže periody a fázové konstanty, jehož amplituda se rovná součtu amplitud jednotlivých. Z (*g*) plyne stejně pro $\varphi_\nu = \varphi$, $\nu = 1, 2, \ldots$ $s_m = \Sigma s_{m\nu}$, $\varphi_0 = \varphi$.

Jedná-li se pouze o dva kmity, jest také obecné analytické vyjádření velmi jednoduché. Dosazením jest totiž

$$s^2_m = s^2_{m1} + s^2_{m2} + 2 s_{m1} s_{m2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1). \qquad (h)$$

Výsledná amplituda jest maximální a rovna součtu absolutních hodnot $|s_m| = |s_{m1}| + |s_{m2}|$ pro $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = +1$, tedy fázovou diferenci $\varphi_2 - \varphi_1 = 0, \pm 2\pi, \ldots \pm 2k\pi$, minimální, rovná rozdílu absolutních hodnot $|s_{m1}| - |s_{m2}|$ pro $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = -1$, tedy $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm\pi, \pm 3\pi, \ldots \pm(2k+1)\pi$. Jsou-li amplitudy obou kmitů stejně veliké, vzniká složením obou pohybů klid, pohyblivý bod zůstává trvale v poloze rovnovážné.

Vztah (*h*) je základní pro zjevy interference světla.

28. Záchvěvy čili rázy.

Dávno je z akustické praxe znám případ, že bod má vykonávati dva současné harmonické pohyby v téže přímce, jichž frekvence se liší o malý zlomek. Vezměme nižší ω za základní, a druhou vyšší označme $\omega + \Delta\omega$. Poloha kmitajícího bodu jest dle (27 *b*) dána vzdáleností od rovnovážné polohy

$$s = s_{m1} \sin \omega t + s_{m2} \sin(\omega + \Delta\omega) t.$$

Psali jsme znamení + a nezavedli žádný fázový rozdíl mezi oběma kmity. Uvidíme ihned, že se tím obecnosti nestala újma. Klademe prostě $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \Delta\omega \,.\, t$.

Výsledný pohyb bude podobný harmonickému, ale v jeho výraze

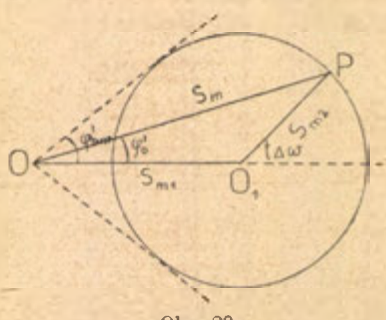
$$s = s'_m \sin(\omega t + \varphi'_0) \qquad (a)$$

bude jak s'_m tak φ'_0 proměnlivé s časem, což jsme právě označili čárkováním.

Ze vzorce (27 *h*) nebo ještě živěji z trojúhelníka amplitud (obr. 29) vidíme, že výsledná amplituda v okamžiku *t* je dána

$$s'^2_m = s^2_{m1} + s^2_{m2} + 2 s_{m1} s_{m2} \cos(\Delta\omega \,.\, t), \qquad (b)$$

takže v čase $t = 0$ je s'_m maximální, rovno $|s_{m1}| + |s_{m2}|$, v čase $t = \frac{\pi}{\Delta\omega}$ minimální, rovno $|s_{m1}| - |s_{m2}|$, v čase $t = \tau = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$ opět maximální atd. Mezi dvěma maximy nebo minimy leží doba τ, rovná periodě (kmitové době) harmonického pohybu o kruhové frekvenci $\Delta\omega$. V této době vykoná pomalejší složka $\frac{\tau\omega}{2\pi}$ kmitů, rychlejší pak $\frac{\tau(\omega + \Delta\omega)}{2\pi}$ kmitů, tedy právě o jeden celý kmit více.



Obr. 29.

Je-li $s_{m1} = s_{m2}$, je maximální amplituda $2s_{m1}$, minimální rovná nule. V okamžiku t pak obecně $s'_m = 2s_{m1} \cdot \cos\frac{\Delta\omega}{2}t$, jak je nejlépe viděti z příslušného trojúhelníka amplitud, v němž bod P pomalu krouží kolem O_1.

Pro proměnlivou fázovou diferenci φ'_0 v (a) dostáváme z (27 g) obecně

$$tg\,\varphi'_0 = \frac{s_{m2}\sin\Delta\omega . t}{s_{m1} + s_{m2}\cos\Delta\omega . t}. \qquad (c)$$

Zase je z obrazce nejlépe patrno, že v $t.\Delta\omega = 0$ je nulou, dospěje k maximu φ'_m, klesne na nulu za $t.\Delta\omega = \pi$, klesne na minimum (záporné maximum) — φ'_m, pak zase na nulu a pod. dále.



Obr. 30.

Časový rozvoj tohoto kmitání znázorňuje pro $s_{m1} = s_{m2}$ přibližně obrazec 30. Slyšíme-li kmity větších amplitud jakožto tón, činí tento zjev dojem tónu slábnoucího a znovu se sesilujícího, slyšíme z á c h v ě v y neboli r á z y (battements), a to v počtu $\frac{1}{\tau} = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = N_2 - N_1$ za vteřinu; N_2 a N_1 jsou kmitočty rychlejších a pomalejších kmitů.

29. Skládání harmonických pohybů v rovině a prostoru. Obecné kmitání harmonické.

Viděli jsme v rovnicích (26a), že lze rovnoměrný pohyb kruhový rozložiti na dva navzájem kolmé (v osách $\bar{\imath}$ a $\bar{\jmath}$) jednoduché pohyby harmonické téže frekvence a amplitudy a se vzájemnou fázovou diferencí $\frac{1}{2}\pi$. Ovšem také naopak složením takovýchto dvou pohybů vzniká pohyb kruhový.

Leč jest nám řešiti nejobecněji otázku tuto: Témuž bodu příslušejí harmonické pohyby různých amplitud, frekvencí a fázových konstant v různých směrech p r o s t o r u. Jaký bude pohyb výsledný? Jedinou odpovědí jest obecný princip interference $\bar{r} = \Sigma\bar{r}_\nu$, dle něhož se skládají složková okamžitá posunutí jakožto vektory v posunutí výsledné. Písmenou s chtěli jsme dříve označiti na prvý pohled patrně, že se dějí všechny elongace v téže přímce. Ježto zde tomu tak není, píšeme za elongaci z rovnovážné polohy O (0,0,0) písmenu r, jako u posičních vektorů. Obdobně s (27 b) máme

$$\bar{r} = \Sigma\bar{r}_{m\nu}\sin(\omega_\nu t + \varphi_\nu), \qquad (a)$$

kde však nyní nastupuje součet vektorový na místo algebraického.

Kdyby veškeré pohyby byly téže frekvence a téže fáze, mohli bychom trigonometrickou funkci vytknouti před znamení součtu a obdrželi bychom výsledný pohyb harmonický v přímce $\bar{r} = \bar{r}_m \sin(\omega_v t + \varphi_v)$, kde výsledná amplituda $\bar{r}_m = \Sigma \bar{r}_{mv}$.

Úlohu obecnou můžeme převésti na jinou: Jaký bude výsledný pohyb, skládáme-li tři různé pohyby harmonické ve třech na sobě kolmých směrech?

Můžeme totiž každý jednotlivý složkový pohyb

$$\bar{r}_v = \bar{r}_{mv} \sin(\omega_v t + \varphi_v)$$

nahraditi semikartézsky

$$\bar{r}_v = \bar{i}x_v + \bar{j}y_v + \bar{k}z_v = \bar{i}x_{mv} \sin(\omega_v t + \varphi_v) + \bar{j}y_{mv} \sin(\omega_v t + \varphi_v) + \\ + \bar{k}z_{mv} \sin(\omega_v t + \varphi_v)$$

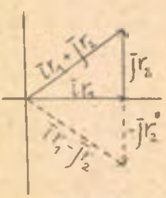
třemi harmonickými pohyby téže fáze a frekvence podél jednotlivých os, jichž amplitudy jsou průměty amplitudy dané.

Když tak učiníme se všemi složkovými pohyby, můžeme pak složiti vždy pro sebe veškeré pohyby v ose $\bar{i}$, v ose $\bar{j}$ a v ose $\bar{k}$ dle § 27, na př. jsou-li všechny téže frekvence, pomocí mnohoúhelníka amplitud a zbývá nám pak jen složiti tyto tři výsledné složky, abychom obdrželi žádaný pohyb výsledný.

Tak všeobecná úloha neskýtá přehledného řešení. Proto se omezíme na případ jednodušší, a to skládání dvou harmonických pohybů téže frekvence; dějí se ovšem v rovině jejich směry proložené, kterou volíme za rovinu $|\bar{i}\bar{j}|$. Amplituda pohybu v ose $\bar{i}$ budiž r_1, fázová konstanta $\varphi_1 = 0$, podobně v ose $\bar{j}$ amplituda r_2, fázová konstanta $\varphi_2 = \varphi_0$. Všeobecnosti se tím újma nestala, neboť fázovou konstantu φ_1 jsme mohli učiniti nulou vhodnou volbou okamžiku, od něhož začínáme počítati čas. Pro výsledek rozhodující jest pouze fázová diference pohybů $\varphi_2 - \varphi_1 = \varphi_0$. Dle principu interference je výsledný pohyb

$$\bar{r} = \bar{i}x + \bar{j}y = \bar{i}r_1 \sin \omega t + \bar{j}r_2 \sin(\omega t + \varphi_0). \qquad (b)$$

Kdybychom stejně, jako ovládáme obyčejnou geometrii analytickou, znali geometrii vektorovou, nepotřebovali bychom mnoha dalších úvah. Věděli bychom, že rovnice (b) značí elipsu. Takto vidíme pouze, že výsledný pohyb se děje v rovině a budeme jej dále diskutovati, počínajíce jednoduchými případy zvláštními.



Obr. 31.

1. Je-li $\varphi_0 = 0$, resp. π, 2π, ... děje se pohyb v přímce (obr. 31)

$$\bar{r} = (\bar{i}r_1 \pm \bar{j}r_2) \sin \omega t = \bar{r}_m \sin \omega t, \text{ kde } |\bar{r}_m|^2 = r_1^2 + r_2^2. \qquad (c)$$

To ostatně již víme z případu nejobecnějšího.

2. Je-li $\varphi_0 = \pm \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$, je dráha dána rovnicí

$$\bar{r} = \bar{i}x + \bar{j}y = \bar{i}r_1 \sin \omega t \pm \bar{j}r_2 \cos \omega t. \qquad (d)$$

To je rovnice elipsy o poloosách r_1 a r_2, vztažená k hlavním osám. Znamení u druhého členu rozhoduje pouze o směru oběhu podél ní. Jeť rovnice (d) přímým návodem k známé konstrukci elipsy, jak je nastíněna obr. 32. Postup AC odpovídá kladnému, postup $A'C'$

zápornému znamení druhého členu pravé strany při vzrůstajícím ωt. Pro $t=0$ je

$$\bar{r} = \pm \bar{\jmath} r_2, \text{ pro } t = \frac{\pi}{2} \text{ pak } \bar{r} = \bar{\imath} r_1.$$

Jinak můžeme z rovnic, ve které se rozpadá (d), totiž

$$x = r_1 \sin \omega t, \qquad y = \pm r_2 \cos \omega t,$$

vyloučiti proměnlivý úhel ωt povýšením na čtverec a sečtením a obdržíme rovnici dráhy v kartézských souřadnicích

$$\frac{x^2}{r_1^2} + \frac{y^2}{r_2^2} = 1. \qquad (e)$$



Obr. 32.

Rovnice vektorová dává však též směr oběhu. Když $r_1 = r_2$, vznikne stejnoměrný pohyb kruhový

$$\bar{r} = \bar{\imath} x + \bar{\jmath} y = \bar{\imath} r_1 \sin \omega t \pm \bar{\jmath} r_1 \cos \omega t. \qquad (f)$$

Došli jsme tedy opačnou cestou k výsledku témuž, jako v § 26.

Rychlost a zrychlení při pohybu v elipse jest

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \dot{\bar{r}} = \bar{\imath} \omega r_1 \cos \omega t + \bar{\jmath} \omega r_2 \sin \omega t \\ \bar{a} &= \ddot{\bar{r}} = -\bar{\imath} \omega^2 r_1 \sin \omega t + \bar{\jmath} \omega^2 r_2 \cos \omega t = -\omega^2 \bar{r}. \end{aligned} \qquad (g)$$

Všechny tyto veličiny $\bar{r}$, $\bar{v}$, $\bar{a}$ obdržíme ze stejnoměrného pohybu kruhového (f), když vektorové složky, rovnoběžné s osou $\bar{\jmath}$, násobíme stálým faktorem $\frac{r_2}{r_1} = \cos \alpha$. Geometricky řečeno: Máme-li stejnoměrný pohyb kruhový v rovině OXY' (nebo $[\bar{\imath}\bar{\jmath}']$), která svírá s rovinou OXY (nebo $[\bar{\imath}\bar{\jmath}]$) úhel α, takže $\cos(Y'OY) = \bar{\jmath}\bar{\jmath}' = \cos \alpha$, a promítneme-li jej do této roviny, vzniká popisovaný námi pohyb eliptický, neboť jest průmět rychlosti (i zrychlení) roven rychlosti (zrychlení) průmětu. Ježto promítnutý pohyb zachovává základní vztah $\bar{a} = -\omega^2 \bar{r}$, nazýváme jej **harmonickým pohybem** v elipse, jako jest dle rovnice $(25d)$ stejnoměrný pohyb kruhový **harmonickým pohybem v kruhu**.

Jak vidíme ze vztahů (g), nebo ještě názorněji z obrazu průmětu, kolísá rychlost v dráze eliptického harmonického pohybu mezi hodnotami ωr_1 na koncích malé osy a ωr_2 na koncích osy velké, kdež se pohybuje nejpomaleji. Je-li $\alpha = 90^0$, když tedy eliptický pohyb degeneruje v obyčejný **pohyb harmonický** v přímce, je $r_2 = 0$ a bod se ovšem na koncích pro okamžik zastavuje.

3. Stálý fázový rozdíl φ_0 je libovolný. Rovnice dráhy (b) značí elipsu (i je-li $r_1 = r_2$), jejíž hlavní osy však nespadají v jedno s $\bar{\imath}$ a $\bar{\jmath}$. Poznáme to nejsnáze, vyloučíme-li z obou rovnic, ve které se (b) rozpadá, proměnlivý úhel ωt, rozvedše sinus složeného úhlu. Obdržíme tak rovnici dráhy

$$\frac{x^2}{r_1^2} + \frac{y^2}{r_2^2} - \frac{2xy \cos \varphi_0}{r_1 r_2} = \sin^2 \varphi_0. \qquad (h)$$

Značí obecně elipsu, ježto jest to kuželosečka, která celá probíhá v konečnu. Naše oba dřívější případy jsou v ní jakožto zvláštní obsaženy.

Mohli bychom také přepsat (b) na identické

$$\bar{r} = (\bar{\imath} r_1 + \bar{\jmath} r_2 \cos \varphi_0) \sin \omega t + \bar{\jmath} r_2 \sin \varphi_0 \cos \omega t = \bar{A} \sin \omega t + \bar{B} \cos \omega t. \quad (i)$$

$\bar{A}$ a $\bar{B}$ jsou vektory časově stálé, které obecně nejsou navzájem kolmé. Snadno se přesvědčíme, že $\bar{r}$ vyjádřené (i) vyhovuje obecné rovnici pohybu harmonického

$$\ddot{\bar{r}} = -\omega^2 \bar{r}, \quad (j)$$

jsouc jeho obecným integrálem. Značí elipsu, vztaženou na dva sdružené průměry $2\bar{A}$ a $2\bar{B}$, průměty to dvou navzájem kolmých průměrů kruhu, jehož šikmým průmětem elipsa vznikla. Tak na př. jsou sdruženými poloměry v obr. 32 OA a OB, je-li $OB_1 \perp OA_1$. Že vskutku (i) značí elipsu, poznáme pak fysikálně takto: Byla-li na počátku čítání časového $t = 0$ výchylka pohyblivého bodu z rovnovážné polohy rovna $\bar{r}_0$ a rychlost $\bar{v}_0$, musí $\bar{r}_0 = \bar{B}$ a $\bar{v}_0 = \bar{A}\omega$, takže místo ($i$) lze psát

$$\bar{r} = \frac{\bar{v}_0}{\omega} \sin \omega t + \bar{r}_0 \cos \omega t. \quad (k)$$

Volme pak počátek času $t = 0$ tak, že se bod právě nacházel v největší nebo nejmenší vzdálenosti od rovnovážné polohy, že tedy bylo $\bar{v}_0 \perp \bar{r}_0$. Do směru $\bar{r}_0$ položme osu $\bar{\imath}$, do $\bar{v}_0$ osu $\bar{\jmath}$, takže $\bar{r}_0 = r_0 \bar{\imath}$, $\bar{v}_0 = v_0 \bar{\jmath}$. Pak je

$$\bar{r} = \bar{\imath} x + \bar{\jmath} y = \bar{\imath} \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t + \bar{\jmath} r_0 \cos \omega t$$

a obdobným způsobem jako dříve nalezne se rovnice dráhy, tedy elipsa:

$$\frac{x^2}{\left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2} + \frac{y^2}{r_0^2} = 1.$$

Ovšem zde leží osy x, y jinak, než dříve, jsouce hlavními osami elipsy. Jest nyní zřejmo: Bylo-li $\bar{v}_0 = 0$, byl-li z rovnovážné polohy vychýlený bod, který splňuje podmínku harmonického pohybu v § 26 uvedenou, vypuštěn bez počáteční rychlosti, vykonává přímkové kmity $\bar{r} = \bar{r}_0 \cos \omega t$. Byla-li mu udělena rychlost $\bar{v}_0$ ve směru $\bar{\varrho}$ výchylky $\bar{r}_0$, jsou jeho kmity rovněž přímkové

$$\bar{r} = \bar{\varrho} \left(\frac{v_0}{\omega} \sin \omega t + r_0 \cos \omega t \right) = \bar{\varrho}\, r_m \sin (\omega t + \varphi_0).$$

Byla-li mu udělena rychlost počáteční $\bar{v}_0$ v jiném směru, koná kmity obecně eliptické, které se stanou kruhovými, byla-li rychlost $\bar{v}_0 \perp \bar{r}_0$ a co do velikosti rovna $v_0 = \omega r_0$.

Důležité je však, že nezávisle na výchylce i $\bar{v}_0$ je frekvence ve všech případech táž, čili: Kmity i v obecném případě jsou isochronní; doba kmitová nezávisí ani na amplitudě ani na tvaru dráhy.

A konečně ještě i další důsledek můžeme učiniti z rovnice (j). Její nejobecnější integrál byl rovinný, harmonický (eliptický) kmit. Kdybychom ji byli rozepsali dle nekomplanárních, libovolných (ne-

orthogonálních) směrů $\bar{\imath}, \bar{\jmath}', \bar{k}''$, bylo by, píšeme-li kosoúhlé souřadnice pro okamžik ξ, η, ζ

$$\ddot{\bar{r}} = \bar{\imath}\ddot{\xi} + \bar{\jmath}'\ddot{\eta} + \bar{k}''\ddot{\zeta} = -\omega^2(\bar{\imath}\xi + \bar{\jmath}'\eta + \bar{k}''\zeta) = -\omega^2\bar{r}.$$

Ekvivalentní tři diferenciální rovnice dávají harmonické kmity téže frekvence, ale různých amplitud a fázových konstant v osách. Složením musejí dáti pohyb rovinný a to obecně eliptický. Prvou část tvrzení lze doložiti také tak: Mají-li tři integrály

$$\xi = A_1 \sin\omega t + B_1 \cos\omega t, \quad \eta = A_2 \sin\omega t + B_2 \cos\omega t, \quad \zeta = A_3 \sin\omega t + B_3 \cos\omega t$$

určovat dvě neznámé $\sin\omega t$ a $\cos\omega t$ nenulovými hodnotami, musí determinant

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & -\xi \\ A_2 & B_2 & -\eta \\ A_3 & B_3 & -\zeta \end{vmatrix} = 0.$$

Je tedy geometrickým místem možných poloh pohyblivého bodu rovina.

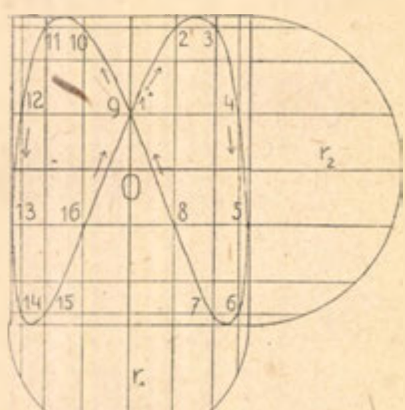
Netřeba snad ani na to upozorňovati, že obecný pohyb harmonický dle své definice rovnicí (*j*) je příkladem pohybu centrálního (§ 20), takže plošná rychlost jest stálá, u pohybu v přímce ovšem nulová. Už proto musí býti rovinný.

Vývody tohoto paragrafu mají velikou důležitost při výkladu zjevů optických.

30. Obrazce Lissajousovy.

Přímky, kruh a elipsy, které dle předcházejícího § 29 vznikly skládáním dvou navzájem kolmých harmonických kmitů téže frekvence, jsou nejjednoduššími případy t. zv. obrazců Lissajousových. V obecném případě jedná se o kmity frekvence různé $p\omega$ a $q\omega$, takže obecnou rovnicí Lissajousových obrazců jest

$$\bar{r} = \bar{\imath} r_1 \sin p\omega t + \bar{\jmath} r_2 \sin(q\omega t + \varphi_0). \qquad (a)$$



Obr. 33.

Její analytická diskuse omezuje se zpravidla na případy, kdy jak p tak q jsou celistvými malými čísly 1, 2, 3, 4, 5, . ., a jest i pak dosti rozvláčná. Odkazujíce v té příčině na pojednání Strouhalovo*), ozřejmíme zde pouze jednoduché řešení grafické.

Naznačíme si na obou osách kmitů polohy kmitajícího bodu, odpovídající určité alikvotní části

*) Dr. V. Strouhal: Analytische Darstellung der Lissajous'schen Figuren. Věstník Čes. spol. nauk. 1902.

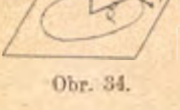
celé periody a proložíme jimi souřadnicovou síť. Stane se tak nejjednodušeji, rozdělíme-li kruhový obvod na jistý (sudý) počet stejných oblouků a považujeme pak harmonický pohyb za průmět kruhového. V obrazci jsou to šestnáctiny obvodu. Je-li kruhová frekvence v ose horizontální $p\omega$, ve vertikální $q\omega$, postoupí pohyblivý bod v horizontálním směru o p dílků, zatím co současně postoupí ve směru vertikálním o q dílků.

Vyjdeme-li tedy dle dané diference fázové od jistého bodu sítě 1 a postoupíme horizontálně dle směru kmitání o p dílků (v obrazci o jeden), pak vertikálně o q dílků (v obrazci o dva), dojdeme k druhé poloze 2 na obrazci a tak pokračujíce nalezneme dostatečný počet bodů, jimiž lze dráhu proložiti. Na hranicích obrazce, které tvoří tečnou k dráze, obrací se ovšem postup nahoru v postup dolů, v pravo na levo a naopak. Obr. 33 znázorňuje křivku $\bar{r} = \bar{i}r_1 \sin \omega t + \bar{j}r_2 \sin\left(2\omega t + \frac{\pi}{8}\right)$.

Obrazce Lissajousovy, ač nemají obecně té základní důležitosti pro celá odvětví fysiky, jako jejich nejjednodušší případ $p = q$, jsou přece vděčným objektem demonstračním. (Kyvadlo Blackburnovo a pod.). Demonstrujeme-li je odrazem světelného paprsku na dvou ladičkách, kolmo k sobě kmitajících, jest výhodno, když jednu z frekvencí na příklad $q\omega$ o malý zlomek „rozladíme" na $(q + \Delta q)\omega$. Jest to tak, jako by po celou řadu kmitů se frekvence přesně rovnala $q\omega$, ale fázová diference procházela spojitě řadou hodnot od 0 do 2π (nebo naopak). Na obrazci pak názorně můžeme sledovati, jak různé možné tvary, odpovídající určitému poměru $p:q$ za různých fázových rozdílů spojitě v sebe přecházejí. V čase, ve kterém se obrazec vrátil v původní tvar, prošed všemi možnými, přibyl (nebo ubyl) jeden celý kmit z počtu, který bychom obdrželi výpočtem z frekvence přesně rovné $q\omega$. Jest tedy neproměnnost obrazce velice citlivou známkou naprosté stálosti obou kmitových dob, resp. kruhových frekvencí $p\omega$ a $q\omega$.

31. Skládání pohybů kruhových téhož směru.

Skládání stejnoměrných pohybů kruhových jest pro optiku podobné důležitosti jako skládání pohybů harmonických. Lze je na toto redukovati, rozložíme-li pohyb kruhový dle § 26 na dva harmonické. Leč můžeme postupovati také přímo, vycházejíce z rovnic (25a) a (25d) § 25 a opírajíce se o princip interference (27a),



Obr. 34.

Nejprve budiž poznamenáno následující: Za jedničkový vektor $\bar{\varphi}$ kolmý na $\bar{\varrho}$ a příslušný „transversální" složce rychlosti v_φ (viz §§ 16, 19 a 25), můžeme psát $[\varepsilon\bar{\varrho}]$ nebo $[\bar{\varrho}\bar{\varepsilon}]$, představujeme-li si ε jakožto neproměnný jedničkový vektor, kolmý na papíře a z něho ven vystupující.

Vektorovým součinem vystihneme oba možné směry otáčení $\bar{\varphi}$ a $-\bar{\varphi}$; jestiť (obr. 34) $\bar{\varphi} = [\bar{\varepsilon}\bar{\varrho}]$ a $-\bar{\varphi} = [\bar{\varrho}\bar{\varepsilon}]$.

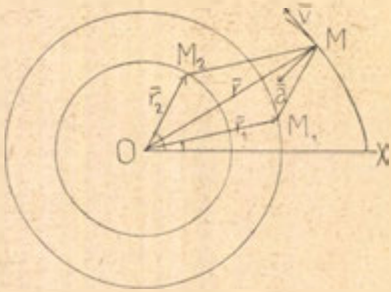
1. **Dva stejnoměrné pohyby kruhové téhož směru a libovolných frekvencí.** Počněme počítati čas od okamžiku $t=0$, v němž průvodiče obou pohybů spadaly v přímku OX, majíce týž směr (obr. 35). Je-li úhlová rychlost prvého pohybu ω_1, druhého pak $\omega_2 > \omega_1$, budou v okamžiku t úhly $M_1OX = \omega_1 t$, $M_2OX = \omega_2 t$.

Složky $\bar{r}_1 = OM_1 \equiv r_1\bar{\varrho}_1$ a $\bar{r}_2 = OM_2 \equiv r_2\bar{\varrho}_2$ tvoří úhel $(\omega_2 - \omega_1)t$, takže

$$\bar{\varrho}_1\bar{\varrho}_2 = cos(\omega_2 - \omega_1)t.$$

Výsledná poloha pohyblivého bodu jest

$$\bar{r} = r\bar{\varrho} = \bar{r}_1 + \bar{r}_2 \equiv r_1\bar{\varrho}_1 + r_2\bar{\varrho}_2.$$



Obr. 35.

Ze skalárního čtverce vidíme, že

$$r^2 = r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2 cos(\omega_2 - \omega_1)t. \qquad (a)$$

Vzdálenost pohyblivého bodu od středu O se tedy mění: V dobách $(\omega_2 - \omega_1)t = 0,\ 2\pi,\ 4\pi, \ldots$ jest $r = r_1 + r_2$, v okamžicích, kdy $(\omega_2 - \omega_1)t = \pi,\ 3\pi,\ 5\pi$ jest $r = r_1 - r_2$. Periodou celé té změny jest $T = 2\pi : (\omega_2 - \omega_1)$.

Rychlosti složek jsou dle (25a) $\bar{v}_1 = \omega_1 r_1 \bar{\varphi}_1 = \omega_1 r_1 [\bar{\varepsilon}\bar{\varrho}_1]$ a $\bar{v}_2 = \omega_2 r_2 \bar{\varphi}_2 = \omega_2 r_2 [\bar{\varepsilon}\bar{\varrho}_2]$. Rychlost výsledná jest

$$\begin{aligned}\bar{v} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 = [\bar{\varepsilon}, (\omega_1 r_1 \bar{\varrho}_1 + \omega_2 r_2 \bar{\varrho}_2)] = \omega_2 [\bar{\varepsilon}, (r_1\bar{\varrho}_1 + r_2\bar{\varrho}_2)] - \\ - (\omega_2 - \omega_1) r_1 [\bar{\varepsilon}\bar{\varrho}_1],\quad \bar{v} = \omega_2 r [\bar{\varepsilon}\bar{\varrho}] - (\omega_2 - \omega_1) r_1 [\bar{\varepsilon}\bar{\varrho}_1].\end{aligned} \qquad (b)$$

Rychlost není kolmá na $\bar{\varrho}$, nýbrž má malou složku směru $-[\bar{\varepsilon}\bar{\varrho}_1] = -\bar{\varphi}_1$. Že tak musí být, jest patrno ze zmenšování r.

Zrychlení jest podobně dle (25d)

$$\begin{aligned}\bar{a} = -\omega_1^2 r_1 \bar{\varrho}_1 - \omega_2^2 r_2 \bar{\varrho}_2 = -\omega_2^2 (r_1\bar{\varrho}_1 + r_2\bar{\varrho}_2) + \\ + (\omega_2^2 - \omega_1^2) r_1\bar{\varrho}_1 = -\omega_2^2 r\bar{\varrho} + (\omega_2^2 - \omega_1^2) r_1 \bar{\varrho}_1.\end{aligned} \qquad (c)$$

Nemá směr $-\bar{\varrho}$ do středu O, nýbrž pro složku směru $\bar{\varrho}_1$ směr v obrazci naznačený. Při tom není kolmé na rychlosti, jak se dozvíme ze skalárního součinu $\bar{v}\bar{a}$, který při vzájemné kolmosti musí býti roven nule. Vypočteme-li jej, obdržíme

$$\bar{v}\bar{a} = (\omega_2 - \omega_1)(2\omega_2 + \omega_1)\omega_2 r r_1 \bar{\varepsilon}[\bar{\varrho}\bar{\varrho}_1].$$

V počátku pohybu jest tento výraz kladný, tedy úhel $\widehat{(va)} < 90^0$.

Dvojnásobná plošná rychlost vzhledem k bodu O, t. j. $2\bar{S} = [\bar{r}\bar{v}]$ není stálá, nýbrž jak výpočtem snadno zjistíme ($\bar{\varepsilon}\bar{r} = 0$!)

$$[\bar{r}\bar{v}] \equiv 2\dot{\bar{S}} = \bar{\varepsilon}(\omega_1 r_1^2 + \omega_2 r_2^2 + (\omega_1 + \omega_2) r_1 r_2 cos(\omega_2 - \omega_1)t),$$

tedy v časech

$$(\omega_2 - \omega_1)t = \begin{matrix} 0,\ 2\pi,\ 4\pi, . \text{ maximální}, \\ \pi,\ 3\pi,\ 5\pi, . \text{ minimální}. \end{matrix}$$

Dvojnásobné plošné zrychlení vzhledem k O jest

$$[\bar{r}\bar{a}] = [(\bar{r}_1 + \bar{r}_2), (-\omega_1^2 \bar{r}_1 - \omega_2^2 \bar{r}_2)] = -(\omega_2^2 - \omega_1^2)[\bar{r}_1\bar{r}_2].$$

Co do velikosti jest úměrno okamžité ploše rovnoběžníka OM_1MM_2. V časech $(\omega_2 - \omega_1)t = 0, \pi, 2\pi, \ldots$ jest nulou, v časech $(\omega_2 - \omega_1)t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots$ je maximální r_1r_2, ale mění při tom své znamení. Jest samo funkcí harmonickou.

Okamžitou úhlovou rychlost $\omega = \dot{\varphi}$ pohyblivého bodu M kolem O obdržíme dle vzorce (17d) jakožto

$$\omega = \dot{\varphi} = \frac{|[r\bar{v}]|}{r^2}.$$

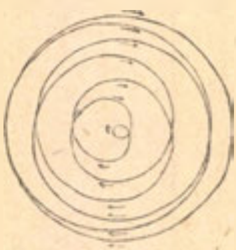
Dosadivše již nalezené výrazy, shledáme, že obecně není stálá. Píšeme-li $\omega_2 = \omega_1 + \varDelta\omega_1$, obdržíme snadno, že jest

$$\omega_1 + \varDelta\omega_1 \frac{r_2^2 + r_1r_2 \cos \varDelta\omega_1 . t}{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2 \cos \varDelta\omega_1 . t}. \qquad (d)$$

Jen je-li $r_1 = r_2$, je úhlová rychlost ω stálá a rovna

$$\omega = \omega_1 + \tfrac{1}{2}\varDelta\omega_1 = \tfrac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2).$$

Výsledný pohyb, dvěma spirálám podobná epitrochoida, jest pro tento zvláštní případ znázorněn obr. 36 dle fysiky Thomson-Taitovy nebo A. Grayovy. Jest zřejmo, že vzniká dráhová křivka uzavřená, jsou-li ω_1 a ω_2 čísla souměřitelná. Tento složitý typ pohybu nemá pro fysikální zjevy základního významu. Pojednali jsme o něm obšírněji než ve všech mně známých spisech proto, abychom na něm ukázali, jak snadnými a přehlednými úvahami vede začasté vektorová analyse k výsledkům, které lze dokázati analyticky z výpočtů byť ne obtížných, přece rozvláčných a velmi nepřehledných.



Obr. 36.

2. **Dva pohyby kruhové téhož směru a téže frekvence.** Zde musíme učiniti jiné ustanovení o počátku počítání časového, neboť průvodiče obou pohybů, nebyly-li náhodně téhož směru, nespadnou nikdy v jedno. Buďte fáze obou pohybů $\varphi_1 = \omega t + \varphi_{01}$ a $\varphi_2 = \omega t + \varphi_{02}$, kde $\varphi_{02} > \varphi_{01}$ a v obr. 35 budiž vyznačena poloha v čase $t = 0$, takže nyní $M_1OX = \varphi_{01}$, $M_2OX = \varphi_{02}$. Jako dříve je

$$\bar{r} = r\bar{\varrho} = \bar{r}_1 + \bar{r}_2 = r_1\bar{\varrho}_1 + r_2\bar{\varrho}_2 \text{ a } r^2 = r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2 \cos(\varphi_{02} - \varphi_{01}), \qquad (e)$$

neboť nyní

$$\bar{\varrho}_1\bar{\varrho}_2 = \cos(M_2OM_1) = \cos(\varphi_{02} - \varphi_{01}).$$

Rychlost a zrychlení jsou

$$\bar{v} = \omega\bar{r}_1 + \omega\bar{r}_2 = \omega(\bar{r}_1 + \bar{r}_2) = \omega\bar{r}, \qquad (f)$$

$$\bar{a} = -\omega^2(\bar{r}_1 + \bar{r}_2) = -\omega^2\bar{r}. \qquad (g)$$

Ze srovnání s § 25 vidíme, že vzniká stejnoměrný pohyb kruhový téže frekvence ω, což je ostatně v tomto jednoduchém

případě samozřejmé. Průvodič r je největší, rovný $r_1 + r_2$ pro $\varphi_{02} - \varphi_{01} = 0, 2\pi, 4\pi, \ldots$, nejmenší $r = |r_1 - r_2|$ pro $\varphi_{02} - \varphi_{01} = \pi, 3\pi, 5\pi, \ldots$.

Výslednou fázovou konstantu nalezneme takto: Násobme $r\bar{\varrho} = r_1\bar{\varrho}_1 + r_2\bar{\varrho}_2$ jedničkovým vektorem $\bar{\varrho}_0$ směru OX jednou skalárně, po druhé vektoriálně. Vznikne

$$r\bar{\varrho}\bar{\varrho}_0 = r_1\bar{\varrho}_1\bar{\varrho}_0 + r_2\bar{\varrho}_2\bar{\varrho}_0 \quad \text{a} \quad r[\bar{\varrho}_0\bar{\varrho}] = r_1[\bar{\varrho}_0\bar{\varrho}_1] + r_2[\bar{\varrho}_0\bar{\varrho}_2],$$

čili dle významu součinů, je-li MOX úhel φ_0,

$$r\cos\varphi_0 = r_1\cos\varphi_{01} + r_2\cos\varphi_{02} \quad \text{a} \quad \bar{\varepsilon} r\sin\varphi_0 = \bar{\varepsilon} r_1\sin\varphi_{01} + \bar{\varepsilon} r_2\sin\varphi_{02}.$$

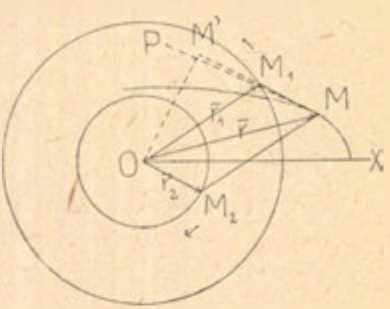
Násobíme-li druhý vztah jedničkovým, z papíru kolmo ven vystupujícím vektorem $\bar{\varepsilon}$, vymizí z něho všechna $\bar{\varepsilon}$. Jest to obdoba krácení v rovnicích algebraických. Dělením plyne pak další vztah

$$tg\,\varphi_0 = \frac{r_1\sin\varphi_{01} + r_2\sin\varphi_{02}}{r_1\cos\varphi_{01} + r_2\cos\varphi_{02}}. \qquad (h)$$

Je patrno, že lze tento postup snadno rozšířiti na tři nebo více stejnoměrných a stejnosměrných pohybů kruhových téže frekvence.

32. Skládání kruhových pohybů protisměrných.

Při skládání kruhových pohybů protisměrných můžeme vždy podobně jako v § 31, 1. počíti počítání časové v okamžiku $t = 0$, kdy oba průvodiče mají týž směr OX, takže $M_1OX = \omega_1 t$, $M_2OX = \omega_2 t$. Ponechávajíce diskusi obecného případu čtenářovi, zmíníme se o dvou důležitých případech zvláštních. 1. Úhlové rychlosti jsou téže velikosti ω, ač ovšem opačného směru. Pak



Obr. 37.

$$\bar{r} = r\bar{\varrho} = \bar{r}_1 + \bar{r}_2 = r_1\bar{\varrho}_1 + r_2\bar{\varrho}_2$$

a ježto zde

$$\bar{\varrho}_1\bar{\varrho}_2 = \cos M_1OM_2 = \cos 2\omega t,$$

plyne ze skalárního čtverce

$$r^2 = r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2\cos 2\omega t. \qquad (a)$$

Vzdálenost kmitajícího bodu od středu O je v časech

$$\omega t = \begin{cases} 0,\ \pi,\ 2\pi & \text{největší } r = r_1 + r_2, \\ \frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2},\ \frac{5\pi}{2} & \text{nejmenší } r = |r_1 - r_2|. \end{cases}$$

Ježto zde $\bar{\varphi}_1 = [\bar{\varepsilon}\bar{\varrho}_1]$, $\bar{\varphi}_2 = [\bar{\varrho}_2\bar{\varepsilon}] = -[\bar{\varepsilon}\bar{\varrho}_2]$, jest rychlost

$$\bar{v} = \omega r_1[\bar{\varepsilon}\bar{\varrho}_1] + \omega r_2[\bar{\varrho}_2\bar{\varepsilon}] = \omega[\bar{\varepsilon}, \bar{r}_1 - \bar{r}_2]. \qquad (b)$$

Dvojnásobná plošná rychlost vzhledem k středu O jest

$$[\bar{r}\bar{v}] = \omega[(\bar{r}_1 + \bar{r}_2), [\bar{\varepsilon}, \bar{r}_1 - \bar{r}_2]] = \omega(r_1^2 - r_2^2)\bar{\varepsilon}, \qquad (c)$$

tedy stálá. Zrychlení

$$\bar{a} = -\omega^2(\bar{r}_1 + \bar{r}_2) = -\omega^2\bar{r}. \qquad (d)$$

Jest tudíž patrno, že se jedná o obecný pohyb harmonický v elipse poloos $r_1 + r_2$ a $|r_1 - r_2|$.

Na hořejším výraze pro rychlost můžeme vybudovati velmi jednoduchou konstrukci jejího směru, t. j. směru tečné v bodě M. Učiňme v obr. 37 $M_1M' = -M_1M = -\bar{r}_2$, pak $OM' = \bar{r}_1 - \bar{r}_2$. Rychlost jest na OM' kolmá, má tedy směr $MP \perp OM'$, a co do velikosti je úměrna délce OM'.

Jsou-li ve zvláštním případě poloměry obou kruhových pohybů stejné, $r_1 = r_2$, je

$$r^2 = 2r_1^2(1 + \cos 2\omega t) = 4r_1^2 \cos^2 \omega t, \text{ t. j. } r = 2r_1 \cos \omega t. \qquad (e)$$

Vektor $OM \equiv \bar{r} = \bar{r}_1 + \bar{r}_2$ spadá vždy v jedno s $+OX$, vzniká přímkový pohyb harmonický amplitudy $2r_1$. Můžeme tedy také naopak lineární kmitání harmonické nahraditi dvěma kruhovými protisměrnými pohyby téže frekvence a téhož poloměru $r_1 = \frac{1}{2}r$. Tato věta je důležita pro optiku, na př. pro elementární výklad zjevu Zeemanova, nebo Fresnelův výklad otáčení roviny polarisační.

2. Dva protisměrné kruhové pohyby téhož poloměru $r_1 = r_2$, ale poněkud různých úhlových rychlostí, ω_1 a $\omega_2 = \omega_1 + \Delta\omega_1$, skýtají druhý pro optiku důležitý případ (obr. 38).

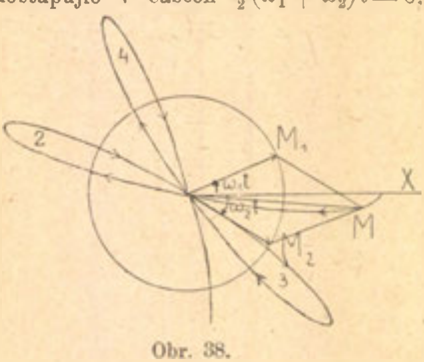
Ježto nyní $\varrho_1\varrho_2 = \cos(2\omega_1 + \Delta\omega_1)t$, je podobně jako dříve

$$r\varrho \equiv \bar{r} = \bar{r}_1 + \bar{r}_2 = r_1(\varrho_1 + \varrho_2), \quad r^2 = 2r_1^2(1 + \cos(2\omega_1 + \Delta\omega_1)t),$$

čili

$$r = 2r_1 \cos(\omega_1 + \tfrac{1}{2}\Delta\omega_1)t = 2r_1 \cos\tfrac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t. \qquad (f)$$

Vzdálenost pohyblivého bodu od středu O mění se harmonicky, dostupujíc v časech $\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t = 0, 2\pi, 4\pi, \ldots$ hodnoty $2r_1$ na jedné straně, v časech uprostřed mezi nimi ležících téže hodnoty na druhé straně od středu O. Od maxima k maximu na téže straně uplyne čas



Obr. 38.

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_1 + \frac{1}{2}\Delta\omega_1}, \text{ čili kmitočet}$$

N výsledný jest

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}\right) = \frac{1}{2}(N_1 + N_2).$$

Výsledná rychlost kmitajícího bodu jest

$$\bar{v} = \omega_1 r_1 \varphi_1 + \omega_2 r_2 \varphi_2 = \omega_1[\bar{\varepsilon}, \bar{r}_1 - \bar{r}_2] + \Delta\omega_1 r_1[\bar{\varrho}_2\bar{\varepsilon}],$$

výsledné zrychlení

$$\bar{a} = -\omega_1^2\bar{r}_1 - \omega_2^2\bar{r}_2 = -\omega_1^2(\bar{r}_1 + \bar{r}_2) - 2\omega_1\Delta\omega_1\bar{r}_2 - (\Delta\omega_1)^2\bar{r}_2.$$

Ačkoli se tedy vzdálenost r mění čistě harmonicky, celkový pohyb není čistým pohybem harmonickým. Dvojnásobná plošná rychlost jest

$$
\begin{aligned}
[\bar{r}\bar{v}] = [(\bar{r}_1 + \bar{r}_2),\ (\omega_1 [\bar{\varepsilon}\bar{r}_1] + \omega_2 [\bar{r}_2\bar{\varepsilon}])] = \omega_1 [(\bar{r}_1 + \bar{r}_2),\ [\bar{\varepsilon}\bar{r}_1]] + \\
+ \omega_2 [(\bar{r}_1 + \bar{r}_2),\ [\bar{r}_2\bar{\varepsilon}]] = \omega_1 \bar{\varepsilon} (r_1^2 + \bar{r}_1\bar{r}_2) - \omega_2\bar{\varepsilon} (r_1^2 + \bar{r}_1\bar{r}_2) = \\
- \bar{\varepsilon} (\omega_2 - \omega_1) r_1^2 . (1 + \cos(\omega_1 + \omega_2) t) = \\
- \bar{\varepsilon}\, 2(\omega_2 - \omega_1) r_1^2 \cos^2 \tfrac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2) t.
\end{aligned}
\qquad (g)
$$

Úhlová rychlost ω, kterou se pohyblivý bod M kolem O otáčí, čili úhlová rychlost otáčení okamžitého posičního vektoru $\bar{r}$ jest tedy stálá, neboť

$$
\omega = \frac{|[\bar{r}\bar{v}]|}{r^2} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} = \frac{\Delta\omega_1}{2}. \qquad (h)
$$

Směr otáčení jest směr rychlejšího pohybu kruhového. Pohyblivý bod probíhá tedy hvězdicovitou křivku (hypotrochoidu), která jest uzavřenou (v sebe se vracející) křivkou, jsou-li ω_1 a ω_2 souměřitelná čísla. Opisuje ji také „gyroskopické" kyvadlo, na jehož konci je připevněn rychle rotující setrvačník. Zcela podobně jako u pohybu epitrochoidického jest zde plošné zrychlení funkcí harmonickou.

33. Tlumený pohyb kmitavý.

Velmi často se v přírodě setkáváme s ději, které nejsou čistými kmity harmonickými, jako je dává rovnice (26 d), ale mohou jim býti velmi podobny, jsouce ovládány poněkud obecnějším vztahem

$$
\ddot{s}\bar{s}^0 = -\omega^2 s\bar{s}^0 - 2b\dot{s}\bar{s}^0. \qquad (a)
$$

Ježto dle našeho předpokladu mají všechny vektory směr téže přímky $\pm\bar{s}^0$, můžeme po násobení tímto jedničkovým vektorem psáti rovnici skalární

$$
\ddot{s} + 2b\dot{s} + \omega^2 s = 0. \qquad (b)
$$

Okamžité zrychlení směřuje sice do rovnovážné polohy, ale není prostě úměrno vzdálenosti od ní, jako ve (26 d), nýbrž zmenšuje se vždy o obnos úměrný okamžité rychlosti. Stálý a podstatně kladný faktor úměrnosti píšeme $2b$; členu $2b\dot{s}$ budeme říkat „člen od tření", ježto v praktických případech mechanických měří velikost tření, které pohybu brání. Faktor b má ovšem dimensi $[T^{-1}]$, faktor ω touž.

Daná rovnice (b) je lineární homogenní rovnice diferenciální druhého řádu s konstantními koeficienty a má tedy integrál tvaru $s = e^{\lambda t}$, takže $\dot{s} = \lambda e^{\lambda t}$, $\ddot{s} = \lambda^2 e^{\lambda t}$. Dosazením do ($b$) plyne rovnice charakteristická

$$
\lambda^2 + 2b\lambda + \omega^2 = 0 \quad \text{s kořeny} \quad \begin{matrix}\lambda_1 \\ \lambda_2\end{matrix} = -b \pm \sqrt{b^2 - \omega^2}. \qquad (c)
$$

Obecný integrál má tedy tvar

$$
s = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t},
$$

kde C_1 a C_2 jsou integrační konstanty*).

Nutno rozeznávati tři případy dle toho, je-li $b^2 \gtreqless \omega^2$.

---

*) Netřeba snad ani připomínat, že téže integrační metody mohli jsme užíti u (26 d).

I. $b^2 > \omega^2$. **Pohyb aperiodický.**

Jak λ_1, tak λ_2 jsou podstatně záporné. Položme

$$-\lambda_1 = \mu_1, \quad -\lambda_2 = \mu_2, \quad \text{kde} \quad \mu_2 > \mu_1 > 0.$$

Pak $\quad s = C_1 e^{-\mu_1 t} + C_2 e^{-\mu_2 t} \quad$ a $\quad \dot{s} = -\mu_1 C_1 e^{-\mu_1 t} - \mu_2 C_2 e^{-\mu_2 t} \qquad (d)$

Integrační konstanty vyčíslíme z hraničních podmínek: Začne-li na př. pohyb v čase $t = 0$ v bodě $s = s_0 > 0$ rychlostí $\dot{s} = 0$, je dle (d)

$$s_0 = C_1 + C_2, \qquad 0 = -\mu_1 C_1 - \mu_2 C_2,$$

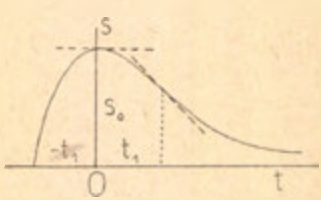
tedy $$C_1 = \frac{\mu_2}{\mu_2 - \mu_1} s_0, \qquad C_2 = -\frac{\mu_1}{\mu_2 - \mu_1} s_0$$

a $$s = s_0 \frac{1}{\mu_2 - \mu_1} (\mu_2 e^{-\mu_1 t} - \mu_1 e^{-\mu_2 t}), \qquad \dot{s} = s_0 \frac{\mu_2 \mu_1}{\mu_2 - \mu_1} (e^{-\mu_2 t} - e^{-\mu_1 t}).$$

Ježto $\mu_1 < \mu_2$, má ve výraze pro rychlost negativní člen stále převahu a rychlost jest negativní, směřuje do rovnovážné polohy. Po dostatečně dlouhém čase se stanou $\dot{s}$ a s prakticky rovnými nule, to jest, pohyblivý bod, vyšed z polohy s_0, vrací se do polohy rovnovážné, posléze čím dále tím pomaleji. Tento typ pohybu nazýváme aperiodickým. Známe ovšem podobné zastavování se u pohybu rovnoměrně zpožděného, leč jsou zde dva podstatné rozdíly: u tohoto pohybu musela z počátku existovati jistá rychlost, která se zmenšuje až na nulu a pak — existuje-li původní negativní zrychlení i nadále — obrátí rychlost svůj směr a znovu roste až do hodnot nekonečných. U aperiodického pohybu však v čase $t = 0$ byl bod v poloze s_0 bez rychlosti ($\dot{s} = 0$), s postupujícím časem nabývá rychlosti rostoucí až do maxima ($\ddot{s} = 0$!) v čase $t_1 = \frac{1}{\mu_2 - \mu_1} \log nat \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)$, které obnáší

$$\dot{s}_{max} = -2 s_0 b \left(\frac{b - \sqrt{b^2 - \omega^2}}{b + \sqrt{b^2 - \omega^2}}\right) \frac{b}{\sqrt{b^2 - \omega^2}}.$$

Odtud znovu rychlost klesá, až theoreticky v čase nekonečně dlouhém nabude znovu hodnoty nulové. Za našich začátečních podmínek nemůže se s v čase od $t = 0$ do $t = \infty$ státi záporným, t. j. pohyblivý bod nepřekročí rovnovážné polohy. Ovšem že výchylka s mohla býti nulou shodně s našimi podmínkami v záporném čase $t = -t_1$. Jest tedy časové rozvinutí aperiodického pohybu dáno křivkou obr. 39. Tečna v ose $t = 0$ musí býti rovnoběžná s osou t ($\dot{s} = 0$). Inflekční bod odpovídá maximální rychlosti.



Obr. 39.

II. $b^2 < \omega^2$. **Vlastní tlumené kmitání.**

Oba kořeny λ jsou komplexní

$$\lambda_{12} = -b \pm i\sqrt{\omega^2 - b^2} = -b \pm i\gamma, \quad \text{kde*)} \quad i = \sqrt{-1}.$$

---

*) Není snad obavy před záměnou $i = \sqrt{-1}$ s jedničkovým vektorem $\mathfrak{i}$.

Obecný integrál jest tedy

$$s = e^{-bt}(C_1 e^{i\gamma t} + C_2 e^{-i\gamma t}). \qquad (e)$$

Rozepíšeme-li imaginární mocniny exponenciely dle vzorce Eulerova, jest

$$s = e^{-bt}((C_1 + C_2)\cos\gamma t + i(C_1 - C_2)\sin\gamma t).$$

U diferenciální rovnice, jejíž koeficienty jsou vesměs reálné, vystoupil komplexní integrál; to znamená, že jak jeho reálná část, tak imaginární jsou jejím řešením, jak ostatně můžeme zpětnou diferenciací dokázati. Jest tedy úplným integrálem jejím

$$s = e^{-bt}(A\cos t\sqrt{\omega^2 - b^2} + B\sin t\sqrt{\omega^2 - b^2}), \qquad (f)$$

který můžeme obdobně jako v § 26 přepsati na

$$s = s_m e^{-bt}\sin(t\sqrt{\omega^2 - b^2} + \varphi_0). \qquad (g)$$

Hodnota sinusu kolísá mezi ± 1, čili maximální výchylky z rovnovážné polohy mezi křivkami $\pm s_m e^{-bt}$. Můžeme tedy mluviti o kmitech s ubývající amplitudou. Průchody kmitajícího bodu rovnovážnou polohou $s = 0$ jsou od sebe odděleny dobami $t = \pi : \sqrt{\omega^2 - b^2}$, leč dějí se postupně vždy opačným směrem. Od jednoho průchodu k následujícímu týmž směrem (na př. z leva na pravo) uplyne doba

$$T_b = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - b^2}}, \qquad (h)$$

kterou nazýváme d o b o u k m i t o v o u nebo p e r i o d o u t l u m e n é h o k m i t á n í, ač se vlastně nejedná o děj přesně periodický, neboť amplitud ubývá a rychlost v týchž polohách kmitajícího bodu se neustále zmenšuje. Také mezi dvěma největšími výkyvy na opačných stranách (sinus $= \pm 1$) leží doba $\frac{1}{2}T_b$, na téže straně tedy doba T_b. Leč mezi průchodem polohou rovnovážnou a maximální elongací neuplyne doba $\frac{1}{4}T_b$, jako u pohybu čistě harmonického, nýbrž doba menší, kdežto návrat z polohy krajní do rovnovážné vyžaduje času většího než $\frac{1}{4}T_b$. Důkaz jest snadný:

Bylo-li v čase $t = t_0$, $s = 0$, tedy v (g) je $\varphi_0 = -\sqrt{\omega^2 - b^2} \,.\, t$. Maximální elongace nastane v čase t_1, v němž je rychlost $\dot{s} = 0$. Dosazením po krácení $s_m e^{-bt}$ tedy

$$-b\sin\sqrt{\omega^2 - b^2}\,(t_1 - t_0) + \sqrt{\omega^2 - b^2} \,.\, \cos\sqrt{\omega^2 - b^2}\,(t_1 - t_0) = 0$$

$$t_1 - t_0 = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 - b^2}} \,.\, arc\,tg \frac{\sqrt{\omega^2 - b^2}}{b} = \frac{T_b}{2\pi}\frac{\pi}{2}(1 - \varepsilon) = \frac{T_b}{4}(1 - \varepsilon),$$

kde ε je pravý zlomek. Znamení odmocniny jest totiž bráti kladně, takže oblouk, odpovídající trigonometrické tangentě, dané konečným kladným číslem, leží v prvém kvadrantu a je menší než $\frac{1}{2}\pi$. Na návrat z maximální elongace do rovnovážné polohy zbývá z doby $\frac{1}{2}T_b$ patrně

$$\frac{1}{4}T_b(1 + \varepsilon).$$

Doba kmitová, zde ovšem na rozdíl od kmitů harmonických netlumených měřená jen buď od krajních poloh nebo průchodů rovno-

vážnou polohou, nezávisí na amplitudě. Jsou tedy také tlumené kmity isochronní.

Srovnáme-li (h) s (26 c), vidíme, že kmitová doba T_b kmitů tlumených je větší než T netlumených; jest totiž

$$\frac{T_b}{T}=\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2-b^2}},\quad T_b\doteq\frac{T}{\sqrt{1-\frac{b^2}{\omega^2}}}\doteq T\left(1+\tfrac{1}{2}\frac{b^2}{\omega^2}\right). \qquad (i)$$

Poslední přibližný, znamením $\doteq$ označený výraz platí, je-li tlumení velmi nepatrné, b velmi malé proti ω, neboli krátce psáno $b \ll \omega$.

Amplitudy kmitů ubývá dle zákona $s_m e^{-bt}$, to jest řadou geometrickou, přibývá-li času řadou aritmetickou. Byla-li k-tá $s_k = s_m e^{-bt}$, nastane následující ($k+1$)-ní po čase T_b a bude tedy $s_{k+1}=s_m e^{-b(t_1+T_b)}$. Poměr libovolných dvou po sobě následujících je stálý, rovný k a nazývá se poměrem útlumu (někdy pregnantně útlumem) a jeho přirozený logarithmus Λ dle Gausse logarithmickým dekrementem.

$$\frac{s_1}{s_2}=\frac{s_k}{s_{k+1}}=k=e^{bT_b},\quad log\ nat\frac{s_k}{s_{k+1}}=log\ nat\ k=\Lambda=bT_b. \qquad (j)$$

Λ se snadno vyčíslí z měření amplitud a dává, známe-li dobu kmitovou T_b, bezprostředně konstantu b základní diferenciální rovnice. Konstanta ω pak plyne ze vzorce (h).

Dosazením jednoduše dovodíme

$$T_b=T\sqrt{1+\frac{\Lambda^2}{4\pi^2}}. \qquad (k)$$

III. $\omega=b$. **Hraniční případ aperiodický.**

V obecném integrálu je dle (c) nyní $\lambda_1=\lambda_2=-b$. Výraz $s=(C_1+C_2)e^{-bt}$ přestává býti obecným integrálem, obsahuje jedinou integrační konstantu C_1+C_2. Z theorie lineárních rovnic diferenciálních víme, že nyní je integrálem nejen e^{-bt}, ale i te^{-bt}, takže úplný integrál má tvar

$$s=(C_1+C_2t)e^{-bt}. \qquad (l)$$

Můžeme totiž, znajíce částečný integrál e^{-bt}, redukovati řád diferenciální rovnice o jeden substitucí $s=u\,.\,e^{-bt}$, kde u je nová proměnná vzhledem k t. Dosadíme-li do (b), plyne pak $\ddot{u}=0$ čili $u=C_2t$ a druhý částečný integrál C_2te^{-bt}.

K témuž výsledku dojdeme, dáme-li λ_2 blížiti se k λ_1 znenáhla, a nazíráme-li na $\lambda_1=\lambda_2$ jakožto na příklad limitní. Je-li totiž $\lambda_2=\lambda_1+\delta$ a $lim\ \delta=0$, je

$$s=C_1e^{\lambda_1 t}+C_2e^{(\lambda_1+\delta)t}=e^{\lambda_1 t}(C_1+C_2e^{\delta t}),$$

nebo rozvineme-li $e^{\delta t}$ v řadu a spokojíme se prvou mocninou velmi malého δ

$$s=e^{\lambda_1 t}(C_1+C_2(1+\delta t))=e^{\lambda_1 t}(C_1+C_2+C_2\delta\,.\,t),$$

což je identické s (l), píšeme-li za integrační konstanty C_1+C_2 a $C_2\delta$ v (l) C_1 a C_2.

Průběh pohybu neskýtá proti aperiodickému pohybu (I.) ničeho nového; člen e^{-bt} klesá s časem a rovněž te^{-bt}, neboť e^{-bt} klesá rychleji než t stoupá. Počítáme-li však čas, který uplyne, než jistá počáteční výchylka s_0 klesne na daný zlomek εs_0, obdržíme výsledkem, že se tak stane nejdříve, je-li přibližně splněn hraniční případ aperiodický. Nahlédneme to i bez počtu. V rovnici (d) rozhoduje o pozdějším průběhu pohybu hlavně ta z obou exponenciálních funkcí, které pomaleji ubývá, tedy, ježto $\mu_1 < \mu_2$, ona, která obsahuje μ_1. Čím je $\mu_1 = |\lambda_1|$ absolutně větší, tím rychleji klesá s. A $|\lambda_1|$ je absolutní hodnotou největší, je-li právě $b = \omega$.

Proto u kmitavých systémů, splňujících rovnici (b), jichž užíváme při měření a u nichž můžeme útlum měniti, realisujeme pro zrychlení práce aperiodický případ hraniční.

Ponecháváme čtenáři, aby diskutoval pohyb bodu daný rovnicí (b) pro začáteční podmínky $t = 0$, $s = 0$, $\dot{s} = v_0 =$ stálé. Jedná se pak totiž o případ pro praxi fysikální velmi důležitý, který nastává u balistického galvanometru nebo kyvadla. Položí-li jako dříve $T\omega = 2\pi$ a $\omega : b = \sigma$, takže $\sigma \lesseqgtr 1$ rozlišuje naše případy I., II. a III., nalezne, že prvý obrat (výchylka balistická) nastává v čase

$$t_1 = -\frac{\sigma T}{2\pi} \log nat F(\sigma), \tag{m}$$

kde

$$F(\sigma) = \left(\frac{1-\sqrt{1-\sigma^2}}{1+\sqrt{1-\sigma^2}}\right)^{\frac{1}{2\sqrt{1-\sigma^2}}} = e^{-\frac{1}{\sqrt{\sigma^2-1}} arc\, tg \sqrt{\sigma^2-1}}. \tag{n}$$

Prvý výraz pro $F(\sigma)$ má reálný tvar pro $\sigma < 1$, druhý pro $\sigma > 1$. Dosadí-li t_1 do integrálu, ukáže, že balistická výchylka je

$$s_1 = \frac{Tv_0}{2\pi} F(\sigma). \tag{o}$$

Při tom je v případě periodických tlumených kmitů

$$T_b = T\frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2-1}}, \quad \Lambda = \frac{2\pi}{\sqrt{\sigma^2-1}}. \tag{p}$$

Vyšli jsme zde z rovnice (a) pro tlumené kmity v přímce, protože (b) má důležitý význam také pro jiné obory fysikální než jen mechaniku, interpretujeme-li vhodně význam veličin s, $2b$ a ω^2. Řešíť se stejně na př. oscilační výboj Leydenské láhve. Obecnější případ křivočarých kmitů mechanických, daných rovnicí

$$\ddot{\bar{r}} + 2b\dot{\bar{r}} + \omega^2\bar{r} = 0 \tag{q}$$

a integrálem

$$\bar{r} = \bar{A}e^{\lambda_1 t} + \bar{B}e^{\lambda_2 t}, \tag{r}$$

kde $\bar{r}$, $\dot{\bar{r}}$, $\ddot{\bar{r}}$ nemají týž směr a $\bar{A}$ a $\bar{B}$ jsou vektorovými integračními konstantami, může čtenář obdobně diskutovati sám.

34. Kmitání vynucené.

K vývodům předcházejících paragrafů připojíme zde další častý a důležitý případ kmitání v přímce, které jest obdobně dáno rovnicí

$$\ddot{s} + 2b\dot{s} + \omega^2 s = f(t). \qquad (a)$$

Táž rovnice se vyskytuje na př. v nauce o střídavém proudu.

Nejprve vložíme sem několik poznámek z theorie diferenciálních rovnic: Rovnice typu (a) nazývá se úplnou lineární diferenciální rovnicí druhého řádu. Jest poměrně jednoduchá ježto koeficienty u $\ddot{s}$, $\dot{s}$ a s jsou konstantní a nikoli, jak obecně by mohly býti, funkce neodvisle proměnné t. K úplné rovnici patří redukovaná, u níž „rušivý člen", t. j. pravá strana se rovná nule. Dá se dokázati nejjednodušeji přímou substitucí, že, jsou-li s_1 a s_2 částečná řešení rovnice redukované, je $s = C_1 s_1 + C_2 s_2$ také řešením rovnice té. Je-li znám obecný integrál redukované rovnice (zvaný komplementární funkcí rovnice úplné), v našem případě rovnice druhého řádu tedy právě napsaný integrál $C_1 s_1 + C_2 s_2$, můžeme obdržeti obecné řešení úplné rovnice kvadraturami Lagrangeovou metodou variace konstant. Spočívá v tom: Považujeme napsané řešení za obecné pro úplnou rovnici, ale v něm C_1 a C_2 za funkce nezávisle proměnné t, které jest určiti. Utvořivše

$$\dot{s} = C_1 \dot{s}_1 + C_2 \dot{s}_2 + \dot{C}_1 s_1 + \dot{C}_2 s_2$$

připojíme podmínku

$$\dot{C}_1 s_1 + \dot{C}_2 s_2 = o. \qquad (b)$$

Podobně postupujeme dále. V nejvyšším řádu, zde hned druhém

$$\ddot{s} = C_1 \ddot{s}_1 + C_2 \ddot{s}_2 + \dot{C}_1 \dot{s}_1 + \dot{C}_2 \dot{s}_2,$$

připojíme podmínku

$$\dot{C}_1 \dot{s}_1 + \dot{C}_2 \dot{s}_2 = f(t). \qquad (c)$$

Dosadíme pak s, $\dot{s}$, $\ddot{s}$ do dané rovnice, majíce na paměti, že $s = C_1 s_1 + C_2 s_2$ je za konstantních C integrálem redukované rovnice a tedy dává pro pravou stranu nulu. Zůstává tedy výsledkem dosazení systém rovnic vzhledem $\dot{C}_1$ a $\dot{C}_2$ lineárních (b) a (c), z nichž

$$\dot{C}_1 = -\frac{s_2 \cdot f(t)}{s_1 \dot{s}_2 - s_2 \dot{s}_1}, \qquad \dot{C}_2 = \frac{s_1 \cdot f(t)}{s_1 \dot{s}_2 - s_2 \dot{s}_1}.$$

Pravé strany jsou čistými funkcemi t, a obdržíme tudíž C_1 a C_2 prostou integrací.

Ponechávajíce provedení této obecné metody ve zvláštním případě, jímž se dále budeme zanášeti, čtenáři, obrátíme se k jednoduššímu způsobu řešení, jehož často lze užíti. Řešení redukované rovnice obsahuje dvě libovolné konstanty; v řešení rovnice úplné tedy k nim již konstanta další nepřistoupí. I lze dokázati, že obecné řešení úplné rovnice sestává ze součtu úplného řešení rovnice redukované a libovolného partikulárního integrálu rovnice úplné. Tvar tohoto částečného integrálu dá se někdy z fysikálního smyslu rovnic uhádnouti a diferenciací a dosazením řešení do dané diferenciální rovnice verifikovati.

Budeme se zanášeti nejčastějším případem z fysikální praxe, kdy rušivý člen $f(t)$ je periodický. Pak jej můžeme (§ 27c) rozvést ve Fourierovu řadu $f(t) = f_1(t) + f_2(t) + \ldots$ Stačí však, nalezneme-li řešení pro jediný člen $f_1(t)$ obecného tvaru $C \sin(\nu t + \alpha)$, neboť vy-

hovuje-li rovnici s jediným $f_1(t)$ na pravé straně řešení s_1, a podobně pro $f_2(t)$ řešení s_2, takže

$$\ddot{s}_1 + 2b\dot{s}_1 + \omega^2 s_1 = f_1(t),$$
$$\ddot{s}_2 + 2b\dot{s}_2 + \omega^2 s_2 = f_2(t),$$

jest patrně sečtením

$$\frac{d^2(s_1+s_2)}{dt^2} + 2b\,\frac{d(s_1+s_2)}{dt} + \omega^2(s_1+s_2) = f_1(t) + f_2(t),$$

t. j. $s_1 + s_2$ je řešením pro pravou stranu $f_1(t) + f_2(t)$. To lze rozšířiti na libovolný počet členů. Budeme tedy řešiti rovnici

$$\ddot{s} + 2b\dot{s} + \omega^2 s = C \sin(\nu t + \alpha), \qquad (d)$$

kde ovšem C a α jsou dané konstanty.

I můžeme uvažovati takto: Naše tlumené kmity resp. aperiodicky zmírající pohyb jsou rušeny periodicky kruhovou frekvencí ν. Po dosti dlouhé době bude tedy jistě převládat rušivý člen periodický, a jím vznikne pohyb periodický téže frekvence ν, ale ovšem neznámé amplitudy s'_m a fázové diference ψ. Partikulární integrál bude tedy míti tvar

$$s' = s'_m \sin(\nu t + \alpha - \psi). \qquad (e)$$

Místo sinusu mohli jsme ovšem stejněprávně psáti cosinus, což by změnilo pouze fázovou diferenci ψ. Kdybychom utvořili $\ddot{s}'$ a $\dot{s}'$ a dosadili do dané rovnice (d), mohli bychom určiti s'_m a ψ jakožto funkci b, ω^2, C a ν, majíce na paměti, že rovnice musí platiti pro všechna t.

Počítání provádí se nejsnáze pomocí často užívaného obratu následujícího: Násobme rovnici (d) veličinou $i = \sqrt{-1}$ a přičtěme k ní obdobnou rovnici

$$\ddot{\sigma} + 2b\dot{\sigma} + \omega^2\sigma = C \cos(\nu t + \alpha). \qquad (f)$$

Zveme-li komplexní proměnnou $\sigma + is = u$, dostáváme

$$\ddot{u} + 2b\dot{u} + \omega^2 u = C(\cos(\nu t + \alpha) + i \sin(\nu t + \alpha)) = Ce^{i(\nu t + \alpha)}. \qquad (g)$$

Řešíme-li ji, bude reálná část komplexního integrálu příslušeti rovnici (f), jeho imaginární část pak naší dané rovnici (d). Dle svrchu uvedeného předpokládáme částečný integrál tvaru

$$u = Ae^{i(\nu t + \alpha - \psi)}. \qquad (h)$$

Vytvořme

$$\dot{u} = i\nu Ae^{i(\nu t + \alpha - \psi)}, \qquad \ddot{u} = -\nu^2 Ae^{i(\nu t + \alpha - \psi)}$$

a dosaďme do (g). Plyne

$$A(-\nu^2 + 2ib\nu + \omega^2) = Ce^{i\psi}.$$

Abychom uvedli výsledek na vhodnější tvar, položme

$$\omega^2 - \nu^2 = K \cos\psi, \qquad 2b\nu = K \sin\psi,$$

takže
$$K = \sqrt{(\omega^2 - \nu^2)^2 + 4b^2\nu^2}, \qquad tg\,\psi = \frac{2b\nu}{\omega^2 - \nu^2} \qquad (i)$$

a
$$AKe^{i\psi} = Ce^{i\psi} \quad \text{čili} \quad A = \frac{C}{K}. \qquad (j)$$

Hledaný částečný integrál rovnice (g) má pak tvar

$$u = \frac{C}{K} e^{i(\nu t + \alpha - \psi)} = \frac{C}{K} \{ \cos(\nu t + \alpha - \psi) + i \sin(\nu t + \alpha - \psi) \}$$

a jeho imaginární část, odpovídající rovnici (e),

$$s' = \frac{C}{K} \sin(\nu t + \alpha - \psi), \qquad (k)$$

značí kmit vynucený. Integrační konstanty zde ovšem není. Úplné řešení rovnice (d) jest dle toho, co bylo řečeno,

$$s = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \frac{C}{K} \sin(\nu t + \alpha - \psi),$$

nebo bylo-li λ_1 a λ_2 komplexní, existují-li tedy kmity vlastní nebo volné, dosazením

$$s = s_0 e^{-bt} \sin(\sqrt{\omega^2 - b^2} \,.\, t + \varphi_0) + \frac{C}{\sqrt{(\omega^2 - \nu^2) + 4b^2\nu^2}} \sin(\nu t + \alpha - \psi). \quad (l)$$

Prvý člen, kmity vlastní, klesá s časem, zpravidla dosti rychle, takže po nepříliš dlouhé době zbývá pouze člen druhý, kmitání vynucené. Periodickým rušivým členem v základní rovnici vzniká tedy kmitání netlumené, amplitudy stálé $C : K$ a periody téže, jako rušivý člen sám. Má však proti němu fázovou diferenci ψ, která je podmíněna dle (i) členem od „tření“, jsouc úměrna b. Nejsou-li ω a ν valně rozdílné a je-li b malé, takže vlastní kmity nezmírají příliš rychle, vznikají superposicí kmitů volných a vynucených rázy dle § 28. Kdyby nebylo členu od tření ($b = 0$), byly by trvalé.

Velikost amplitudy vynucených kmitů závisí na rozdílu frekvencí kmitů vlastních a vynucených. Je-li $\nu = \omega$, je amplituda ta největší a rovna $C : 2b\nu$, tedy tím větší, čím je „tření“ menší. Tento důležitý případ $\nu = \omega$ nazýváme resonancí.

Kdyby za resonance bylo $b = 0$, měly by amplitudy vynucených kmitů dostoupiti hodnot nekonečných, ač ovšem teprve po uplynutí nekonečné doby*). Ztrácíť náš partikulární integrál smysl a nutno jej nahraditi jiným $s' = \frac{C}{2\omega} t \,.\, \sin \omega t$. V přírodě tento případ nenastává, neboť existuje vždy byť i malé, přece konečné b.

Můžeme-li za stálého ν měniti periodu vlastních kmitů, tedy ω, je amplituda s'_m funkcí tohoto ω. Nanášíme-li pak poměr $\omega : \nu$ za abscisy x, poměr amplitudy, patřící k $\omega \gtrless \nu$, k amplitudě maximální (pro $\omega = \nu$), tedy $s'_{m\omega} : s'_{m\nu}$ za ordinaty y, obdržíme tak zvanou resonanční křivku. Má rovnici

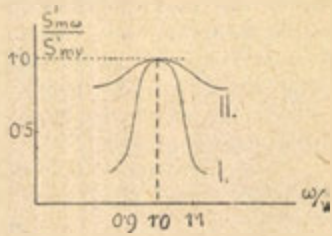
$$y = \frac{\varepsilon}{\sqrt{(x^2 - 1)^2 + \varepsilon^2}}, \quad \text{kde} \quad \varepsilon = \frac{2b}{\nu}. \qquad (m)$$

Její tvar je znázorněn pro dva různé případy obr. 40. Zenneck označuje názvem „ostrost resonance“ křivost v jejím vrcholu, kteráž

*) Se stanoviska energetického jest to pochopitelno: Rušivý člen konečný musí kmitajícímu systému dodati nekonečný obnos energie (jeť úměrný čtverci amplitudy), což nutně vyžaduje nekonečné doby.

jest $4 : \varepsilon^2$. Tento pojem je důležitý všude tam, kde resonanční křivkou určujeme ν ze známého proměnného ω.

Absolutní velikost resonančního maxima, t. j. amplitudy za resonance jest tím větší, čím menší je „tření" b, a je přibližně*) obráceně úměrna tření. Také za stálého rozladění $\omega^2 - \nu^2$ odpovídá menšímu b větší amplituda.



Obr. 40.

Vynucené kmitání je proti rušivému členu zpožděno ve fázi o ψ, které vždy leží mezi 0 a π, a to pro $\omega > \nu$ mezi 0 a $\frac{1}{2}\pi$, pro $\omega < \nu$ mezi $\frac{1}{2}\pi$ a π. Za resonance $\omega = \nu$ je $\psi = \frac{1}{2}\pi$, to znamená, rušivý člen má maxima v okamžicích, kdy rychlost kmitajícího bodu je nejmenší.

Zjev resonance je velmi důležitý pro různé obory fysiky, neboť jak patrno mohou poměrně malými rušivými členy (malá C) vzniknouti trvalé kmity veliké amplitudy.

35. Pohyby centrální. Pohyb planetární.

V § 20 jsme se již zmínili o pohybech centrálních, takových, kde zrychlení má kladný nebo záporný směr průvodiče vedeného z pevného bodu O, takže $a = \pm f(r)\varrho$. Viděli jsme, že se vyznačují rovinnou dráhou a stálou plošnou rychlostí, takže

$$2\dot{s} = |[r\bar{v}]| = r^2\dot{\varphi} = C = \text{stálé}. \qquad (a)$$

U každého takového pohybu je zrychlení celkové dáno svou radiální složkou, složka transversální je rovna nule

$$a = a'_\varrho = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\,\varrho. \qquad \bar{a}_\varphi = 0. \qquad (b)$$

Velikost vektorového součinu $|[\bar{r}\bar{v}]|$ je dle jeho definice dána součinem z velikosti rychlosti $|\bar{v}| = v$ a kolmice $OD = l$, spuštěné z bodu O na směr vektoru v (obr. 41), t. j. na tečnou k dráze AB. Jest tedy

$$|[\bar{r}\bar{v}]| = vl = C \quad \text{a} \quad v = \frac{C}{l}, \qquad (c)$$

takže velikost rychlosti je v každém okamžiku obráceně úměrna kolmici l.



Obr. 41.

Z výrazu pro a_ϱ můžeme pomocí stálé plošné rychlosti eliminovati čas, známe-li dráhu v souřadnicích polárních, r jakožto funkci φ.

Jest totiž $$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\frac{C}{r^2} = -C\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right),$$

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = -C\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{C^2}{r^2}\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right).$$

*) Přesněji počítáno nastává maximální amplituda, jak lze zjistiti, položíme-li diferenciální kvocient jmenovatele K dle ν rovným nule, je-li $\nu^2 = \omega^2 - 2b^2$, tedy za frekvence poněkud menší než ω. Zpravidla však bývá $2b^2 \ll \omega^2$.

Dosazením do výrazu pro a_0 pak plyne

$$\bar{a} = -\frac{C^2}{r^2}\left(\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r}\right)\varrho. \qquad (d)$$

Dle tohoto vzorce můžeme u centrálního pohybu vypočísti zrychlení, známe-li dráhu, nebo naopak jej můžeme považovati za diferenciální rovnici dráhy, již nalezneme integrací ze známého zrychlení.

Jeden centrální pohyb již známe; jest to obecný pohyb harmonický. Zde se chceme zabývati druhým neméně důležitým a poměrně jednoduchým případem*).

Dle Newtonova zákona působí od slunce na planetu zrychlení obráceně úměrné čtverci průvodiče a k slunci směřující, takže

$$\bar{a} = -\frac{\mu}{r^2}\varrho, \quad \text{kde} \quad \mu = \text{stálé}. \qquad (e)$$

Představme si slunce pevné v prostoru. Jaká bude obecně dráha planety? Víme již předem, že bude rovinná; v její rovině (obr. 41) zvolme pevný směr OX, od nějž počítejme úhel φ průvodiče. Pak dle (d)

$$\bar{a} = -\frac{C^2}{r^2}\left(\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r}\right)\varrho = -\frac{\mu}{r^2}\varrho. \qquad (f)$$

Násobíme-li ϱ, tedy

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r} = \frac{\mu}{C^2}, \text{ což lze přepsat na } \frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}-\frac{\mu}{C^2}\right) = -\left(\frac{1}{r}-\frac{\mu}{C^2}\right).$$

Rovnici (26d) téhož typu jsme integrovali v § 26, a víme, že můžeme její integrál psáti ve tvaru

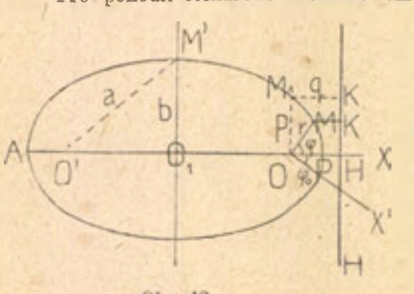
$$\frac{1}{r}-\frac{\mu}{C^2} = A\cos(\varphi-\varphi_0),$$

čili přepsaný

$$r = \frac{\frac{C^2}{\mu}}{1 + A\frac{C^2}{\mu}\cos(\varphi-\varphi_0)}. \qquad (g)$$

To jest rovnice dráhy v souřadnicích polárních.

Pro pohodlí čtenářovo vsuneme sem několik poznámek o rovnici kuželoseček v polárních souřadnicích.



Obr. 42.

Buď dán bod O (ohnisko) jakožto počátek polárních souřadnic a přímka (řiditelka, directrix) ve vzdálenosti $OH = q$ (obr. 42).

Jest známo, že body M v rovině OHH', jichž vzdálenosti od bodu O a přímky HH' mají stálý poměr, vyplňují kuželosečku, a to za

$$\frac{OM}{MK} = e = \text{stálé}, \quad \begin{array}{l} e < 1 \text{ elipsu}, \\ e = 1 \text{ parabolu}, \\ e > 1 \text{ hyperbolu}. \end{array}$$

*) Obšírněji je pojednáno o centrálních pohybech v Boltzmannových: Vorles. über Prinzipe der Mechanik.

Konstanta e jest numerická excentricita (číselná výstřednost). Ježto $OM = r$, $MK = q - r\cos\varphi$, plyne dle definice

$$\frac{r}{q - r\cos\varphi} = e, \quad \text{čili} \quad r = \frac{qe}{1 + e\cos\varphi} \tag{h}$$

jakožto společná polární rovnice kuželoseček. Při tom jest qe průvodič pro $\varphi = 90^0$ (resp. 270^0), tedy $qe = p = OM_1$, kde $OM_1 \perp OH$, a nazývá se polovičním parametrem (semi-latus-rectum) kuželosečky. Úhel φ jest v (h) počítán od 0^0 do 360^0, počínaje od vrcholu P (perihelia, přísluní) kuželosečky bližšího k řiditelce (a ohnisku O). Kdyby byl měřen na př. od přímky OX' ($\sphericalangle POX' = \varphi_0$, $\sphericalangle MOX' = \varphi$), zněl by jmenovatel v (h) $1 + e\cos(\varphi - \varphi_0)$, kdyby byl měřen od přímky OA (A je aphelion, odslunί u astronomických elips), zněl by $1 - e\cos\varphi$. Perihelion a aphelion nazývají astronomové **apsidami**, přímku PA **přímkou apsid** a úhel φ, měřený od perihelia, **pravou anomalií**.

U elipsy speciálně je velká osa $2a = AP$ rovna součtu průvodičů pro $\varphi = 0^0$ a $\varphi = 180^0$, tedy

$$2a = \frac{p}{1+e} + \frac{p}{1-e} = \frac{2p}{1-e^2}, \quad \text{čili} \quad a = \frac{p}{1-e^2}. \tag{i}$$

Vzdálenost $c = OO_1 = O_1O'$ ohniska od středu čili lineární excentricita je

$$c = a - OP = \frac{p}{1-e^2} - \frac{p}{1+e} = \frac{ep}{1-e^2} = ea. \tag{j}$$

Ze známé vlastnosti elipsy, že $OM + MO' = 2a$, plyne pro bod M' na malé ose elipsy $OM' = M'O' = a$ a zveme-li $O_1M' = b$ malou poloosou elipsy,

$$a^2 = b^2 + c^2, \quad \text{čili} \quad b = \sqrt{a^2 - c^2} = a\sqrt{1-e^2} = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}. \tag{k}$$

Proto

$$p = a(1-e^2) = \frac{b^2}{a}. \tag{l}$$

Plocha elipsy jest jak známo

$$\pi ab = \pi a^2\sqrt{1-e^2} = \pi \frac{p^2}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{m}$$

Vidíme nyní, že dráhy (g) centrálních pohybů dle Newtonova zákona jsou obecně kuželosečky. Při tom $\varphi = \varphi_0$ odpovídá perihelu, $C^2 : \mu = p$ polovičnímu parametru a $AC^2 : \mu = Ap = e$ číselné výstřednosti dráhy, takže $A = e : p = 1 : q$. Integrační konstanty A a φ_0 najdeme, známe-li pro libovolné místo dráhy (r_1, φ_1) rychlost v_1 co do směru i velikosti.

Jedná-li se o uzavřenou, tedy eliptickou dráhu planety (v užším astronomickém smyslu slova), jest její oběžná doba T dle (a) a (m)

$$\int_0^T dS = \frac{C}{2}\int_0^T dt, \qquad T = \frac{2}{C}\int_0^T dS = \frac{2}{C}\pi a^2\sqrt{1-e^2},$$

neboť opsaná plocha je plochou elipsy. Povýšením na druhou a pomocí (i) plyne z toho

$$T^2 = \frac{4}{C^2}\pi^2 a^4 (1-e^2), \quad \text{čili} \quad \frac{T^2}{a^3} = 4\pi^2\frac{p}{C^2} = \frac{4\pi^2}{\mu}. \tag{n}$$

Je-li konstanta μ u všech planet táž, musí také výraz na levé straně býti u všech týmž a tak nalezli jsme ze zákona Newtonova tři zákony Keplerovy:

1. Planety pohybují se v elipsách, v jichž ohnisku je slunce (q).

2. Průvodič ze slunce k planetě vedený opisuje v týchž dobách tytéž plochy ((a) u všech centrálních pohybů platné).

3. Čtverce oběžních dob dvou planet jsou v témž poměru jako trojmoci velkých poloos jejich drah (n).

Historický postup byl ovšem opačný. Kepler, přivrženec heliocentrického Koperníkova názoru světového, objevil, geniální intuicí jsa veden, po dlouhých výpočtech na základě výborného pozorovacího materiálu Tychona de Brahe jmenované tři popisné zákony, a Newton vyvodil z nich jednoduchý kinematický nebo lépe mechanický jejich podklad. Také tato opačná analytická cesta není obtížná: Z prvého zákona Keplerova plyne

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}.$$

Druhý zákon praví:

$$r^2\dot\varphi = C = \text{stálé},$$

čili diferenciací

$$2r\dot r\dot\varphi + r^2\ddot\varphi = 0,$$

a ježto r není nulou, dělením

$$2\dot r\dot\varphi + r\ddot\varphi = 0.$$

Dle ($19b$) nemá tedy zrychlení transversální složky, je čistě radiální. Jeho velikost určíme z (d), ježto

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{e}{p}\cos\varphi,\quad \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{e}{p}\sin\varphi,\quad \frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{e}{p}\cos\varphi = \frac{1}{p} - \frac{1}{r},$$

na

$$a = -\frac{C^2}{p}\,\frac{1}{r^2}\,\bar\varrho.$$

Směřuje tedy k slunci. Ze třetího zákona Keplerova pak plyne jako dříve (n)

$$\frac{T^2}{a^3} = 4\pi^2\frac{p}{C^2} = \text{stálé},$$

takže, píšeme-li tuto konstantu ve tvaru $4\pi^2 : \mu$, obdržíme Newtonův zákon tak, jak jsme jej psali v (e).

Jest patrno, že Newtonův zákon je obsažnější než Keplerovy; ukazuje, že jsou možny i jiné kuželosečkové dráhy nebeských těles než pouze eliptické, i když je považujeme kinematicky za pouhé body. Mimo to vymezuje přesnou platnost Keplerova třetího zákona podmínkou, že μ v (e) má býti totéž pro všechny planety. Dá se také rozšířiti na případ, kdy rozměry nebeských těles nelze podřaditi abstraktnímu pojmu hmotného bodu.

Můžeme ještě ukázati, jak dovodíme dráhu planetárního pohybu ze zákona Newtonova bez pomoci výrazu (d) operacemi vektoranalytickými.

Dle (e) jest

$$\bar a = \ddot{\bar r} = -\frac{\mu}{r^3}\bar r \qquad (o)$$

a tedy
$$[\bar{r}\dot{\bar{r}}] = 0, \quad \text{čili} \quad [\bar{r}\dot{\bar{r}}] = \bar{C}, \tag{p}$$
kde $\bar{C}$ jest vektorová integrační konstanta a to, jak víme, dvojnásobná plošná rychlost. Znásobme (o) a (p) vektoriálně:
$$\frac{1}{\mu}[\ddot{\bar{r}}\bar{C}] = -\frac{1}{r^3}\left[\bar{r}\,[\bar{r}\dot{\bar{r}}]\right] = -\frac{1}{r^3}\left(\bar{r}\,(\bar{r}\dot{\bar{r}}) - \dot{\bar{r}}r^2\right). \tag{q}$$
Diferenciací dle času plyne z identity
$$\bar{r}\bar{r} = r^2 \qquad \bar{r}\dot{\bar{r}} = r\dot{r},$$
a tedy z (q)
$$\frac{1}{\mu}[\ddot{\bar{r}}\bar{C}] = \frac{1}{r}\dot{\bar{r}} - \frac{\dot{r}}{r^2}\bar{r}.$$
Obě strany jsou úplnými diferenciálními kvocienty dle času
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\mu}[\dot{\bar{r}}\bar{C}]\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\bar{r}\right),$$
takže integrací
$$\frac{1}{\mu}[\dot{\bar{r}}\bar{C}] = \frac{1}{r}\bar{r} + e\bar{\varepsilon}, \tag{r}$$
kde jsme integrační vektorovou konstantu rozepsali na velikost e a jedničkový vektor $\bar{\varepsilon}$. Násobíme-li skalárně vektorem $\bar{r}$ obě strany
$$\frac{1}{\mu}\bar{r}\,[\dot{\bar{r}}\bar{C}] = r + e\bar{\varepsilon}\bar{r}. \tag{s}$$
Levou stranu lze dle (p) přepsati na
$$\frac{1}{\mu}\bar{r}\,[\dot{\bar{r}}\bar{C}] = \frac{1}{\mu}\bar{C}\,[\bar{r}\dot{\bar{r}}] = \frac{1}{\mu}C^2.$$
Píšeme-li za konstantu na pravé straně p a $\cos(\widehat{r\varepsilon}) = \cos\varphi$, píše se (s)
$$p = r + er\cos\varphi,$$
což není než polární rovnice kuželoseček v témže tvaru jako dříve. Jest patrno, že vektor $\bar{\varepsilon}$ udává směr delší osy.

36. Pohyb v přímce dle Newtonova zákona.

Podobně jako obecný centrální harmonický pohyb v elipse se může ve zvláštním případě zvrhnouti v harmonický pohyb v přímce, může se také pohyb „planetární" v kuželošečce zvrhnouti v pohyb v přímce. Byla-li totiž v některém okamžiku plošná rychlost rovna nule, zůstane, zachovávajíc svou hodnotu, trvale nulou a $[\bar{r}\bar{v}] = 0$. Jest to, nehledě k nezajímavému případu klidu $\bar{r} = 0$, $\bar{v} = 0$ tehdy, má-li (za libovolného konečného r) rychlost $\bar{v}$ směr týž nebo opačný, jako průvodič. Pak je trvale $v_\tau = 0$, tedy $\dot{\varphi} = 0$, $\varphi =$ stálé. Základní vztah dle (35*b* a *c*) nabude tvaru $\bar{a} = \ddot{r}\bar{\varrho} = -(\mu : r^2)\,\bar{\varrho}$, takže po násobení jedničkovým vektorem $\bar{\varrho}$ zbývá integrovati skalární rovnici
$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{\mu}{r^2}. \tag{a}$$
Násobme podobně jako na konci § 26 obě strany $\dot{r}dt$; obdržíme
$$\frac{dr}{dt}\frac{d^2r}{dt^2}dt = -\frac{\mu}{r^2}dr, \qquad \text{čili} \qquad d\left(\tfrac{1}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right) = d\left(\frac{\mu}{r}\right)$$

a integrací

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}v^2 = \frac{\mu}{r} + \frac{1}{2}v_0{}^2,$$

kde $\frac{1}{2}v_0{}^2$ je integrační konstanta. Zvolme velmi jednoduché počáteční podmínky: V čase $t=0$ buď pohyblivý bod v místě $r=r_0$ v klidu. Pak

$$0 = \frac{\mu}{r_0} + \frac{1}{2}v_0{}^2 \quad \text{a} \quad v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = 2\mu\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right), \tag{b}$$

$$\text{čili} \quad \frac{dr}{dt} = -\sqrt{\frac{2\mu}{r_0}}\sqrt{\frac{r_0 - r}{r}}.$$

Znamení záporné museli jsme voliti, ježto bod, jsa zrychlován směrem k O, nabývá rychlosti takové, že vzdálenost r s rostoucím časem t klesá. Další integrací

$$\sqrt{\frac{2\mu}{r_0}}\int_0^t dt = -\int_{r_0}^r \sqrt{\frac{r}{r_0 - r}}\,dr$$

provedeme, kladouce na pravo $r = r_0 \cos^2\vartheta$. Pak, nepíšeme-li zatím meze změněné,

$$t \cdot \sqrt{\frac{2\mu}{r_0}} = r_0\int_{r_0}^r 2\cos^2\vartheta \,.\, d\vartheta = r_0\int_{r_0}^r (1 + \cos 2\vartheta)\,d\vartheta = r_0(\vartheta + \tfrac{1}{2}\sin 2\vartheta)\Big|_{r_0}^r$$

$$= r_0 \,.\, \arccos\sqrt{\frac{r}{r_0}} + \sqrt{r_0 r - r^2}, \tag{c}$$

ježto oba členy po dosazení dolní meze jsou nulami.

Do zrychlujícího centra O, t. j. $r=0$, dostal by se pohyblivý bod v čase $t_0 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{r_0{}^{3/2}}{\sqrt{2\mu}}$, nabývaje zde rychlosti nekonečné. Snadná úvaha nás poučuje, že by je proběhl a dospěl v čase dalším t_0 bodu ve vzdálenosti $-r_0$, takže by vykonával kmitavý, ovšem neharmonický pohyb periody $T = 4t_0$.

Jak uvidíme, udílí zeměkoule (poloměru R) vnějším hmotným bodům zrychlení $-(\mu : r^2)\,\varrho$, směřující do jejího středu O. Na povrchu zeměkoule, tedy pro $r=R$, jest toto zrychlení $\dot{g} = -g\varrho$, takže $\mu = gR^2$. Kdyby k ní padal hmotný bod z klidu v nekonečné vzdálenosti ($r_0 = \infty$), dopadl by na její povrch, kdyby ovšem nebylo odporu vzduchu, rychlostí v_R, která dle (b) jest dána vztahem $v_R{}^2 = 2gR$. Jest táž, jaké by nabyl padaje za stálého zrychlení g z výše rovné poloměru zemskému R. (Vypočti z rovnic (22b).)

Obecně při pádu z nekonečné vzdálenosti do vzdálenosti r na př. k slunci, nabude hmotný bod konečné rychlosti v_∞ dané

$$v_\infty^2 = \frac{2\mu}{r}. \tag{d}$$

K tomu připneme následující zajímavou poznámku: Řekli jsme, že integrační konstanty obecného pohybu „planetárního“ lze určiti,

známe-li pro libovolný bod dráhy rychlost pohybu co do směru i velikosti. Lze však dokázati, že jeho typ (el., hyp., par.) můžeme stanoviti, známe-li pro určitou vzdálenost r rychlost v pouze co do velikosti.

Element dráhy ds u M (obr. 41) můžeme psát $(ds)^2 = (r d\varphi)^2 + (dr)^2$. Z infinitesimálního trojúhelníka a $\triangle OMD$ plyne, že

$$\sin \sphericalangle OMD = \frac{l}{r} = r\frac{d\varphi}{ds} \quad \text{čili} \quad (ds)^2 = \frac{r^4 d\varphi^2}{l^2},$$

a srovnáním obou výrazů

$$\frac{1}{l^2} = \frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \frac{1}{r^2}. \tag{e}$$

Pišme pro chvíli za $\frac{1}{r} = u$, takže náš základní vztah ($35\,d$ a e) pro velikost zrychlení a přejde v

$$a = -C^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u\right) = -\mu u^2. \tag{f}$$

Zřejmě

$$\frac{du}{d\varphi} = \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi} \quad \text{a} \quad \frac{du}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dr} = -\frac{1}{r^2} = -u^2. \tag{g}$$

Dosazením (g) do (e) dostáváme

$$\frac{1}{l^2} = \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 \tag{h}$$

a diferenciací levé strany dle r, a což jest totéž, užitím operace $\frac{d}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dr}$ na pravé straně

$$-\frac{2}{l^3}\frac{dl}{dr} = 2\frac{du}{d\varphi}\frac{d^2u}{d\varphi^2}\frac{d\varphi}{dr} + 2u\frac{du}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dr},$$

neboli dle (g) a (f)

$$\frac{1}{l^3}\frac{dl}{dr} = u^2\left(\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u\right) = -\frac{a}{C^2}. \tag{i}$$

První a třetí člen této dvojité rovnice dávají nám dráhovou křivku v soustavě l, r, nebo dovolují prostou kvadraturou vypočísti kolmici l na tečné při libovolném zrychlení $a = f(r)$. Vidíme z ní též další vlastnost libovolných centrálních pohybů. Má-li dráha vzhledem k bodu O býti konkávní, musí, zvětšuje-li se r, také l se zvětšovati, to jest $dl : dr$ musí býti kladné a tedy a záporné. Zrychlení musí směřovati do bodu O. Když se naopak kolmice l zmenšuje s rostoucím r, tedy, je-li zmíněný diferenciální poměr záporný, je dráha vzhledem k O konvexní, vypouklá, což nastává, směřuje-li zrychlení od O pryč. Tak na př. u dráhy hyperbolické odpovídá zápornému a větev hyperboly bližší k ohnisku O; druhá vzdálenější větev odpovídá zrychlení

$$a = +(1 : r^2)\,\mu.$$

Vypočtěme nyní čtverec rychlosti v^2 pro průvodič r a úhel φ. Spojením ($35\,c$) a (h) je

$$v^2 = \frac{C^2}{l^2} = C^2\left(\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2\right).$$

Rovnice dráhy dává

$$u = \frac{1}{r} = \frac{\mu}{C^2} + A\cos(\varphi - \varphi_0),$$

takže po vypočtení diferenciálního poměru

$$v^2 = \frac{\mu^2}{C^2} + 2\mu A\cos(\varphi - \varphi_0) + A^2C^2 = \mu\left(\frac{2}{r} + A^2\frac{C^2}{\mu} - \frac{\mu}{C^2}\right).$$

Ale jak víme z diskuse integrálu (35_g) v § 35, je

$$A^2\frac{C^2}{\mu} - \frac{\mu}{C^2} = Ae - \frac{1}{p} = \frac{e^2}{p} - \frac{1}{p} = -\frac{1}{a},$$

kde ovšem a je velká poloosa dráhy, takže obecně

$$v^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) \tag{j}$$

je čtverec rychlosti v libovolném místě r dráhy.

Kdyby „planeta" padala z nekonečné vzdálenosti do O vlivem zrychlení — $\mu : r^2$, stihla by místo r rychlostí v_∞, danou (d). Jest tudíž

$$v_\infty^2 - v^2 = \frac{\mu}{a} = \frac{C^2}{ap} = \frac{C^2}{a^2(1-e^2)}. \tag{k}$$

Vidíme tedy: Je-li rychlost „planety" v jistém místě v a rychlost dopadu z nekonečna do tohoto místa v_∞, tu odpovídá

$v^2 < v_\infty^2$, $e < 1$ dráze eliptické,
$v^2 = v_\infty^2$, $e = 1$ „ parabolické,
$v^2 > v_\infty^2$, $e > 1$ „ hyperbolické.

O pohybu relativním.

37. Úvodní poznámky.

Dosud vždy jsme vztahovali polohu hmotného bodu k soustavě souřadnic pevné v absolutním prostoru, k absolutně pevnému počátku O. Začasté však jest značně pohodlnější vztahovati proměnnou polohu a tedy pohyb bodu k soustavě souřadnic Σ', která není pevná, nýbrž sama se pohybuje vzhledem k absolutnímu prostoru, to jest vzhledem k absolutně pevné soustavě Σ. Říkáme, že soustava Σ' sama jest nadána absolutním pohybem. Každou změnu, jako na př. změnu polohy, velikosti, rychlosti a pod., vztaženou k soustavě Σ' nazýváme změnou relativní. Jenom ona jest patrna pozorovateli, který sám by byl pevně spojen se soustavou souřadnic Σ', ji by stanovil, nevěda třeba ani, zdali a jak se sám (spolu se soustavou Σ') pohybuje v prostoru absolutním. Veškerá naše pozorování, vztažená k soustavě Σ', pevně spojené se zeměkoulí, jsou tedy tohoto rázu. Absolutně pevného systému Σ neznáme*), absolutní prostor jest výtvorem abstrakce

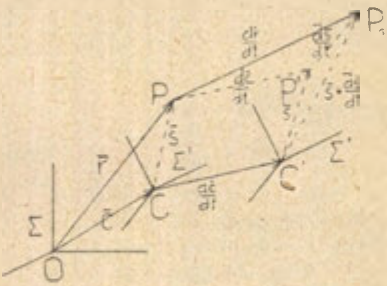
*) O různých názorech na tyto otázky referuje Voss v článku: „Principy racionální mechaniky" (Encyklopedie mat. věd něm. a franc. vydání, sv. IV., 1.).

lidského ducha (§ 12). Stačiž nám, že s důstatek vyhovuje všem praktickým potřebám soustava souřadnic Σ pevně spojená se světem stálic, ba že zpravidla úplně dostačí soustava spojená se zeměkoulí.

Abychom mohli oceniti vliv relativnosti našich popisů a pozorování, jde o to, sestaviti vzorce, dle nichž bychom nalezli absolutní, t. j. k Σ vztažený pohyb hmotného bodu, známe-li jeho pohyb relativní, k Σ' vztažený, a ovšem též absolutní pohyb soustavy Σ' samé. Jedno jest patrno ihned: Jedná-li se o časovou změnu nějakého skaláru — mysleme na př. na proměnlivý objem plynový —, jest změna relativní táž jako změna absolutní, nemá-li pohyb soustavy Σ', jehož se účastníme, vlivu na měření času, přisuzujeme-li tedy jedné vteřině totéž trvání v pohybovaném systému Σ', jako v pevném Σ. Tato poznámka není zbytečně samozřejmá, nasazujeť právě v tomto bodě své úvahy důležitý „princip relativnosti".

*38. Postupný pohyb vztažné soustavy.

Buď Σ (obr. 43) pevná soustava souřadnic s počátkem O, Σ' pohyblivá s počátkem C, který vzhledem k Σ je dán polohovým vektorem $\bar{c}$. Libovolný bod prostoru P je charakterisován polohovým vektorem $\bar{r} = \bar{i}x + \bar{j}y + \bar{k}z$ vztaženým k Σ a polohovým vektorem $\bar{s} = \bar{i}'x' + \bar{j}'y' + \bar{k}'z'$ vzhledem k Σ'. Změnu $\bar{r}$ v jednice časové, t. j. $\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{v}_a$, nazýváme rychlostí absolutní,



Obr. 43.

podobnou změnu vektoru $\bar{s}$, totiž $\frac{\partial \bar{s}}{dt} = \bar{v}_r$ rychlostí relativní. Zvláštní tvar písmeny ∂ nechť nám připomíná, že jest změnu vytvořiti vzhledem k systému Σ'. Jest tudíž

$$\bar{v}_a = \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{i}\frac{dx}{dt} + \bar{j}\frac{dy}{dt} + \bar{k}\frac{dz}{dt}, \qquad \bar{v}_r = \frac{\partial \bar{s}}{dt} = \bar{i}'\frac{dx'}{dt} + \bar{j}'\frac{dy'}{dt} + \bar{k}'\frac{dz'}{dt}. \qquad (a)$$

Patrně jest

$$\bar{r} = \bar{s} + \bar{c}. \qquad (b)$$

Kdyby systém Σ' stál nehybně v prostoru absolutním, vzhledem k Σ, t. j. $\bar{c} = 0$, tu

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{s}}{dt} = \frac{\partial \bar{s}}{dt}. \qquad (c)$$

Má-li vztažná soustava Σ' pohyb postupný čili translační, t. j. pohybuje-li se tak, že nové polohy os zůstávají neustále rovnoběžné se starými, tu libovolný bod P změní svou polohu v prostoru i tehdy, zůstal-li vzhledem k Σ' v klidu, je-li $\frac{\partial \bar{s}}{dt} = 0$. Za

jedničku časovou přišel by z P do P'. Jeho rychlost absolutní nazýváme v tomto případě rychlostí z vedení $\bar{v}_v$ (nebo z unášení, entraînement, velocity of transportation, Führungsgeschwindigkeit); neboť právě unášen, veden pohybujícím se systémem Σ', s nímž si jej můžeme mysliti pevně spojený.

Změnil-li vedle toho svou polohu v soustavě Σ', maje relativní rychlost $\bar{v}_r = \frac{d\bar{s}}{dt} = \overline{P'P_1}$, jest celková změna

$$\overline{PP_1} = \overline{PP'} + \overline{P'P_1} \quad \text{čili} \quad \bar{v}_a = \bar{v}_v + \bar{v}_r. \tag{d}$$

Tato úvaha a tedy i výsledný vztah platí obecně: Ve zvláštním případě postupného pohybu soustavy Σ' jest patrně $\overline{PP'} = \overline{CC'}$, t. j.

$$\bar{v}_v = \dot{\bar{c}}, \quad \text{čili} \quad \bar{v}_a = \dot{\bar{c}} + \bar{v}_r, \quad \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{c}}{dt} + \frac{d\bar{s}}{dt}. \tag{e}$$

Diferencujeme-li (e) dle času, je

$$\frac{d\bar{v}_a}{dt} = \frac{d\dot{\bar{c}}}{dt} + \frac{d\bar{v}_r}{dt}, \quad \text{čili} \quad \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \frac{d^2\bar{c}}{dt^2} + \frac{d^2\bar{s}}{dt^2}, \tag{f}$$

anebo

$$\bar{a}_a = \bar{a}_v + \bar{a}_r, \tag{g}$$

neboť patrně jest $\dot{\bar{v}}_a = \ddot{\bar{r}} = \bar{a}_a$ zrychlení absolutní, $\ddot{\bar{c}} = \bar{a}_v$ zrychlení z vedení, a $\frac{d^2\bar{s}}{dt^2} = \bar{a}_r$ zrychlení relativní. Jednoduchý vztah (f) platí však pouze pro translaci Σ'. Všimněme si, jak různě se chová vzhledem k translaci soustavy Σ' bod a vektor. Zůstane-li bod P fixován v pohyblivé soustavě, změní se jeho průvodič $\bar{r}$ v soustavě pevné a to za jedničku časovou na $\bar{r}' = \bar{r} + \dot{\bar{c}}$. Zůstane-li však vektor na př. $\overline{CP} = \bar{s} = \bar{r} - \bar{c}$ fixován v soustavě Σ', nezmění se vektor $\bar{s}$ v soustavě pevné, neboť $\overline{C'P'} = \overline{CP} = \bar{s}$ je týž vektor, ježto rovnoběžné přenesení na jiné místo neznamená žádnou změnu vektoru. Ježto změna vektoru jest zase vektor, jest dle tohoto poznatku $\frac{d\bar{s}}{dt} = \frac{d\bar{s}}{dt}$, t. j. změna vektoru $\bar{s}$ vzhledem k pohyblivému systému rovna změně $\bar{s}$ vzhledem k pevnému systému a rovněž změna rychlosti $\bar{v}_r$

$$\frac{d\bar{v}_r}{dt} = \frac{d\bar{v}_r}{dt} = \frac{d^2\bar{s}}{dt^2}.$$

Toho jsme užili již v rovnici (f) a proto můžeme tento člen zvát relativním zrychlením.

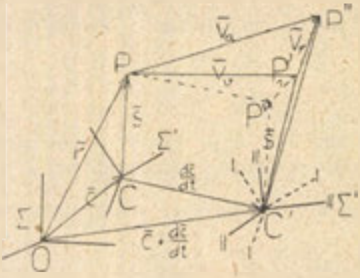
*39. Obecný pohyb vztažné soustavy.

Má-li vztažná soustava Σ' pohyb obecný, t. j. vedle postupného také ještě otáčivý, jsou poměry složitější. Kdyby existovala pouze translace, t. j. kdyby Σ' přešlo z polohy C do $C'I$ (obr. 44), byla by rychlost z vedení $\overline{PP'} = \dot{\bar{c}}$. Ale otočením z polohy $C'I$ do $C'II$, které

nastalo za jedničku časovou rychlostí $\bar{\omega}$, danou vzhledem k systému pevnému Σ, přejde vektor $\bar{s}$ z polohy $\overline{C'P'}$ do $\overline{C'P_1'}$ (délka $C'P'$ a $C'P_1'$ je ovšem táž), takže celková rychlost z vedení, kterou má bod P se systémem Σ' pevně spojený, jest

$$\overline{PP'_1} = \overline{PP'} + \overline{P'P'_1}$$

či $\bar{v}_v = \dot{\bar{c}} + [\bar{\omega}\bar{s}] = \dot{\bar{c}} + [\bar{\omega}, (\bar{r} - \bar{c})]$. (a)



Obr. 44.

Pro $P'P'_1$ užili jsme známého vzorce $(16e)$.

Jestliže bod P ještě k tomu změnil svou relativní polohu vzhledem k soustavě Σ', maje relativní rychlost $\bar{v}_r = \frac{d\bar{s}}{dt} = \overline{P'_1P''}$, jest celkem

$$\bar{v}_a = \bar{v}_v + \bar{v}_r \quad \text{čili} \quad \bar{v}_a = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{c}}{dt} + [\bar{\omega}\bar{s}] + \frac{d\bar{s}}{dt}, \qquad (b)$$

což lze psáti, přeneseme-li $\bar{c}$ v levo, a vzpomeneme $\bar{r} - \bar{c} = \bar{s}$

$$\frac{d\bar{s}}{dt} = \frac{d\bar{s}}{dt} + [\bar{\omega}\bar{s}]. \qquad (c)$$

Smysl jest:

$$\overline{P'P''} = \overline{P'_1P''} + \overline{P'P'_1}.$$

Tento velmi důležitý vzorec poučuje nás o absolutní změně vektoru $\bar{s}$ vzhledem k pevným souřadnicím, známe-li jeho změnu vzhledem k souřadnicím, nadaným libovolnou translací a známou rotací $\bar{\omega}$. Od translace nic nezávisí, jak jsme viděli již na konci předcházejícího paragrafu, od rotace pochází druhý člen pravé strany. Vzorec (c) je obecný, neboť $\bar{s}$ může býti libovolný vektor, nemusí to býti právě pouze vektor posiční.

Nyní se můžeme ptáti, jak se to má se zrychlením. Absolutní rychlost byla dle $(38d)$ $\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_v$. Její absolutní vzrůst s časem je absolutní zrychlení, takže

$$\bar{a}_a = \frac{d\bar{v}_a}{dt} = \frac{d\bar{v}_r}{dt} + \frac{d\bar{v}_v}{dt}. \qquad (d)$$

Abychom obdrželi absolutní změnu rychlosti $\bar{v}_r$, musíme na tento vektor použíti vzorce (c) a psáti

$$\frac{d\bar{v}_r}{dt} = \frac{d\bar{v}_r}{dt} + [\bar{\omega}\bar{v}_r] = \frac{d^2\bar{s}}{dt^2} + \left[\bar{\omega}\frac{d\bar{s}}{dt}\right] = \bar{a}_r + \left[\bar{\omega}\frac{d\bar{s}}{dt}\right]. \qquad (e)$$

Člen $\frac{d\bar{v}_r}{dt} = \frac{d^2\bar{s}}{dt^2}$ jest změna rychlosti, jak ji vidíme v systému Σ' pohybovaném, a to změna v tomto systému posuzovaná, čili zrychlení relativní $\bar{a}_r$.

Poslední člen v (d) obdržíme takto: Diferenciací (a) dle času plyne

$$\frac{d\bar{v}_v}{dt} = \ddot{\bar{c}} + [\dot{\bar{\omega}}\bar{s}] + \left[\bar{\omega}\frac{d\bar{s}}{dt}\right].$$

V posledním členu je $\frac{d\bar{s}}{dt}$ změna absolutní, takže musíme dosaditi za ni (e) a

$$\frac{d\bar{v}_v}{dt} = \ddot{\bar{c}} + [\dot{\bar{\omega}}\bar{s}] + [\bar{\omega}[\bar{\omega}\bar{s}]] + \left[\bar{\omega}\frac{d\bar{s}}{dt}\right]. \qquad (f)$$

Všimněme si prvých tří členů pravé strany. Jest to patrně (dle strany levé) absolutní změna rychlosti z vedení bodu, který by měl v systému Σ' pevnou polohu, byl s ním pevně spojen, takže by $\frac{d\bar{s}}{dt} = 0$. Není to tedy nic jiného než zrychlení z vedení $\bar{a}_v$

$$\bar{a}_v = \ddot{\bar{c}} + [\dot{\bar{\omega}}\bar{s}] + [\bar{\omega}[\bar{\omega}\bar{s}]]. \qquad (g)$$

Dle tohoto vzorce můžeme počítati skutečná (absolutní) zrychlení bodu tuhého tělesa, které postupuje a zároveň se otáčí, neměníc při tom svého tvaru. Posiční vektor $\bar{s}$ jest ovšem při tom vztažen na bod C tělesa. Člen $[\bar{\omega}[\bar{\omega}\bar{s}]]$ nazývá se u Angličanů často zrychlením centripetálním, dostředivým.

Dosadíme-li své výsledky do (d), jest celkem

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_v + \bar{a}_e, \quad \text{kde} \quad \bar{a}_e = 2\left[\bar{\omega}\frac{d\bar{s}}{dt}\right] = 2[\bar{\omega}\bar{v}_r] \qquad (h)$$

jest tak zvané zrychlení Coriolisovo, dle francouzského fysika, který v letech 1835 nauku o relativním pohybu systematicky spracoval a na existenci tohoto členu důrazně upozornil. Již však znamenitý Clairault téměř sto let před tím vědomě a správně tohoto členu užíval. Angličané jej zovou složeným zrychlením centripetálním (compound centripetal acceleration). Explicite zní celý vzorec

$$\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \frac{d^2\bar{s}}{dt^2} + \ddot{\bar{c}} + [\dot{\bar{\omega}}(\bar{r} - \bar{c})] + [\bar{\omega}[\bar{\omega}(\bar{r} - \bar{c})]] + 2\left[\bar{\omega}\frac{d\bar{s}}{dt}\right], \quad \bar{s} = \bar{r} - \bar{c}. \qquad (i)$$

Příklad. Jakožto příkladu na právě odvozené věty můžeme užíti vývodů § 16 a § 19 o rychlosti a zrychlení v souřadnicích polárních. Obecný pohyb (v rovině) bodu M (obr. 20a a 24) můžeme chápati jakožto absolutní pohyb bodu, jenž by se pohyboval podél průvodiče OM pohybem relativním, při čemž průvodič sám jakožto systém pohybovaný Σ' se otáčí kolem osy $\bar{\omega}^0$ bodem O kolmo z papíru vedené a to rychlostí $\dot{\varphi} = \omega$ v prostoru absolutním. Bod O (obr. 20) je současně bodem O i C obr. 44, takže $\bar{c} = 0$. Posiční vektor $\bar{s} = \bar{r}$ a změny relativní jsou pouze změny podél průvodiče, takže $\frac{d\bar{s}}{dt} = \dot{r}\bar{\varrho}$ a $\frac{d^2\bar{s}}{dt^2} = \ddot{r}\bar{\varrho}$. V § 16 a 19 zavedený jedničkový vektor $\bar{\varphi}$ jest patrně $\bar{\varphi} = [\bar{\omega}^0\bar{\varrho}]$.

Dle (a) je rychlost z vedení $\bar{v}_v = [\bar{\omega}\bar{r}] = r\dot{\varphi}[\bar{\omega}^0\bar{\varrho}] = r\dot{\varphi}\bar{\varphi}$. Rychlost relativní podél průvodiče je $\bar{v}_r = \dot{r}\bar{\varrho}$ a celková rychlost absolutní dle (b)

$$\bar{v}_a = r\dot{\varphi}\bar{\varphi} + \dot{r}\bar{\varrho}.$$

To není než vzorec (16a).

Relativní zrychlení $\bar{v}_r = \frac{d^2\bar{s}}{dt^2} = \ddot{r}\bar{\varrho}$.

Zrychlení z vedení (g) jest, ježto $\bar{\omega} = \dot{\varphi}\bar{\omega}^0$ a $\bar{\omega}^0$ je stálé,

$$\bar{a}_v = [\dot{\bar{\omega}}\bar{r}] + [\bar{\omega}[\bar{\omega}\bar{r}]] = \ddot{\varphi}r[\bar{\omega}^0\bar{\varrho}] + \dot{\varphi}^2 r[\bar{\omega}^0[\bar{\omega}^0\bar{\varrho}]] = r\ddot{\varphi}\bar{\varphi} - r\dot{\varphi}^2\bar{\varrho},$$

neboť dle ($8\,d$)

$$[\bar{\omega}^0[\bar{\omega}^0\bar{\varrho}]] = \bar{\omega}^0(\bar{\omega}^0\bar{\varrho}) - \bar{\varrho}(\bar{\omega}^0\bar{\omega}^0) = -\bar{\varrho},$$

poněvadž

$$\bar{\omega}^0 \perp \bar{\varrho}, \quad \text{tedy} \quad (\bar{\omega}^0\bar{\varrho}) = 0 \quad \text{a} \quad (\bar{\omega}^0\bar{\omega}^0) = 1.$$

Zrychlení Coriolisovo je

$$2\left[\bar{\omega}\frac{\bar{d}s}{dt}\right] = 2\dot{\varphi}\dot{r}[\bar{\omega}^0\bar{\varrho}] = 2\dot{r}\dot{\varphi}\bar{\varphi}.$$

Celkem dle (h, i)

$$\bar{a}_a = \ddot{r}\bar{\varrho} + r\ddot{\varphi}\bar{\varphi} - r\dot{\varphi}^2\bar{\varrho} + 2\dot{r}\dot{\varphi}\bar{\varphi},$$

což není než dříve nalezený vzorec ($19\,b$), jenž právě již Clairautovi byl správně znám.

40. Revise axiomatických základů kinematiky.

I. V kinematice zkoumáme pohyby vzhledem k absolutnímu, homogennímu a isotropickému, klidnému prostoru a absolutnímu času t, t. j. přiřazujeme všem bodům prostoru v okamžiku t_0 jedno-jednoznačně všechny body prostoru v jiném okamžiku t_1 (na př. po uplynutí doby velmi krátké) a pravíme pak, že se body ty z prvé polohy pohnuly do polohy druhé během doby $t_1 - t_0$. Nemohli bychom ovšem dojíti žádaného duševního obrazu o tělesech a jejich pohybech, kdyby veškerá místa nekonečného prostoru byla sobě navzájem úplně podobna, rovnocenna. Proto vyznamenáváme omezené, byť i nesmírně veliké množství navzájem odlišných bodů prostorových od ostatních, připínajíce jen na ně svou pozornost a nazývajíce je hmotnými body nebo hmotnými částicemi*). Již tím jim připisujeme jistou vlastnost odlišnosti od okolí, která je uschopňuje býti nositeli fysikálních zjevů nejjednoduššího rázu, totiž pohybů. Této vlastnosti říkáme právě hmotnost. Z jedno-jednoznačného přiřadění jediného určitého bodu v prvé poloze (t_0) jedinému určitému a s prvým totožnému bodu v poloze druhé (v čase t_1), a naopak, můžeme při postupu z t_0 do t_1 vyvoditi předpoklad o nezničitelnosti hmoty, při myšlenkovém postupu zpětném z t_1 do t_0 pak předpoklad neprostupnosti hmoty.

II. Polohové parametry (souřadnice nebo polohový vektor) hmotných bodů předpokládáme spojitými a libovolně často spojitě diferencovatelnými funkcemi času. Ve spojení s prvou větou umožňuje se tím vytvořiti pojmy rychlosti a zrychlení.

III. Zrychlení, a tudíž i rychlosti, jsou vektory a skládají se, přísluší-li témuž bodu, dle pravidla vektorového součtu.

Na těchto axiomech shodují se Boltzmann i Hamel, jinak dva zástupci protichůdných názorů o základech mechaniky.

---

*) Hertzův hmotný bod se skládá z nekonečného množství hmotných částic. Hmotným bodem jest mu hmota v nekonečně malém prostoru. Boltzmann (Wied. Ann. 60, 231. 1897) ukazuje, že jest to zbytečnou a nevhodnou komplikací.

III. Dynamika hmotného bodu.

41. Kinematika a dynamika.

V kinematice hmotného bodu, která nás dosud zaměstnávala, popisovali jsme pohyby pomocí jednoduchých pojmů polohy, rychlosti a zrychlení. Nacházeli jsme se v oblasti čisté geometrie pohybu, v níž k základnímu pojmu prostoru přistoupil druhý, čas. Nemluvili jsme dosud o důvodu, proč v přírodních zjevech naskytají se nám někdy tyto, jindy jiné typy pohybů — to jest pohyby, které mají velmi blízce týž průběh, jako jisté námi zidealisované charakteristické typy. Tím však není ukojena vrozená tužba lidského ducha, která se ptá po příčině zjevů, hledajíc mezi různým dějstvem svazek příčinný, kausální nexus. Právě touto tužbou veden vytvořil lidský duch pojem síly a další na něm spočívající, práce a energie, které připjal k podkladu, substrátu všeho přírodního dění, vně nás hypostasovanému trvalému jsoucnu, substanci, hmotě. Jakmile mluvíme o silách na hmoty působících, a hledáme zákonitost tohoto působení, přecházíme z kinematiky do fysiky. Omezujeme-li se na působení, které se projevuje pohyby, jednáme o vlastní mechanice neboli **dynamice.** Jest tedy mechanika, která se dělívá na nauku o silách v rovnováze, statiku, a o pohybech silami způsobených, kinetiku, v pravdě naukou o pohybech a silách.

O pojmu síly, jeho potřebnosti či nepotřebnosti a podobných otázkách bylo, jest a bude mnoho sporů různých filosofických škol. Nemůžeme se jimi zde obírati a nemůžeme také činiti předmětem svých výkladů noetický podklad a zdůvodnění tohoto pojmu, nemáme-li z oblasti fysiky zabíhati do metafysiky. Proto v následujícím paragrafu pouze ozřejmíme, co asi vedlo lidského ducha, že pojem ten v jeho nynější podobě vytvořil.

Svůj vlastní náhled můžeme shrnouti asi v toto: Jak jinak v žádné vědě není možno, stavíme budovu kinetiky na ideálních koncepcích, na nichž spočívá, podobně jako geometrie na svých axiomech. Pracujíce však k tomu, aby naše věda nebyla neužitečna, nýbrž pomáhala nám ovládati přírodu, musíme stále dbáti toho, aby naše výsledky byly ve shodě se skutečností, s přírodním dějem, s pokusem, experimentem. V této shodě, podaří-li se nám jí docíliti, vidíme ospravedlnění svých koncepcí, předpokladů, hypothes, theorií. Proto také nevznikla moderní mechanika historicky rázem, jakožto abstraktní celek, nýbrž hned, jakmile jednotlivé základní koncepce byly vytvořeny, byly zkoušeny experimentací na skutečném přírodním dění a po případě obměňovány,

až se docílilo souhlasu s ním. Abstraktní mechanika musí jíti ruku v ruce s praktickou, míti styky s fysikou a inženýrstvím, jimiž se ozřejmuje, na nichž se zkouší a které ji vedou k novým úkolům, k pokroku. Jinak vznikl by abstraktní mechanikou jakýsi věšák, na nějž by se věšely příklady z geometrie a analyse a nikoli vlastní theoretický základ pro onu velikou pokusnou, pozorovací a měřící vědu, kterou zveme fysikální mechanikou.

42. Síla a hmota.

Denní zkušenost podává nám tisíceré doklady, že můžeme způsobovati nebo ničiti pohyb namáháním svých svalů, tahem či tlakem, jichž korunním svědkem jsou nám pocity hmatové. Zvykli jsme mluviti o síle, kterou působíme, a o níž z tělesné své zkušenosti víme, že jest vektorem, majíc určitou velikost i směr. Pohyb jest tedy způsobován silou.

Ruka, kterou tlačíme, se deformuje; také, alespoň někdy, pozorujeme deformaci tělesa, které chceme uvésti do pohybu, na př. pružné spirály, kaučuku. Usuzujeme tedy, že také ono těleso na nás působí silou, kterou pociťujeme jakožto odpor, a kterou označujeme stejně názvy tah či tlak. Má zřejmě směr opačný než síla od našich svalů. Tyto poznatky zevšeobecňujeme i na případy, kdy takové deformace přímo nepozorujeme. Víme totiž, že alespoň někdy můžeme ji učiniti viditelnou, užijeme-li síly velmi veliké. Myslíme si, že deformace za malé síly byla příliš nepatrnou, než aby byla na prvý pohled patrnou. Mimovolně jsme vedeni k názoru, že větší síle odpovídá větší deformace, že tedy sílu můžeme vhodnou deformací měřiti.

Od přímého, hmatem bezprostředně daného pocitu projevu naší vlastní síly přicházíme k názoru, že nejen člověk, ale i tělesa mimo něj mohou působiti silami za vhodných okolností, jako nás tlačila námi stlačovaná spirála. Odpoutáváme tedy představu síly od člověka a hypostasujeme ji i do anorganické přírody.

Síla, jejíž „účinkem" jest deformace, a síla, jejíž „účinkem" jest pohyb, jsou totožné; táž síla může dle okolností způsobit ten či onen zjev. Nejběžnější do očí padající příklad toho nám podává síla zemské tíže. Kámen, který tlačí a deformuje ruku, na níž spočívá, pustíme-li jej, padá. Těleso, které zavěsíme na nenapiatou pružnou spirálu, pustíme-li je, způsobuje svou tíží kmitání spirály. Když však zcela zněnáhla posunujeme ruku, na níž těleso spočívalo, směrem dolů, zmenšuje se tlak na ruku, ale ovšem zvětšuje se deformace spirály, která konečně dosáhne jisté konečné velikosti, když tlak na ruku úplně přestal. Ruku můžeme pak odstraniti, aniž se co změní. Poněvadž není žádné na snadě ležící příčiny, proč bychom se museli domnívati, že síla tíže tělesa se změnila, představujeme si věc tak, že zprvu část a konečně celý tlak na naši ruku přejala síla od deformované spirály pocházející, která těleso táhne vzhůru. Síly můžeme skládati.

Síla se tedy může projevovati vznikajícím pohybem — účinkem dynamickým, nebo deformací — účinkem statickým.

Již v dosavadních zkušenostech jsme se setkali s dvojím druhem sil — silami plošnými, které působí, jsouce rozděleny po jisté

ploše, takže na každý plošný element působí jistá malá část celkové síly, a s i l a m i o b j e m o v ý m i, jako tíže, které působí na jednotlivé objemové elementy tělesa. Můžemeť kámen roztlouci na menší kusy a všechny padají (alespoň pokud jsou dostatečně veliké) znatelně stejným způsobem k zemi. Soubor všech kusů sebe menších působí stejnou deformaci téže pružné spirály jako celek. Kdybychom ovšem rozmělnili kámen na jemný prach, padá ve vzduchu značně pomaleji než větší kusy. Leč jest pohodlno, neměniti ničeho na koncepci sil objemových, a viděti toho příčinu v nějakých nových silách, jichž účinek se stává patrným právě následkem onoho rozmělnění. Co se vlastně stalo? Rozmělněním se mnohonásobně zvětšil povrch tělesa. Můžeme-li si tedy mysliti nějaké pohybu překážející síly, jichž velikost roste s povrchem tělesa, jako na př. tření vzduchu, můžeme „vysvětliti" popsaný děj, aniž bychom se vzdávali své základní a svou jednoduchostí se doporučující myšlenky, že existují síly objemové na každou „stejnou" jedničku objemovou, byť sebe menší, stejně působící.

Nyní k tomu p o h y b u. Hodíme-li hladkou těžkou kouli po rovině pokryté pískem, v brzku se zastaví. Na rovné tvrdé půdě běží již dále, na hladké ploše ledové ještě dále. Patrně musíme zastavování se koule, tedy změnu její rychlosti připisovati něčemu mimo ni — působení podkladu na kouli. „Působení" jest však synonymem s „účinkováním" jisté příčiny a tou příčinou klademe právě s í l u, zde sílu odporu. Jest tedy z m ě n a r y c h l o s t i způsobena tím, že síla od podkladu účinkuje na běžící kouli. Na snadě leží extrapolace: Kdyby nekonečně hladký podklad na kouli vůbec neúčinkoval, a nebylo odporové síly vzduchu, tedy kdyby vůbec síly vnější nebylo, neměnila by se rychlost. Přesněji tedy můžeme, ovšem hypotheticky, říci: Síla způsobuje změnu rychlosti, to jest zrychlení, resp. zpoždění. Může tedy také z r y c h l e n í jednoho a téhož tělesa býti m ě r o u s í l y.

Ale ne samo, jakmile se jedná o tělesa různá. K pojmu síly musí se přidružiti další, který rovněž vzniká spolupůsobením pocitů hmatových, totiž pojem h m o t y. Nejnázorněji k němu přicházíme ze statických zkušeností o deformacích. Zavěsme na jemnou spirálu nejprve jednu kuličku, řekněme olověnou, a pak druhou z téže látky, která způsobuje totéž prodloužení. Zavěsíme-li je obě současně, nastane prodloužení blízce dvojnásobné. Zůstane týmž, slejeme-li obě kuličky dohromady v jednu větší. Síla tíže — objemová — zůstala tedy totiž na každý objemový element, nechť se tvar tělesa jakkoli změnil, a „v á h a", to jest silový projev zemské tíže, jest u velké kuličky dvojnásobná. Kdybychom však měli po ruce třetí stejnou „malou" kuličku o „váze" poloviční než ona velká a nechali velikou i malou společně padati k zemi, zjistili bychom, že padání obou je stejné, tedy zrychlení totožné. Dvojnásobná síla způsobila tedy u veliké kuličky dvojnásobné váhy totéž zrychlení, jako u malé síla jednoduchá. Není tedy síla měřena prostě zrychlením, nýbrž zrychlením násobeným zcela určitým faktorem, který nám dává pokus se spirálou. Tento faktor, úměrný váze, nazýváme h m o t o u tělesa a pravíme, že veliká kulička má dvojnásobnou hmotu než malá. S í l u m ě ř í m e t e d y s o u č i n e m z h m o t y a z r y c h l e n í.

Naše jednoduché vývody nejsou dovozením pojmů síly a hmoty, nýbrž pouhou ukázkou, jak asi může k živému názoru (a to především názoru danému vlastní tělesnou zkušeností) přistoupiti tvůrčí mohutnost lidského ducha, aby mohla vytvořiti nový, zkušeností přímo nedaný pojem síly. Děje se tak abstrakcí (analysou) a opětnou synthesou, Baconovým „dissecare naturam“, rozkladem přírodních dějů na jednodušší prvky, vybráním podstatných a novým jich složením. Lidský duch pohyboval se sice vždy těmito drahami, leč dospěl k ruzným výsledkum, dle toho, které prvky vybral z velikého množství pozorovaných jakožto „podstatné“. Tak na př. právě naopak učil Aristoteles, nejsystematičtější duch starověku, že pohyb „spontánně“, sám sebou, bez vnějších příčin mizí, takže k udržování stálého pohybu je potřebí síly. Tělesa dělila se na těžká, rychle spějící dolů, a lehká, stoupající nebo pomaleji klesající, tak aby se dostala do „přirozeného“ pořádku, dle něhož tělesa nejtěžší mají zaujímati polohu nejnižší, tělesa postupně lehčí pak pořadem polohy vyšší. Teprve moderní mechanika uvažuje asi tak, jak jsme nastínili. Jejím zakladatelem je geniální Galileo Galilei (1564—1642), který ve svých dodnes čtení hodných „Discorsi“ (1638) prvý systematicky zkoumá tak častý zjev volného pádu metodou, jež jest směsí experimentů a logických i intuitivních úvah. Nachází nejen, že všechna tělesa „podstatně“ stejným způsobem padají k zemi, ale nalézá také zákon, dle něhož padají. Stejně geniální Isaac Newton (1642—1727) staví pak budovu mechaniky na pevných základech několika axiomu. Tak nazýváme ostře formulované navzájem nezávislé a sporu neobsahující, z jednodušších vět neodvoditelné*) předpoklady, na nichž lze důsledně a bezvadnými logickými soudy celou stavbu vědy vytyčiti.

Ryze formální stanovisko Kirchhoffovo, dle něhož v popise přírodních dějů má síla pouze nominální význam, jakožto pouhý název pro součin z hmoty a zrychlení (t. zv. „hmotové zrychlení“, Massenbeschleunigung některých) se nyní většinou opouští.

43. Základní věty.

Newton ve svých nesmrtelných „Philosophiae naturalis principia mathematica“ (1687, 2. vyd. 1713), když byl definoval hmotu jakožto součin z objemu a hustoty (lépe specifické hmoty), staví za základ dynamiky následující tři „axiomata sive leges motus“:

1. „Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statum suum mutare.“ Česky: „Každé těleso setrvává ve svém stavu klidu nebo přímočarého, rovnoměrného pohybu, není-li nuceno ‚vtisknutými‘ silami stav svůj změniti.“

2. „Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae et fieri secundum lineam rectam, qua vis illa imprimitur.“ Česky slovně: „Změna ‚pohybu‘ jest úměrna hybné vtisknuté síle a děje se v přímce, v níž síla se vtiskuje.“ K porozumění zastaralých termínů dlužno uvésti, že slovem motus = pohyb definoval dříve již Newton součin z hmoty a její rychlosti, který nyní označujeme slovem hybnost

*) Dle Thomsona (Lorda Kelvina) jest axiom věta, jejíž pravdivost musí býti přiznána, jakmile jsme jasně pochopili výrazy, jimiž jest vyjádřena.

nebo impuls; síly pohyb způsobující nazýváme ‚ponderomotorickými‚ nebo hybnými. Volný hladší překlad by zněl: Změna hybnosti jest úměrna hybné vnější síle a spadá s ní do téhož směru.

3. „Actioni contrariam semper et aequalem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse aequales et in partes contrarias dirigi.“ Česky: „Každá akce (působení) má v zápětí stejnou reakci (protipůsobení) opačného směru: čili vzájemná působení dvou těles jsou stejně veliká a opačného směru.“

K těmto větám druží se Newtonův „přídavek 1 a 2“, v němž učí větě o rovnoběžníku sil.

Přes nehynoucí zásluhy Newtonovy nelze upříti, že moderní kritika právem proti logické výstavbě jeho axiomů leccos namítá. Definice hmoty, jak Newton ji podává, jest nepotřebna — poskytujeť věta ta vlastně definici hustoty, nebo lépe řečeno, hmoty specifické, t. j. hmoty obsažené v jedničce objemové. Prvý zákon, vlastně definice síly nulové, jest zbytečný, jsa obsažen v druhém. Nazývá se někdy větou o setrvačnosti. Druhý zákon sám nepodává definice hmoty, proto nemůže státi na prvém místě. Teprve z třetího zákona lze vyvoditi definici poměru hmot a proto patří před zákon druhý. Věta o rovnoběžníku sil má býti obsažena mezi axiomy.

To jsou asi námitky Machovy, od něhož také pochází myšlenka, definovati hmoty ze zákona akce a reakce. Mach formuluje*) základní věty na zkušenosti založené a axiomatické základní definice takto:

a) Věta zkušenostní: Proti sobě stojící tělesa určují za jistých podmínek, které musí experimentální fysika udati, na sobě navzájem opačná zrychlení ve směru jejich spojnice. (Věta o setrvačnosti jest v tom obsažena.)

b) Definice: Poměr hmot (Massenverhältnis) dvou těles jest záporným převratným poměrem vzájemných zrychlení.

c) Věta zkušenostní: Poměry hmot (Massenverhältnisse) jsou nezávisly od druhu fysikálních stavů těles (jsou-li elektrická, magnetická atd.), která podmiňují vzájemné zrychlení, a zůstávají také tytéž (totiž poměry hmot), byly-li získány nepřímo nebo přímo (prostředně nebo bezprostředně).

d) Věta zkušenostní: Zrychlení, která několik těles $A, B, C, \ldots$ určuje na jediném tělese K, jsou na sobě nezávisla. (Z toho plyne bezprostředně věta o rovnoběžníku sil.)

e) Definice: Pohybující síla je součin z hmoty (Massenwert) tělesa a zrychlení na něm určeného.

Určíme-li dle definice (*b*) poměr μ_{12} hmot dvou těles K_1 a K_2, podobně μ_{23} u těles K_2 a K_3 a μ_{13} u K_1 a K_3, plyne dle (*c*), že platí $\mu_{12} \cdot \mu_{23} = \mu_{13}$. Můžeme tudíž položiti

$$\mu_{12} = \frac{m_1}{m_2}, \quad \mu_{23} = \frac{m_2}{m_3}, \quad \mu_{13} = \frac{m_1}{m_3},$$

kde m_1 charakterisuje těleso K_1, m_2 podobně K_2 a m_3 jen K_3; m_1, m_2, m_3 jsou hmoty těles těch.

*) E. Mach: „Mechanik in ihrer Entwicklung.“ 7. vyd. 1912, str. 241.

Machův empirický, resp. empiriokritický námět rozvedl přesněji Boltzmann*), vztahuje jak jinak těžko možno, větu (*a*) pouze na hypothetické hmotné částice. Staví tudíž atomistický základ mechaniky na centrálních zrychleních částic. Vskutku se zpravidla ať otevřeně či skrytě postupuje v mechanice dle tohoto velmi názorného a v základě velmi jasného obrazu. I Hamel, jeho odpůrce má ve své pro začátečníka sice poněkud obtížné, ale jinak velmi pěkné knize „Elementare Mechanik" 60-stránkový oddíl „O tak zvané mechanice bodové". Boltzmann nedokresluje přechod od soustavy bodové k tělesu zvláště pak nemluví o koncepci sil plošných, která atomistickému základu mechaniky činí největší obtíže.

V běžných i velmi dobrých učebnicích mechaniky nevěnuje se zpravidla úvahám o jejich základech mnoho místa. Tak příkladem veškeré anglické učebnice staví mechaniku na nezměněné axiomy Newtonovy, ba Thomson a Tait a z nejnovějších i Webster tvrdí, že vubec není možno nahraditi je něčím lepším. Začátečník přenáší se živým názorem o hmotě a síle snáze přes logické a metafysické obtíže přesné formulace těchto pojmů, než fysiku pěstující filosof nebo matematik, jenž chce míti naprostou jasnost o základech, na nichž buduje.

Axiomy Boltzmannovy. Uvedeme na tomto místě axiomatické předpoklady ve formulaci Boltzmannově, které zvláště začátečníkovi jsou velmi přístupny, spočívajíce na průhledném atomistickém obraze o hmotě. Řadí se k prvým třem axiomum kinematickým, uvedeným v § 40 a jsou:

IV. Každé dvě hmotné částice působí na sebe navzájem, udělujíce sobě navzájem zrychlení. Je-li jejich vzájemná poloha charakterisována vektorem od prvé k druhé taženým $\bar{r}_{12} = r_{12}\bar{\rho}_{12}$, nezávisí toto zrychlení ani na absolutním čase ani na směru jedničkového vektoru $\bar{\rho}_{12}$ v prostoru, jsouc jedině funkcí velikosti vzdálenosti r_{12}. Je-li směr zrychlení částice druhé následkem přítomnosti částice prvé $-\bar{\rho}_{12}$, t. j. směřuje-li k prvé, jest směr zrychlení, které udílí druhý bod prvému $+\bar{\rho}_{12}$, směřuje tedy k bodu druhému; říkáme, že se přitahují. Naopak mohou ony směry býti také $+\bar{\rho}_{12}$ u druhé, $-\bar{\rho}_{12}$ u prvé částice, když se odpuzují. Krátce můžeme říci: Vzájemná zrychlení jsou vždy centrální a opačného směru.

V Působí li prvý bod na druhý zrychlením $\bar{a}_{21} = \mp \mu_{12} F(r_{12})\bar{\rho}_{12}$, druhý na první zrychlením $\bar{a}_{12} = \pm F(r_{12})\bar{\rho}_{12}$ (platí buď obě horní nebo obě dolní znaménka), nejsou obě zrychlení obecně stejně veliká, ale poměr obou velikostí, daný prostým číslem μ_{12}, je pro tuto dvojici bodu ve všech časech a vzdálenostech veličinou nezměnitelně touž. Podobně u částice 1 a 3 poměr zrychlení $\bar{a}_{31} = \mp \mu_{13}\Phi(r_{13})\bar{\rho}_{13}$ a $\bar{a}_{13} = \pm \Phi(r_{13})\bar{\rho}_{13}$, tedy μ_{13}. Předpokládáme pak, a dusledky jsou ve shodě se zkušeností, že částice druhá působí na třetí zrychlením $\bar{a}_{32} = \mp \mu_{23}\Psi(r_{23})\bar{\rho}_{23}$, třetí na druhou zrychlením $\bar{a}_{23} = \pm \Psi(r_{23})\bar{\rho}_{23}$, kde nezměnitelný poměr μ_{23} lze vypočísti ze známých μ_{12} a μ_{13} dle předpisu

$$\mu_{12} \cdot \mu_{23} = \mu_{13}. \qquad (a)$$

Abychom tomuto předpokladu dali souměrnější tvar, přiřkněme prvé částici libovolnou ale za všech časů a na všech místech nezměnitelnou kladnou veličinu m_1. Podobně přiřkněme částici druhé veličinu m_2 a třetí m_3, které však nejsou libovolny, nýbrž vázány podmínkami

*) L. Boltzmann: Vorles. über Prinzipe der Mechanik, 2 díly, Lipsko, 1897 a 1904.

$$\mu_{12} = \frac{m_1}{m_2} \text{ a } \mu_{13} = \frac{m_1}{m_3},$$

takže i ony jsou nezměnitelné časem i místem. Formálně stejně vytvořené $\mu_{23} = \frac{m_2}{m_3}$ vyhovuje pak uvedenému, zkušeností potvrzenému vztahu (a). Dosazením plyne (nechť užijeme hořeních či spodních znamének, při přitahování nebo odpuzování)

$$\begin{aligned} m_1\bar{a}_{12} &= \mp m_2\bar{a}_{21}, \\ m_1\bar{a}_{13} &= \mp m_3\bar{a}_{31}, \\ m_2\bar{a}_{23} &= \mp m_3\bar{a}_{32}. \end{aligned} \tag{b}$$

Jest patrno, že stejným postupem mužeme přiřknouti i čtvrté a dalším časticím veličiny m_4 a následující, které vesměs jsou fysikálně téže dimense. Nazýváme je **hmotami** částic. Z hmot všech částic jest jedna libovolná, veškeré ostatní však jsou touto jedinou a zkušenostními fakty určeny. Ze zpusobu odvození plyne, že jsou to veličiny **skalární**.

VI. Pro součiny z hmoty částice a jejího zrychlení, jako vystupují v rovnicích (b), zavádíme název **síla na částici pusobící**. Místo abychom řekli: „Druhá částice zpusobuje u prvé zrychlení $\bar{a}_{12}$," pravíme: Druhá částice pusobí na prvou hmoty m_1 silou $m_1\bar{a}_{12} = \bar{f}_{12}$, která má v zápětí zrychlení $\bar{a}_{12}$, jež obdržíme, dělíce sílu hmotou částice, na niž pusobí. **Síla** je patrně **vektor** téhož směru jako **zrychlení**; jsou tedy předpokládané síly **silami centrálními**. Pusobí-li na tutéž částici několik n sil, bude dle axiomu III, § 40, výsledné zrychlení dáno vektorovým součtem jednotlivých

$$\bar{a}_1 = \sum_{\nu=2}^{n} \bar{a}_{1\nu} = \frac{1}{m_1} \sum_{\nu=2}^{n} \bar{f}_{1\nu}. \tag{c}$$

V důsledku definice síly mužeme součin $m_1\bar{a}_1$ hmoty a výsledného zrychlení částice zváti výslednou silou $\bar{f}_1$, na ni pusobící, takže

$$m_1\bar{a}_1 = \bar{f}_1 = \sum_{\nu=2}^{n} \bar{f}_{1\nu} \tag{d}$$

nám dává pravidlo o skládání sil, či o mnohoúhelníku sil.

Všimněme si ještě rovnic (b) a přeložme prvou do nově zavedeného názvosloví. Na levé straně stojí síla, kterou pusobí druhá částice na prvou na pravo pak síla, kterou působí prvá částice na druhou. Obě jsou si až na znamení rovny. Opačné znamení znamená opačný směr. Vyjadřují tedy rovnice (b) **třetí axiom Newtonuv**.

Rovnice (d) v případě, že výsledná síla $\bar{f}_1 = 0$, praví, že $\bar{a}_1 = 0$, čili je-li $\bar{r}_1$ polohový vektor k libovolnému pevnému počátku O vztažený,

$$\bar{a}_1 = \frac{d^2\bar{r}_1}{dt^2} = 0, \qquad \frac{d\bar{r}_1}{dt} = \bar{v}_1 = \text{stálé} = \bar{v}_0, \qquad \bar{r}_1 = \bar{v}_0 t + \bar{r}_{10}.$$

Nepusobí-li tedy na částici žádná „vnější" (od jiných částic pocházející) síla, pohybuje se přímočaře a rovnoměrně, ovšem v absolutním prostoru. Byla-li její rychlost $\bar{v}_0$ jednou nulou, zůstává jí i nadále, částice zůstává v absolutním klidu. To není než **prvý axiom Newtonuv**, často označovaný názvem **věta o setrvačnosti**.

Druhý axiom Newtonův za stálé hmoty není než přepsáním rovnice (*d*) na

$$\bar{f}_1 = m_1 \bar{a}_1 = m_1 \frac{d^2 \bar{r}_1}{dt^2} = m_1 \frac{d}{dt}\left(\frac{d\bar{r}_1}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(m_1 \bar{v}_1). \qquad (e)$$

Zde zatím nemůžeme ničeho tvrditi o případě, kdyby m_1 bylo proměnlivé s časem, neboť u hmotného bodu (hmotné částice) její definicí je proměnlivost hmoty m_1 vyloučena. Ale ovšem může se měniti hmota soustavy částic, o níž teprve jest nám jednati, tím, že některé přibudou či ubudou. Již zde lze říci, že ani v tom případě nestojí na pravé straně snad $\dot{m}\bar{v} + m\dot{\bar{v}}$, nýbrž vždy $m\dot{v} = m\ddot{r}$, které ovšem má za nezměněného m pouze platnost pro uvažovaný právě okamžik.

Hamel o síle. Hamel odmítá pojem hmotného bodu jakožto základ pro výstavbu hmoty a vychází od hmotou vyplněného objemového elementu, jichž soubor vyplňuje spojitě prostor a tvoří tělesa fysikální. Vytyčuje také řadu axiomů rázu čistě matematického, na nichž lze vybudovati mechaniku jakožto vědu čistě matematickou, hově tím směru myšlení, jenž se nyní těší značné oblibě. Přehledněji než v citované knize uvádí je v pojednání: „Über die Grundlagen der Mechanik“ (Math. Annalen 66, 1909, str. 350—397).

Po našem soudě se jeho úplně abstraktně matematický základ mechaniky nehodí pro knihu určenou začátečníkům, kteří daleko snáze operují v myšlení průhledným obrazem hmotných částic a jejich vzájemného působení. Ostatně spočívá na něm převážná většina všech dosavadních učebnic mechaniky, počínaje klasickou Poissonovou, který vědomě obraz ten staví v popředí na počátku minulého století, jako Boltzmann na začátku století našeho.

Zde budiž jen krátce reprodukován myšlenkový postup, jímž Hamel v knize své ukazuje, že síla není prostým Kirchhoffovým „hmotovým zrychlením“ (Massenbeschleunigung, jakožto čistě matematický výraz hmota × zrychlení, ma): Pro pohyby jakožto nejjednodušší přírodní zjevy dostáváme určité zákony, a to pro pohyby určitých druhů zákony typické. Tak jsou pohyby vržených těles na zeměkouli vesměs typu $\bar{r} = \frac{1}{2}\bar{g}t^2 + \bar{v}_0 t + \bar{r}_0$ (viz 22*a*). Pro tuto třídu pohybů je charakteristické, že $\bar{g}$ je pro totéž místo na zeměkouli stálý vektor; $\bar{v}_0$ a $\bar{r}_0$ jsou pro různé individuální případy různé. Podobně typickým zákonem pro pohyby těl nebeských jest (35*e*) $\bar{a} = -\mu\bar{\varrho} : r^3$, pro pohyby spirály, na níž jest zavěšeno nějaké těleso, zákon (26*f*) $\bar{s} = s_m \sin(\omega t + \varphi_0)$ nebo totožný (26*d*) $\ddot{\bar{s}} = \bar{a} = -\omega^2 \bar{s}$. Tento zákon můžeme nejsnáze velmi přibližně potvrditi pokusem s různými spirálami a různými na ně zavěšovanými tělesy. Dejme tomu, že pro

spirálu první a tělesa $K_1, K_2, \ldots$ nalezneme $\omega_{11}, \omega_{21}, \ldots$
spirálu druhou a tělesa $K_1, K_2, \ldots$ pak $\omega_{12}, \omega_{22}, \ldots$

Srovnáním nalezených hodnot snadno potvrdíme, že $\omega_{11} : \omega_{21} = \omega_{12} : \omega_{22}$ atd., čili že poměr těch ω pro různá tělesa nezávisí od toho, které spirály jsme užili. Může tedy záviseti pouze od těles $K_1, K_2 \ldots$

Položme $\omega_{\mu\nu} = \sqrt{\lambda_\nu : m_\mu}$, kde λ závisí jen od spirály, m jen od tělesa. Jedno z m položme libovolně rovno jedničce, čímž ostatní jsou určeny. Ta m_μ nazýváme hmotou těles, zde tělesa K_μ. Proč však volíme tak složitou závislost na m? Necháme-li kmitati libovolnou spirálu za malých rozkmitů nejprve se zavěšeným tělesem K_1, pak s K_2 a potom s oběma $K_1 + K_2$ současně

zavěšenýma, nalezneme doby kyvu T_1, T_2 a T_{12}, které vyhovují vztahu $T_1^2 + T_2^2 = T_{12}^2$, nebo dosadíme-li $T = 2\pi : \omega$ (26 c) $m_1 + m_2 = m_{12}$, což jest velmi výhodný aditivní zákon pro hmoty. Pro pohybový zákon pak plyne dosazením za ω^2 tvar $m\bar{a} = -\lambda\bar{s}$, kde λ při celé třídě pohybů závisí pouze od užité spirály. Tohoto pokusu nelze ovšem užíti za definici hmoty, neboť bude stížen různými chybami — kmity budou tlumené, m nám vyjdou jen na několik procent správně, ježto část spirály, vždy různá kmitá s sebou a pod. Leč pokus ukazuje přece, že hmota tělesu přiřčená je jedním z faktorů setrvačnosti. Výraz $-\lambda\bar{s}$ nazýváme silou, kterou spirála na zavěšené těleso K působí. Není to prosté hmotové zrychlení ma, vždyť není v něm explicite ani hmota ani zrychlení obsaženo, ale typický zákonitý výraz pro hmotové zrychlení u celé třídy idealisovaných pohybů, je to zákon hmotového zrychlení a ten právě nazýváme silou. Podobně je Newtonskou přítažlivou silou slunce na planetu hmoty m výraz $-m\mu\rho : r^2$ a p. Dle Hamelova názoru nelze pak říci, „síla je příčinou pohybu“, neboť síla není zjevem nebo datem přírodním nýbrž výtvorem myšlení. Mužeme však zváti soubor přírodních zjevů či dat (geometrické, fysikální nebo chemické povahy), na jichž základě jsme s to tvrditi, že jistá síla existuje, příčinou síly, nebo příčinou určité třídy pohybových zjevů. V našich příkladech je příčinou síly po prvé spirála sama a její okamžité prodloužení (či zkrácení) s po druhé slunce a nebeské těleso ve vzdálenosti r od něho. Volnost, aby pohyb vskutku nastal, nepočítáme k příčinám, je-li síla ostatními daty co do směru i velikosti určena.

44. Matematická formulace základů. Jedničky hmoty a síly.

Nepouštějíce se do dalších úvah o původu, podstatě a oprávněnosti pojmů, kterých nadále budeme užívati, nýbrž spoléhajíce na intuitivní názor, na denní zkušenosti založený, uveďme si je znova v matematické formulaci na mysl. Určení času, a pokud není výslovně jinak řečeno, i určení místa vztahujtež se na absolutní čas a absolutní, klidný prostor.

Každému hmotnému bodu („částici“) připisujeme jistou s časem neproměnnou konstantu, kterou nazýváme jeho hmotou m.

Síly na ni působící měříme součinem hmoty a zrychlení. Působí-li na tutéž částici různé síly $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \ldots$, nemění se účinek jedné přítomností druhé, takže síla výsledná neboli výslednice (resultanta) $\bar{F}$ sil složkových (složek, komponent) $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$ jest dána jejich vektorovým součtem. Můžeme tedy psát

$$\bar{F} = \sum_\lambda \bar{F}_\lambda = m\bar{a} = m\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = m\frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\bar{v}), \tag{a}$$

kde předpokládáme hmotu m stálou.

V této větě jest tedy obsaženo pravidlo o skládání nebo naopak i rozkládání sil, dle něhož můžeme několik sil nahraditi jedinou, nebo jedinou několika.

To je vše, co potřebujeme znáti při budování dalších pojmů dynamiky hmotného bodu. Budiž výslovně poznamenáno, že hmotným

bodem můžeme mysliti těleso nesmírně malé nebo i rozměrů konečných, je-li isolováno, nebo jsou-li všechny jeho rozměry nesmírně malé proti jeho vzdálenosti od jiných, na ně působících „hmotných bodů". Zrychlení a musí ovšem býti ve všech částech jeho konečného objemu totéž. Příkladem jsou planeta a slunce, abstrahujeme-li od jejich pohybů otáčivých.

Jsou-li složky daných sil $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$, ... v osách pravoúhlých souřadnic, tedy jejich průměty na tyto osy $X_1, X_2, .., Y_1, Y_2, .., Z_1, Z_2 ..$ a složky výslednice $\bar{F}$ podobně X, Y, Z, dává (a) semikartézským rozepsáním

$$\bar{\imath}X + \bar{\jmath}Y + \bar{k}Z = \bar{\imath}(X_1 + X_2 + ..) + \bar{\jmath}(Y_1 + Y_2 + ..) + \bar{k}(Z_1 + Z_2 + ..),$$

čili $$X = \sum_\lambda X_\lambda, \quad Y = \sum_\lambda Y_\lambda, \quad Z = \sum_\lambda Z_\lambda, \qquad (b)$$

jakožto výraz věty o rovnoběžníku (lépe polygonu) sil, nebo výraz vektorového sčítání.

Podobně plyne z druhé části (a), čili tak zvané rovnice pohybové ve tvaru vektoriálním

$$\bar{F} = m\ddot{\bar{r}}, \quad \text{dle } (18\,c, d) \quad X = m\ddot{x}, \quad Y = m\ddot{y}, \quad Z = m\ddot{z}, \qquad (c)$$

kteréžto pohybové rovnice hmotného bodu v souřadnicích pravoúhlých budeme pro krátkost zváti rovnicemi Newtonovými. Prvý je napsal v tomto tvaru Maclaurin (Treatise on Fluxions, 1742). Je-li $\bar{F} = 0$, t. j. $X = Y = Z = 0$, je důsledkem prvá věta Newtonova $\ddot{\bar{r}} = 0$, $\dot{\bar{r}} = \bar{v}_0$, $\bar{r} = \bar{v}_0 t + \bar{r}_0$, nastává přímočarý, rovnoměrný pohyb hmotného bodu.

Má-li klidný bod za působení sil $\bar{F}_1, \bar{F}_2, ...$ zůstati v klidu, musí

$$\bar{F} = \sum_\lambda \bar{F}_\lambda = 0, \quad \text{čili} \quad \sum_\lambda X_\lambda = \sum_\lambda Y_\lambda = \sum Z_\lambda = 0, \qquad (d)$$

tedy buď veškeré síly býti rovny nule, nebo polygon sil býti uzavřený. Vztahy tyto nazýváme podmínkami rovnováhy hmotného bodu.

Dle dosavadních základních rovnic není možno obyčejnou mechanickou hmotu vyjádřiti pomocí délky a času. Připisujeme jí vlastní fysikální dimensi, označovanou $[M]$. Jedničkou hmoty v absolutní soustavě měr je jeden gram, přibližně to hmota obsažená v 1 cm^3 vody za teploty 4^0 C, přesně tisící část normálního kilogramu, kusu slitiny platiny a iridia, chovaného v mezinárodním Bureau des poids et mesures v Pavillonu du Breteuil (Paříž).

Síla má fysikální rozměr $[MLT^{-2}]$ a její absolutní jedničkou je dle základní rovnice síla, která uděluje hmotě 1 gramu zrychlení 1 cm/sec^2; nazývá se dyna a píše 1 $gr\ cm/sec^2$. Milion (10^6) dyn je megadyna. Technicky měříme někdy síly vahami určitých těles v poli zemské tíže. Ježto váha 1 gramu v tomto poli uděluje hmotě 1 gr zrychlení asi 981 cm/sec^2, poněkud různé v různých místech zemského povrchu, je váha gramu rovna asi 981 dyn, čili dyna je asi o 2% větší síla než váha miligramu. Váha 1 kg, kterou je dobře na rozdíl od hmoty kilogramu označovati kg^*, je dle toho asi 981000 dyn = 0·981 megadyn.

45. Některé síly. Silové pole.

Dle svých definic víme, že všude tam, kde se hmotný bod pohybuje jinak než přímočaře a rovnoměrně*), musíme předpokládati existenci nějaké síly. A tak můžeme, změříme-li zrychlení u různých pohybů, nalézti výraz pro působící výslednou sílu. Ovšem můžeme také naopak, změříme-li sílu jakožto funkci polohy hmotného bodu, výpočtem stanoviti charakter pohybu. Jsouť takováto měření možna pomocí statického stanovení sil, jak uvidíme později. Tento postup jest však v praxi daleko řidší než prvý.

Dle základních vět můžeme nyní přeložiti do dynamického způsobu vyjadřování celou řadu poznatků kinematických. Tak na př. rovnice (18 *h*) nám praví: Při obecném křivočarém pohybu hmotného bodu *m* působí síla daná svojí složkou ve dráze $m\frac{d^2s}{dt^2}\bar{\tau}$ a na ní kolmou složkou v normále, složkou centripetální $m\frac{v^2}{R}\bar{\nu}$. Nebo z (25 *d*): Působí-li na hmotný bod *m* síla $-\frac{mv^2}{r_0}\bar{\varrho}$, vzniká stejnoměrný pohyb kruhový a naopak. Ze vztahu (29 *j*): Působí-li na hmotný bod *m* síla $-m\omega^2\bar{r}$, vzniká pohyb harmonický, obecně v elipse, ve zvláštních případech v kruhu nebo podél přímky. Konečně (35 *e*): Silou $-\frac{m\mu}{r^2}\bar{\varrho}$ vzniká obecně pohyb hmotného bodu *m* v kuželosečce, po případě v přímce.

Poslední dva příklady poslouží nám vhodně k osvětlení pojmu silového pole. Proveďme následující myšlenkový pokus: Nesmírně malý hmotný bod (hmoty *m*) budiž uveden do různých míst *P* prostoru a tam (nejjednodušeji bez jakékoli počáteční rychlosti $\bar{v}_0 = 0$) přenechán sám sobě. Pozorujme, zdali a jak se počne pohybovati. Analysujíce matematicky svá pozorování, omezená na nejbližší okolí místa *P*, vypočtěme zrychlení $\bar{a}$ bodu *m*. Pak můžeme tvrditi, že v místě *P* působí na náš hmotný bod síla $\bar{F} = m\bar{a}$ určité velikosti a určitého směru. Opakujíce tento myšlenkový pokus v mnoha místech pokusného prostoru, můžeme alespoň v jednoduchých případech nalézti sílu $\bar{F}$ jakožto analytickou funkci místa, charakterisovaného polohovým vektorem $\bar{r}$, vztaženým ke vhodně volenému pevnému bodu O ($\bar{r} = 0$), čili jakožto funkci „bodovou". Celý prozkoumaný prostor, zvaný silovým polem, můžeme mapovati, myslíce si v každém jeho bodě znázorněnou příslušnou sílu $\bar{F}$, nebo ještě lépe $\bar{F} : m = \bar{a}$, sílu na jedničku hmotnou**), čili t. zv. intensitu silového pole. Ze vzniku tohoto pojmu je patrno, že intensita pole je veličina jednoznačná; nemůžeť síla v témž bodě míti ani dva směry ani dvě různé velikosti. Velice

---

*) Za valné většiny pohybů pozemských lze je prakticky vztahovati k libovolnému bodu, pevně spojenému s některým místem povrchu zemského (viz Mach).

**) Jedná-li se o „hmoty" jiné než mechanické, tedy na př. o elektrické nebo magnetické, jimž přísluší jiný rozměr než [*M*], nebude ovšem intensita pole míti rozměr zrychlení.

snadno utvoří si každý obraz silového pole pro uvedené příklady $\bar{a} = -\omega^2 r$ nebo $\bar{a} = -\mu\varrho : r^3$. Oba jsou příklady silových polí radiálních.

V našem počínání vězí ovšem už hodný kus abstrakce od původního pojmu síly; myslíme ji jakoby odpoutánu od hmoty, na niž působí a připjatu na každý geometrický bod prostoru, tedy existující i tehdy, není-li v bodě tom hmoty, na niž by působila. Ale živá představa silového pole je prospěšna. Víme totiž, že kdybychom do určitého místa $\bar{r}_1$ přivedli libovolnou hmotu m_1 dostatečně malých rozměrů, bude na ni působiti síla rovná součinu z hmoty té m_1 a příslušné k $\bar{r}_1$ intensity pole $\bar{a}_1$.

Na tomto místě nejlépe pochopíme smysl omezení, které jsme uložili v § 44 objemu hmotného bodu. Ve spojitých silových polích bude se intensita pole v nekonečně blízkém okolí místa P i co do velikosti i co do směru nekonečně málo lišiti od intensity v bodě P samém. „Hmotný bod“ smí míti nejvýše takový objem, aby ve všech jeho částech byla intensita pole prakticky stejná, to jest, aby se nelišila od hodnoty střední nad mez, danou přesností fysikálního měření*).

V přesně homogenním poli, jehož intensita jest všude táž, $\bar{a} = \bar{a}_0$ = prostorově stálý vektor, můžeme volné těleso libovolných rozměrů považovati za hmotný bod.

Ovšem mohou se silová pole měniti s časem; naše úvahy pak platí pro určitý okamžik časový.

46. Silokřivky.

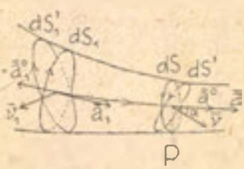
Silové pole můžeme mapovati ještě jinak. Mysleme si, že do libovolného místa P_1 (obr. 45) přivedeme hmotný bod, pro jednoduchost hned o hmotě jedničkové. Podléhaje síle $\bar{a}_1$, počne se z klidu pohybovati v jejím směru, takže během nekonečně krátké doby se octne v místě nekonečně blízkém P_2. Tam má však intensita pole $\bar{a}_2$ směr a velikost nekonečně málo odlišné od $\bar{a}_1$. Směr nového pohybu — opět z klidu počínajícího — z P_2 do P_3 jest tedy a^0_2. Postupujeme-li podobně dále, obdržíme jakožto limitu lomené čáry $P_1 P_2 P_3 \ldots$ křivku obecně prostorovou, která se vyznačuje tou vlastností, že


Obr. 45.

*) Zde po prvé a také nadále všude, kde přecházíme od pojmu hmotného bodu nebo nesmírně malé částice k tělesům konečných dimensí, vystupují v mechanice podobné přechody jako mezi matematikou přesnou (precisní) a přibližnou (aproximativní), o nichž pěkně pojednává F. Klein (Anwendung der Differenzial- und Integralrechnung auf Geometrie, Lipsko 1902). Můžeme vůbec říci, že mechanika se základy rázu spíše matematického, vycházející z pojmu objemového elementu (Hamel), si počíná podobně jako matematika precisní, kdežto mechanika, vybudovaná na fysikálním pojmu atomistického hmotného bodu (Boltzmann) musí se při přechodu k spojitému vyplnění prostoru hmotou odvolávati na základy matematiky aproximativní, v níž mizí základní a filosoficky přesně nepřeklenutelný rozdíl mezi spojitým a nespojitým.

tečná k ní v libovolném bodě vedená udává směr intensity pole. Nazýváme ji silokřivkou, nebo — snad lépe, ježto na př. v poli homogenním je přímkou — siločarou.*) Jest patrno, že se dvě silokřivky nemohou nikde navzájem protínati, ježto směr síly jest v každém bodě pole veličinou jednoznačnou. Svazkem ∞^2 siločar vyplnili bychom celý zkoumaný prostor, celé silové pole; dávají nám zatím pouze jediný určující údaj intensity pole jakožto vektoru, totiž jeho směr.

Můžeme však vhodným obratem docíliti toho, že nám naše velmi názorné silokřivkové mapování pole poskytne i druhý potřebný údaj, totiž velikost intensity. Ač věc sama má zásadní důležitost pro ty obory fysiky, v nichž se silokřivkového obrazu polí zvláště často užívá, totiž pro nauku o elektřině a magnetismu, zmiňujeme se o ní již zde, ježto celou svou podstatou patří do mechaniky.



Obr. 46.

Mysleme si kolem bodu P, v němž si chceme sílu znázorniti, libovolnou nesmírně malou plošku, na př. kolmou na silokřivce, příslušné bodu P, a v duchu proložme silokřivky všemi body jejího obvodu (obr. 46). Vznikne útvar trubicovitý a dle toho silotrubicí zvaný (Faradayův sfondyloid), který vždy má tu význačnou vlastnost, že jeho pláštěm žádné silokřivky ani nevstupují dovnitř ani nevystupují ven. A nyní předepišme definitoricky: Silové pole nebudeme mapovati všemi silokřivkami, nýbrž zcela určitým počtem silotrubic tak voleným, že libovolnou malou ploškou dS, myšlenou kolem P kolmo na směru síly, prochází počet dN silotrubic takový, že podíl $dN : dS$, to jest počet silotrubic (dostatečně malou) jedničkou plošnou procházejících, je numericky roven velikosti intensity pole v bodě P. Mapujeme-li pole takovýmito jedničkovými silotrubicemi, z nichž každá odpovídá jedničce síly, obdržíme obraz, který dává všechny potřebné údaje o rozdělení síly v celém poli.

Místo přesnějšího výrazu: počet jedničkových silotrubic, procházejících plochou dS, říká se často krátce počet silokřivek; myslíme si totiž každou jedničkovou silotrubici zastoupenu její centrální silokřivkou**). Ovšem si musíme býti vědomi, že číslo dN nemusí býti číslem celistvým, což si u silotrubic můžeme představiti, u silokřivek ne.

Nejlépe jest užívati pro dN výrazu tok síly (nebo snad i silo-

---

*) Leckdy čteme, že silokřivka je dráha volného hmotného bodu v silovém poli. V této obecnosti není věta ta správná, nesmí totiž hmotný bod nabýti nikde konečné rychlosti, musí jej tedy zdržovati síly (odpor prostředí), které mají všude směr záporné intensity pole. Při dynamické demonstraci silokřivek magnetických (pól dlouhé vertikální jehly pluje po povrchu vodním v magnetickém poli) bývá tato podmínka dostatečně splněna.

**) J. J. Thomson rozlišuje tyto „silokřivky“ od „Faradayových jedničkových silotrubic“, nebo krátce „Faradayových trubic“, z nichž každá obejímá 4π našich jedničkových silotrubic. Na koncích Faradayovy trubice sedí totiž jedničkové náboje elektrické, na začátku kladný, na konci záporný.

tok) plochou dS, jejž jsme zavedli již v § 8 pro skalární součin z plochy dS, považované za vektor, a vektoru síly, zde $\bar{a}$, tedy pro výraz $\bar{a}d\bar{S}$. Názorně jest patrno, že tok síly dN nezávisí na orientaci průřezu dS kolem P, že jest týž u dS jako u dS', skloněného k dS o úhel α. Snadno se přesvědčíme, že tomu vyhovuje také definice matematická, že tedy $\bar{a}d\bar{S} = \bar{a}d\bar{S}'$. Jest totiž patrně

$$d\bar{S} = dS\,.\,\bar{a}^0, \qquad d\bar{S}' = dS'\,.\,\bar{\nu}, \qquad dS = dS' cos\alpha = dS'(\bar{a}^0\bar{\nu}),$$

kde $\bar{a}^0$ jest jedničkový vektor ve směru intensity pole, $\bar{\nu}$ jedničkový vektor v normále k dS'. Příslušný směr oběhu plošek dS a dS' je v obr. 46 vyznačen šipkami. Jest pak

$$\begin{aligned}\bar{a}d\bar{S}' &= a\bar{a}^0\,.\,dS'\,.\,\bar{\nu} = adS'(\bar{a}^0\bar{\nu}) = adS' cos\alpha = adS = dN \\ \bar{a}d\bar{S} &= a\bar{a}^0\,.\,dS\,.\,\bar{a}^0 = adS = dN.\end{aligned} \qquad (a)$$

Numericky obdržíme tok síly buď násobíme-li celou intensitu pole a průmětem $dS' cos\alpha$ plošky dS' na rovinu k intensitě kolmou, nebo násobíme-li celou plošku dS' normální složkou $a\,cos\alpha$ intensity a.

Z přímého názoru je patrno, že nevznikají-li uvnitř silotrubice nové silokřivky, jest silový tok dN podél celé trubice týž, takže jsou-li q_1 a q_2 dva její kolmé průřezy v místech, kde intensita pole jest a_1 resp. a_2, platí

$$a_1q_1 = a_2q_2, \quad \text{čili} \quad a_1 : a_2 = q_2 : q_1.$$

Intensita pole je kolmému průřezu silotrubice obráceně úměrna. Z hustoty silokřivek (vlastně jedničkových silotrubic) v úplném obraze pole můžeme tedy usuzovati na velikost síly; v místech, kde probíhají hustě vedle sebe, je intensita pole veliká, kde řídce, malá.

Tokem síly uzavřenou plochou (obr. 45) definujeme $\int_o \bar{a}d\bar{S}$, tedy součet silotoků všemi plošnými elementy povrchu, jichž směr oběhu jest dle § 6 určen vnější kladnou normálou. Užijme této definice na část silotrubice, znázorněnou v obr. 46 a ohraničenou na obou koncích libovolnými ploškami dS_1' a dS'. Na levé straně jest

$$\bar{a}_1d\bar{S}'_1 = \bar{a}_1d\bar{S}_1 = a_1dS_1(-\bar{a}^0{}_1\bar{a}^0{}_1) = -a_1dS_1 = -dN_1.$$

Že při libovolném elementu plošném dS'_1 na levo musí vyjíti číslo záporné, jest patrno, neboť v součinu $\bar{a}_1d\bar{S}'_1 = a_1dS'_1(\bar{a}^0{}_1\bar{\nu}_1)$ jest $(\bar{a}^0{}_1\bar{\nu}_1)$ kosinus úhlu, ležícího mezi 90° a 180°. Záporný počet silokřivek $-dN_1$ odpovídá silokřivkám, do uzavřeného prostoru vstupujícím. Na straně pravé máme

$$\bar{a}d\bar{S}' = \bar{a}d\bar{S} = adS(\bar{a}^0\bar{a}^0) = adS = dN.$$

Vychází zde číslo kladné, odpovídající silokřivkám, z uzavřené plochy vystupujícím. Pláštěm silotrubice silokřivky ani nevstupují ani nevystupují, neboť u libovolného plošného elementu jest $a \perp \bar{\nu}$, tedy $\bar{a}^0\bar{\nu} = 0$. Celková hodnota toku síly jest tedy $dN - dN_1$, a integrál udává, o kolik silokřivek více z uzavřené plochy vystupuje, než do ní vstoupilo. Ježto každou uzavřenou plochu v silovém poli (obr. 45) můžeme si představiti vytvořenu z podobných částí silotrubic, jest tomu tak i v případě všeobecném. Jest tedy

$$\int_o \bar{a}d\bar{S} = N, \qquad (b)$$

kde N jest počet silokřivek, které v uzavřené ploše nově vznikly ($N > 0$), nebo které ze vstoupivších v ní zanikly ($N < 0$). Nevznikla ani nezanikla-li žádná, jest $N = 0$. Pak říkáme, že vektor a je v poli solenoidálně rozdělen, že nemá v něm ani vzniků ani zániků, nebo jedním slovem zdrojů. Důvod názvu jest tento: Ježto žádná jedničková trubice v poli ani nekončí ani nezačíná, musí míti tvar podobný prsténci ($\sigma o\lambda\eta\nu$), znázorněný obr. 47. Pole jimi protkané nazýváme vířivým.



Obr. 47.

Kartézský tvar toku síly (nebo obecně vektoru $\bar{a}$) křivou plochou jest

$$\int \bar{a}d\bar{S} = \int (a_x dS_x + a_y dS_y + a_z dS_z) =$$
$$= \int (a_x \cos \widehat{\nu x} + a_y \cos \widehat{\nu y} + a_z \cos \widehat{\nu z})\, dS = \qquad (c)$$
$$= \iint (a_x dydz + a_y dzdx + a_z dxdy),$$

neboť

$$dS_x = dS \cos \widehat{\nu x} = dydz, \qquad dS_y = dS \cos \widehat{\nu y} = dzdx, \qquad dS_z = dxdy, \qquad (d)$$

kde ν značí normálu, a sice u uzavřené plochy normálu vnější.

Překládají-li se přes sebe různá pole intensit $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots$, tedy dle pravidla o vektorovém sčítání sil jest intensita pole výsledného $\bar{a} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \ldots$, z čehož plyne

$$\int \bar{a}d\bar{S} = \int (\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \ldots)\, d\bar{S} = \int \bar{a}_1 d\bar{S} + \int \bar{a}_2 d\bar{S} + \ldots \qquad (e)$$

Toky sil (i jiných vektorů), jsouce skaláry, sčítají se aritmeticky.

Rovnice silokřivky plyne z definice, dle níž má křivka všude týž směr jako síla. Charakterisujeme-li směry jedničkovými vektory, jest

$$\bar{F}^0 = d\bar{r}^0 \quad \text{čili} \quad \frac{\bar{F}}{F} = \frac{d\bar{r}}{ds},$$

$$\bar{i}\frac{X}{F} + \bar{j}\frac{Y}{F} + \bar{k}\frac{Z}{F} = \bar{i}\frac{dx}{ds} + \bar{j}\frac{dy}{ds} + \bar{k}\frac{dz}{ds}.$$

Násobíme-li skalárně postupně $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, máme

$$\frac{X}{F} = \frac{dx}{ds}, \qquad \frac{Y}{F} = \frac{dy}{ds}, \qquad \frac{Z}{F} = \frac{dz}{ds}$$

a hledaná rovnice silokřivky

$$dx : dy : dz = X : Y : Z. \qquad (f)$$

47. Práce a kinetická energie.

Působí-li síla $\bar{F}$ na hmotný bod, který se posune o $d\bar{r} = ds . \bar{\tau}$, nazýváme skalární součin

$$\bar{F}d\bar{r} = Fds \cos (\widehat{\bar{F}d\bar{s}}) = dA \qquad (a)$$

prací síly F na trati $d\bar{r}$, nebo při posunutí velmi malém prací elementární. Označení dA nesmí nás uvésti v omyl, že se jedná o úplný diferenciál jakési funkce A. dA jest sice nekonečně malá veličina,

ale úplným diferenciálem obecně býti nemusí. Práci tedy obdržíme, násobíme-li posunutí ds složkou síly do jeho směru padající $F \cos(\widehat{Fds})$, nebo naopak sílu F složkou posunutí v jejím směru $ds . \cos(\widehat{Fds})$. Je-li hmotný bod úplně volný a v klidu, tu působením síly obdrží zrychlení téhož směru jako síla $\bar a = \bar F : m$, a rychlost a tedy i posunutí mají ve směr zrychlení a tedy i síly (§ 22); práce je dána prostým součinem síly a posunutí. Měl-li však bod konečnou rychlost jiného směru než síla, nespadá posunutí nutně ve směr síly. Týž případ může nastati, je-li bod nucen pohybovati se po určité dráze. Pokud úhel mezi silou a posunutím leží v mezích 0^0 a 90^0, jest práce, silou F vykonaná, kladná, síla koná práci. Stojí-li síla kolmo na posunutí, je práce rovna nule. Účinkují-li mimo sílu F ještě jiné síly, nebo měl-li hmotný bod počáteční rychlost $\bar v_0$ vhodného směru, může úhel $(\widehat{Fds})$ míti hodnoty mezi 90^0 a 180^0, vychází práce, silou F vykonaná, záporná. Pak mluvíme o práci **proti** síle F vykonané.



Obr. 48.

Práce je **skalár**, nemá tedy směru. Kartézský výraz pro elementární práci jest

$$\bar F d\bar r = (\bar i X + \bar j Y + \bar k Z)(\bar i dx + \bar j dy + \bar k dz) = X dx + Y dy + Z dz. \qquad (b)$$

Z vektorové definice plyne invariantnost kartézského výrazu vůči změně soustavy souřadnicové posunutím a otočením, která z něho samého není na prvý pohled patrná.

Působí-li na týž hmotný bod několik sil $\bar F_1, \bar F_2, \ldots$, je práce celková dle (3c)

$$\bar F d\bar r = (\bar F_1 + \bar F_2 + \ldots) d\bar r = \bar F_1 d\bar r + \bar F_2 d\bar r + \ldots \qquad (c)$$

Práce výslednice $\bar F$ je rovna součtu (aritmetickému, ježto jde o skaláry) prací složek.

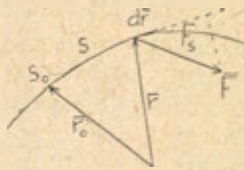
Dělíme-li (a) časem dt, ve kterém nastalo posunutí $d\bar r$, vznikne

$$\bar F \frac{d\bar r}{dt} = \bar F \bar v = Fv \cos(\widehat{Fv}) = \frac{dA}{dt}, \qquad (d)$$

kterýžto výraz, značící patrně práci vykonanou v jedničce časové (dostatečně malé), nazýváme **pracovní efekt**, **pracovnost**, nebo dle Angličanů vhodně **aktivita**.

Děje-li se pohyb hmotného bodu podél křivky nějaké, v jejichž jednotlivých místech má síla různou velikost či směr neb obé, tedy na př. při libovolném pohybu v obecném poli silovém, jest práce celková součtem všech prací elementárních, tedy

$$A = \int_{\bar r_0}^{\bar r} \bar F d\bar r = \int_{x_0 y_0 z_0}^{xyz} (X dx + Y dy + Z dz). \qquad (e)$$



Obr. 49.

Nazveme-li (obr. 49) tangenciální složku síly F_s a element dráhový bez ohledu na jeho směr ds, můžeme integrál pro práci psáti

ve tvaru jiném, jak často jej vídáme, totiž

$$A = \int_{s_0}^{s} F \cos(\widehat{F d s})\, ds = \int_{s_0}^{s} F_s\, ds.$$

Když v (a) nahradíme $d\bar{r} = \bar{v}dt$ dle (14c), $\bar{F} = m\dot{\bar{v}}$ dle (40a), plyne

$$dA = m\dot{\bar{v}}\bar{v}dt = m\bar{v}d\bar{v} = d(\tfrac{1}{2}m\bar{v}^2) = dT, \qquad (f)$$

kde

$$T = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2). \qquad (g)$$

Stejně

$$A = \int_{\bar{r}_0}^{\bar{r}} \bar{F} d\bar{r} = \int_{v_0}^{v} d(\tfrac{1}{2}mv^2) = \tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2 = T - T_0 \qquad (h)$$

a z (f) dělením dt

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dT}{dt}. \qquad (i)$$

Poloviční součin z hmoty a čtverce rychlosti, označený T, nazývá se kinetická (pohybová) energie hmotného bodu. Starší nevhodný název je živá síla, který však dříve značíval součin mv^2, čehož se dosud přidržuje známá trojdílná francouzská učebnice Appellova. V (h) jest $\bar{v}_0$ ovšem rychlost bodu v místě $\bar{r}_0$, $\bar{v}$ pak v $\bar{r}$. Věty (f) a (h) praví: Práce všech sil na hmotný bod působících, je rovna změně jeho kinetické energie (jejímu přírůstku, je-li práce positivní, poklesu, jakožto negativnímu přírůstku, je-li negativní)*). Nazývá se principem energie v mechanice hmotného bodu. Věta (i) podobně praví: Aktivita (pracovnost) se rovná časovému vzrůstu kinetické energie.

Jedničkou práce v absolutní soustavě měr jest dle definice (a) práce dyny podél dráhy 1 *cm*, kterou zveme erg, 10^6 erg je megaerg 10 megaerg $= 10^7$ erg je Joule. Jest pak

$$1 \text{ erg} = \frac{gr\,cm}{sec^2} \cdot cm = \frac{gr\,cm^2}{sec^2}. \qquad (j)$$

Dimense práce a kinetické energie jsou dle (f) totožné

$$[A] = [ML^2T^{-2}]. \qquad (k)$$

V technických jednotkách, kde jedničkou síly je váha jednoho *kg* označená *kg**, je jedničkou práce kilogrammetr, zvaný též metrkilogram.

1 *kg*m* = 981000 dyn . 100 *cm* = 98·1 . 10^6 erg = 9·81 joule. Absolutní jednička pracovnosti je erg za sekundu, technická *kg*m* za sekundu, jichž 75 tvoří „koňskou sílu" (HP nebo k. s.). Joule za sekundu jest watt, 1000 watt = 1 kilowatt.

---

*) Slova změna nebo přírůstek používáme pro rozdíl: veličina nová (při postupu místním nebo časovém) — veličina stará. Pokles jest negativní přírůstek. Pro kladný a záporný přírůstek v jedničce časové či na jedničce délkové užíváme krátkých výrazu vzrůst a spád, po případě s dodatkem časový nebo místní.

Jest tedy

$$1\,\frac{kg^*m}{sec} = 9{\cdot}81 \text{ watt}, \qquad 1\text{ HP} = 75\,\frac{kg^*m}{sec} = 736 \text{ watt} = 0{\cdot}736 \text{ kilowatt}.$$

Místo joule říká se někdy wattsekunda, 3600 joule = 1 watthodina.

48. Několik poznámek.

Název práce (travail, work, lavoro) zavedl pro plodný tento pojem přesně jej definuje Coriolis (Mécanique 1829), k obecnému rozšíření dopomohl mu pak Poncelet a jeho škola. Ačkoli prvým námětem k vytvoření tohoto pojmu je denní zkušenost, přece se svou definicí značně od ní vzdaluje. O práci mluvíme v obecném životě i tehdy, držíme-li na př. ve vztažené ruce těžký předmět, ač dle naší definice se žádná práce nekoná, ježto je dráha nulou. Spíše můžeme říci, že oceňujeme v životě práci dle vynaložené síly a doby trvání námahy. Proto by byl jednoznačnějším, ač pro svou délku nepohodlným, název **dráhový integrál síly** místo práce. O **časovém integrálu síly** promluvíme co nevidět.

Ozřejměme si nově zavedené pojmy na třech příkladech, a to především na rovnoměrném pohybu v přímce. Ježto je rychlost $\bar{v}_0$ stálá co do směru i velikosti, je zrychlení $\bar{a} = 0$, a tedy není ani síly ani práce potřebí k jeho udržování v ideálním případě úplně volného bodu. Kinetická energie zůstává stálá.

Při stejnoměrném pohybu v kruhu, který starým Řekům (Archimedes) se zdál nejvznešenějším z pohybů „přirozených", není zrychlení tangenciálního (v § 25 je $a_\varphi = 0$), a tedy není tangenciální složky síly. Proto i zde je práce sil na hmotný bod působících rovna nule, ačkoli k udržení pohybu musí neustále působit **síla centripetální**

$$m\bar{a}_r = -m\omega^2 r_0 \bar{\varrho} = -\frac{mv^2}{r_0}\bar{\varrho}.$$

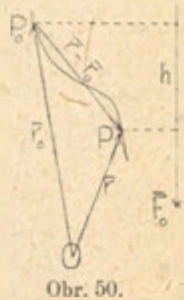
V brzku seznáme i jiné podobné síly, vyznačující se tou vlastností, že jsou neustále na směru dráhy kolmé, **síly z vazeb** (z vázanosti), **síly reakční**.

Je-li síla $\bar{F} = \bar{F}_0$ stálá co do směru i velikosti a pohybuje-li se na př. hmotný bod v homogenním poli silovém intensity $\bar{a} = \bar{a}_0 = \bar{F}_0 : m$ z bodu P_0 do P po libovolné dráze (obr. 50), je

$$A = \int_{\bar{r}_0}^{\bar{r}} \bar{F}_0 d\bar{r} = \bar{F}_0 \int_{\bar{r}_0}^{\bar{r}} d\bar{r} = \bar{F}_0(\bar{r} - \bar{r}_0). \qquad (a)$$

Nazveme-li průmět dráhy P_0P na směr pole h, jest pravá strana rovna $F_0 h$ nezávisle na tvaru dráhy P_0P. Práce je pro všechny možné dráhy táž, tedy také změna kinetické energie, takže vyšel-li hmotný bod z P_0 rychlostí v_0, nabyl v P nezávisle na tvaru dráhy rychlost v, danou vztahem

$$\tfrac{1}{2}mv^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2 = F_0 h. \qquad (b)$$



Obr. 50.

Tak jest tomu velmi přibližně v poli zemské tíže poblíže určitého místa povrchu zemského. Tu $a_0 = g$, kde g jest zrychlení zemské tíže, a bylo-li $v_0 = 0$, plyne z (b)

$$v = \sqrt{2gh}, \tag{c}$$

kde h je vertikální vzdálenost bodů P_0 a P.

Jest na snadě otázka, proč vlastně zavádíme pojem energie, který v mechanice bodu je přímým důsledkem Newtonových rovnic, takže nemůže nám dopomoci k řešení problémů, které by jimi nebyly řešitelny. A přece jsou pojmy práce a energie základními v mechanice. Důvody shrnul pěkně Hamel:

1. Formální síla těchto pojmů vysvitne teprve v mechanice tuhého tělesa.

2. Pojem energie dal se rozšířiti do veškerých oborů přírodního dění (Rob. Mayer, Helmholtz a j.), takže pro každou námi prozkoumanou část hmotného světa platí věta zvaná principem zachování energie: Změna celkové energie této části jest rovna energii v témž čase z vnějška přijaté nebo ven odevzdané. Energie isolované části zůstává stálou.

3. Věta o energii nám podává metodu prvé integrace pohybových rovnic. Rovnici $\ddot{s} = f(s)$ lze vždy uvést na kvadratury obratem, jehož jsme užili ku konci § 26. Prvý integrál není nic jiného než věta o energii pro $m = 1$ a $F = f(s)$.

49. Potenciální energie a potenciál.

Síly obecně závisí na poloze a rychlosti hmotného bodu. Máme-li tedy nalézti v daném praktickém příkladě práci, t. j. vyčísliti součet

$$A = \int_{\bar{r}_0}^{\bar{r}} \bar{F} d\bar{r} = \int_{t_0}^{t} \bar{F}\bar{v} dt \tag{a}$$

integrací, musíme znát sílu a rychlost jakožto funkci času, t. j. znáti pohyb bodu.

V přírodním dění vyskytují se však velmi často případy, kde k výpočtu práce není zapotřebí znáti průběh pohybu, ba ani dráhu hmotného bodu, kde práce závisí pouze od jeho počáteční a konečné polohy. Nejjednodušší doklad toho viděli jsme již v paragrafu předcházejícím.

Není nesnadno obecně vyšetřiti, kdy dráhový integrál síly je na tvaru dráhy nezávislý. Vyšetřme podmínku, kterou musí při tom splňovati síla. Práce musí patrně býti nezávisla na způsobu přechodu z polohy začáteční do konečné. Musí tudíž býti funkcí pouze těchto poloh, takže pro přechod z bodu $\bar{r}_1$ do bodu $\bar{r}_2$ můžeme práci psát

$$A_{\bar{r}_1}^{\bar{r}_2} = \int_{\bar{r}_1}^{\bar{r}_2} \bar{F} d\bar{r} = \Phi(\bar{r}_1, \bar{r}_2).$$

Volme libovolnou třetí polohu $\bar{r}_0$ a přejděme z $\bar{r}_1$ do $\bar{r}_0$ přes $\bar{r}_2$. Pak patrně

$$\Phi(\bar{r}_1, \bar{r}_0) = \Phi(\bar{r}_1, \bar{r}_2) + \Phi(\bar{r}_2, \bar{r}_0),$$

čili $$\Phi(\bar r_1, \bar r_2) = \Phi(\bar r_1, \bar r_0) - \Phi(\bar r_2, \bar r_0),$$
nebo jednodušeji psáno
$$A_{\bar r_1}^{\bar r_2} = U(\bar r_1) - U(\bar r_2), \qquad (b)$$
klademe-li ex definitione obecně
$$\Phi(\bar r, \bar r_0) = U(\bar r) - U(\bar r_0) = \int_{\bar r}^{\bar r_0} \bar F d\bar r = -\int_{\bar r_0}^{\bar r} \bar F d\bar r. \qquad (c)$$
$\bar r_0$ je jednou pro vždy určená poloha nulová a $U(\bar r_0)$ veličina stálá. $U(\bar r)$ jest pak jedině funkce polohy, funkce bodová. Při tom musí
$$\Phi(\bar r_0, \bar r_0) = \int_{\bar r_0}^{\bar r_0} \bar F d\bar r = 0, \qquad (d)$$
t. j. práce podél uzavřené křivky býti rovna nule.

Za přechodu z $\bar r$ do nekonečně blízkého sousedního bodu $\bar r + d\bar r$ máme dle (b)
$$A_{\bar r}^{\bar r + d\bar r} = dA = \bar F d\bar r = U(\bar r) - U(\bar r + d\bar r) = -d_{\bar r} U, \qquad (e)$$
což je ovšem identické s diferenciací (c) dle horní meze. Elementární práce musí dle toho býti úplným diferenciálem bodové skalární funkce U. Tento diferenciál, t. j. změnu funkce U při postupu o $d\bar r$, lze psáti dle návodu (11 h) ve tvaru
$$\bar F d\bar r = -dU(\bar r) = -d\bar r \,.\, \nabla U. \qquad (f)$$
Ježto (f) platí pro všechna možná $d\bar r$, musí
$$\bar F = -\nabla U = -\operatorname{grad} U = -\frac{dU}{d\bar r}. \qquad (g)$$

Je-li tedy síla záporným gradientem nějaké bodové funkce, můžeme dle (b) ihned udati práci síly. Funkci tu, zde U, zveme **potenciální energií** a říkáme, že **síla má potenciál**, jakož vůbec zveme libovolný vektor, který se dá znázorniti gradientem skaláru, **vektorem potenciálním**. **Potenciálem** V chceme rozuměti potenciální energii jedničky hmotné, takže $U = mV$.

Kartézským rozepsáním dle (11 e) dostáváme
$$\bar F = iX + jY + kZ = -i\frac{\partial U}{\partial x} - j\frac{\partial U}{\partial y} - k\frac{\partial U}{\partial z}, \qquad (h)$$
čili
$$X = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial U}{\partial z}. \qquad (i)$$

Z (i) je patrno, proč můžeme ihned psát integrál práce, má-li síla potenciál; v
$$A = \int_{x_0 y_0 z_0}^{xyz} (X dx + Y dy + Z dz) = -\int_{x_0 y_0 z_0}^{xyz} \left(\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz\right) =$$
$$= -\int_{x_0 y_0 z_0}^{xyz} dU = -U(xyz) + U(x_0 y_0 z_0) \qquad (j)$$

stojí pod integračním znamením úplný diferenciál. Mohli jsme tudíž voliti snadný postup opačný, a vyšedše z (j) dovoditi (i). Podobně mohli jsme říci, že jen tehdy je integrál (a) dán oběma mezemi a roven $-U(\bar{r})+U(\bar{r}_0)$, je-li $F d\bar{r}$ úplným diferenciálem bodové funkce $-U$, kterýž dle (11 a a h) jest roven (f). Při takovémto postupu kartézském nevynikly by však vlastnosti gradientu, jenž byl vyšetřován v § 11, v případě druhém unikla by naší pozornosti základní supposice (d).

Obyčejně dokazuje se ex post touto úvahou: Je-li potenciál v každém místě jednoznačný a všude spojitý, jest práce podél libovolné uzavřené dráhy rovna nule. Volme dvě různé dráhy I a II z bodu P_1 do P_2. Ježto dle předpokladu jest práce na dráze nezávislá, jest z P_1 do P_2 přes I rovna práci z P_1 do P_2 přes II; po dráze uzavřené z P_1 do P_2 přes I a zpět přes II (nebo naopak) je pak nutně rovna nule. Dá se dokázati, že platí také věta obrácená: Je-li dráhový integrál vektoru přes uzavřenou dráhu roven nule, jedná se o vektor potenciálový a potenciál jest jednoznačný.

Jest z (d) patrno, že silokřivky F nemohou být uzavřenými čarami, nýbrž musí mít počátek a konec, vzniky a zániky. Pole potenciálové je nevířivé a obsahuje zdroje. Kdybychom totiž podél takové uzavřené silokřivky vytvořili integrál $F d\bar{r}$, měly by vektory F a dr buď stále týž, nebo stále opačný směr a integrál konečnou kladnou nebo zápornou hodnotu, což odporuje předpokladu. Nebo můžeme usuzovati takto: Spontanním pohybem hmotného bodu v poli ve směru F podél uzavřené dráhy by dle (47 h) kinetická energie při každém oběhu (dokonaném cyklu) vzrostla o určitý konečný obnos, aniž by jakákoli jiná změna v poli nastala. Mohli bychom zdarma obdržeti libovolný obnos kinetické energie, který bychom zase dle (47 h) mohli proměniti v práci, slovem, měli bychom perpetuum mobile, kteréž intuitivně považujeme za nemožné.

Velikost síly plyne z (h) známým způsobem jakožto

$$F^2=\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2, \qquad (k)$$

tedy Laméův prvý diferenciální parametr potenciálu. Složka síly v libovolném směru $\bar{\sigma}$ jest dle (11 d a g) co do velikosti dána

$$\sigma F = -\sigma . \nabla U \equiv -(\sigma \nabla) U = -\frac{dU}{ds}, \qquad (l)$$

či jak říkáme, spádem potenciálu (ovšem místním).

Mapujeme-li silové pole plochami stálého potenciálu (ekvipotenciálními) čili hladinami (v užším slova smyslu), jichž obecná rovnice jest

$$V = \text{const.} \quad \text{nebo} \quad U = \text{const.}, \qquad (m)$$

jest dle (f) a vývodů § 11 síla v každém místě kolmá na příslušné mu hladině*), silokřivky jsou orthogonálními trajektoriemi

*) Jest to stejně patrno ze vztahu $X:Y:Z=\frac{\partial U}{\partial x}:\frac{\partial U}{\partial y}:\frac{\partial U}{\partial z}$, tedy z úměrnosti složek sil a směrových kosinusů normály k hladině.

hladin, a směřují, ježto $\bar{F} = -\nabla U$, od ploch vyššího k plochám nižšího potenciálu. V hladině $U = \text{const.}$ síla nemá složky žádné, při pohybu po hladině se práce žádná nekoná. Mapování pole silového hladinami jest proto výhodné, že potenciál je veličinou skalární, pro každý bod prostoru stačí údaj jediný, totiž velikost potenciálu a nikoli dva, velikost a směr, jako u síly.

Z věty (11 j) okamžitě plyne, že, je-li

$$\bar{F}_1 = -\nabla U_1, \quad \bar{F}_2 = -\nabla U_2, \ldots,$$

je
$$\bar{F} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \ldots = -\nabla(U_1 + U_2 + \ldots). \qquad (n)$$

Mají-li všechny působící síly potenciál, má také jejich výslednice potenciál, kterýž se rovná algebraickému součtu potenciálů složek.

Mají-li veškeré na hmotný bod působící síly, které konají práci, potenciál (síly na dráhu kolmé jej míti nemusí), zní věta o energii dle (c) a (47 h)

$$A = -U + U_0 = T - T_0, \quad \text{čili} \quad T + U = T_0 + U_0, \qquad (o)$$

což lze vyjádřiti slovy: Součet kinetické a potenciální energie jest veličinou stálou. Pro užití této věty stačí, je-li potenciál určen až na aditivní konstantu, která, stojíc na obou stranách, z rovnice vypadne. Pro jednoznačnost potenciálu (a tedy i pot. energie) z ní plyne, že vrátí-li se bod na své dráze do téhož místa, má co do velikosti tutéž rychlost, jakou měl, probíhaje jím po prvé. Síly potenciálové nazývají se pro (o) také konservativními. Větu tu prvý do mechaniky analyticky zavedl Daniel Bernoulli (1748), ač již dříve jí nevyslovené užili Galilei a Huygens.

Všechny síly centrální jsou konservativní, jak poznal již Lagrange. Je-li totiž $\bar{F} = f(r)\,\bar{\varrho}$, t. j. $\bar{r} = r\bar{\varrho}$, $d\bar{r} = \bar{\varrho}\,dr + r\,d\bar{\varrho}$, jest

$$A = \int_{\bar{r}_0}^{\bar{r}} f(r)\,\bar{\varrho}\,d\bar{r} = \int_{\bar{r}_0}^{\bar{r}} f(r)\,dr + \int_{\bar{r}_0}^{\bar{r}} f(r)\,r\bar{\varrho}\,d\bar{\varrho} = \int_{\bar{r}_0}^{\bar{r}} f(r)\,dr = U(\bar{r}) - U(\bar{r}_0), \qquad (p)$$

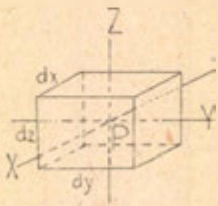
neboť $\bar{\varrho}\,d\bar{\varrho}$ jest dle (10 g) rovno nule. Zvláštního šetření jest potřebí pouze pro body, v nichž $f(r)$ se stává nekonečným.

Síly, které explicite závisí od rychlosti hmotného bodu (odpor vzduchu, tření a p. viz později), nemohou míti potenciálu. Dejme tomu, jako tomu často bývá, že takováto síla má záporný směr rychlosti $-\bar{v}^0$, který spadá v jedno s $-\bar{\sigma} = -\bar{v}^0$, kde $\bar{\sigma}$ je jedničkový vektor odpovídající postupu v dráze (ds). Dejme tomu dále, že tato síla $\bar{F} = -f(v)\,\bar{v}^0$ je záporným gradientem funkce U', tedy rovna $-\nabla U'$. Násobíme-li obě strany rovnice vektorem $\bar{\sigma}$, máme dle (l) $f(v)\,ds = f(v)\,v\,dt = dU'$. Známe-li rychlost v jakožto funkci času, můžeme integrovat a obdržíme U' jakožto funkci času. Není tedy U' potenciální energií, jak jsme ji definovali.

Sluší poznamenati, že v názvosloví není úplné shody. Někdy se slovem potenciál míní potenciální energie, starší autoři (Kirchhoff) označují potenciálem $-U$, užívajíce pro ně také název silová funkce (force-function), kterého pro $-U$ užívá také na př. Webster, Weber, Gans a j.

*50. Další o silovém poli. Divergence. Věta Gaussova a Greenova.

V § 46 jsme mluvili o silokřivkách (vlastně jednotkových silotrubicích), které vznikly (zanikly) v uzavřené ploše a udali jsme rovnicí (46 *b* a *c*), jak za známého rozdělení intensity v poli jejich počet můžeme stanoviti plošnou integrací. Téhož docílíme zvláštní integrací objemovou takto:



Obr. 51.

V libovolném místě pole zvolme si objemový element $dx\,dy\,dz$, v jehož středu leží bod P. Směry pravoúhlých a pravotočivých souřadnic jsou libovolné. Je-li intensita pole v bodě P rovna

$$\bar{a} = \bar{\imath} a_x + \bar{\jmath} a_y + \bar{k} a_z,$$

má na levé krajní plošce vektor $\bar{a}$ hodnotu $(\bar{a} - \frac{\partial \bar{a}}{\partial y} \cdot \frac{1}{2} dy)$, na pravé podobně $(\bar{a} + \frac{1}{2}\frac{\partial \bar{a}}{\partial y} dy)$, neboť význam $\frac{\partial \bar{a}}{\partial y}$ jest změna vektoru $\bar{a}$ při postupu o jedničku délkovou ve směru kladné osy Y, tedy vpravo, a my jsme postoupili po prvé o $\frac{1}{2} dy$ vlevo, po druhé vpravo.

Dle základního svého ustanovení jest kladným směr normály z uzavřené plochy ven směřující, takže je levá krajní ploška $d\bar{S}_y$ co do směru i velikosti $-\bar{\jmath}\,dx\,dz$, pravá pak $+\bar{\jmath}\,dx\,dz$. Příspěvek obou k silovému toku (46 *b*) jest

$$-\left(\bar{a} - \frac{1}{2}\frac{\partial \bar{a}}{\partial y} dy\right)\bar{\jmath}\,dx\,dz + \left(\bar{a} + \frac{1}{2}\frac{\partial \bar{a}}{\partial y} dy\right)\bar{\jmath}\,dx\,dz = \bar{\jmath}\frac{\partial \bar{a}}{\partial y} dx\,dy\,dz = \frac{\partial a_y}{\partial y} dx\,dy\,dz.$$

Stejným způsobem najdeme příspěvky přední a zadní, a spodní a svrchní plošky jakožto

$$\frac{\partial a_x}{\partial x} dx\,dy\,dz \quad \text{a} \quad \frac{\partial a_z}{\partial z} dx\,dy\,dz.$$

Jest tedy počet silokřivek v elementu $dx\,dy\,dz$ vzniklých

$$\left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz.$$

O tolik více jich z objemového elementu stěnami „vytéká“, než jimi dovnitř „vtéká“. Celkový počet silokřivek, vzniklých v konečném objemu, obsaženém v uzavřené ploše, nalezneme integrací, takže srovnáním se (46 *c*)

$$N = \iint_s (a_x dy\,dz + a_y dz\,dx + a_z dx\,dy) = \iiint_o \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz. \qquad (a)$$

Tento vztah nazývá se větou Gaussovou, a to v souřadnicích kartézských. Angličané mu říkají Greenovo lemma. Pro tok v ose X můžeme psáti známou pomůcku integrační, obdobu integrace per partes

$$\iiint_o \frac{\partial a_x}{\partial x} dx\,dy\,dz = \iint_s a_x dy\,dz. \qquad (b)$$

Všimneme-li si integrační funkce v posledním členu (a), vidíme na prvý pohled, že povstává skalárním znásobením Hamiltonova operátoru ∇ (11 f) vektorem $\bar{a}$, či jak se vyjadřujeme, skalárním působením ∇ na vektor.

Výsledek nazýváme divergence vektoru $\bar{a}$ a označujeme „div $\bar{a}$“, takže definicí

$$\operatorname{div} \bar{a} = \nabla \bar{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \tag{c}$$

Fysikální smysl divergence jest patrně „množství silokřivek (obecně čar vektoru $\bar{a}$, nebo $\bar{a}$-čar), vzniklé v jedničce objemové“. Z pojmu toho plyne jednoduchý vektoranalytický výraz Gaussovy věty

$$\int_o \bar{a}\, d\bar{s} = \int_o \operatorname{div} \bar{a} \,.\, d\sigma, \tag{d}$$

kde $d\sigma$ jest skalární objemový element. (Není se snad potřebí obávati omylů se $\bar{\sigma}$, jednotkovým vektorem ve směru $\bar{s} = s\bar{\sigma}$, nebo někdy ve směru $d\bar{r}$ podél křivky.) Ježto levá strana (d) je nezávisla na způsobu rozdělení v objemové elementy, nezávisí na něm také strana pravá a divergence vektoru je invariantou vzhledem k transformaci souřadnic posunutím a otočením.

Je-li $\bar{a}$ intensita pole, která se dá vyjádřit potenciálem stejně, jako síla potenciální energií,

$$a_x = \frac{X}{m} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{U}{m}\right) = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad a_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad a_z = -\frac{\partial V}{\partial z},$$

tedy $\bar{a} = -\operatorname{grad} V$ jest

$$\operatorname{div} \bar{a} = -\operatorname{div} \operatorname{grad} V = -\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right) = -\nabla^2 V. \tag{e}$$

Má se zajisté věc tak, jakoby na V působil záporný operátor

$$\nabla^2 = \left(\bar{i}\frac{\partial}{\partial x} + \bar{j}\frac{\partial}{\partial y} + \bar{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{f}$$

∇^2 se nazývá Laplaceovým operátorem; psává se někdy nedosti důsledně $\triangle$. $\nabla^2 V$ nazývá Lamé druhým diferenciálním parametrem. $-\operatorname{div} \bar{a}$ nazývá se někdy konvergencí, Maxwell zve je koncentrací. Je-li v nějakém prostoru všude $\operatorname{div} \bar{a} = 0$, nemá $\bar{a}$ nikde zdrojů, $\bar{a}$ je vektor solenoidální, jeho pole vířivé. Semikartézským rozepsáním snadno verifikujeme vzorec, v němž U je skalární bodová funkce, $\bar{a}$ libovolný vektor

$$\nabla(U\bar{a}) = \bar{a}\nabla U + U\nabla\bar{a} \quad \text{jinak psáno} \quad \operatorname{div}(U\bar{a}) = \bar{a} \operatorname{grad} U + U \operatorname{div} \bar{a}. \tag{g}$$

Musíme totiž míti na paměti, že diferenciační operátor Hamiltonův působí na oba faktory; ježto zde je působení skalární, nezáleží na pořadu. Prvý člen pravé strany mohl podobně jako v (11 g) vzniknouti operátorem

$$(\bar{a}\nabla) = (\bar{a} \operatorname{grad}) = a_x \frac{\partial}{\partial x} + a_y \frac{\partial}{\partial y} + a_z \frac{\partial}{\partial z}. \tag{h}$$

Patrně jest

$$\nabla(\bar{a}+\bar{b}) = \operatorname{div}(\bar{a}+\bar{b}) = \nabla\bar{a}+\nabla\bar{b} = \operatorname{div}\bar{a}+\operatorname{div}\bar{b}. \qquad (i)$$

Ptejme se ještě po úplném diferenciálu, to jest po celé změně vektoru $\bar{a}$ na trati $d\bar{r} = \bar{\sigma}ds$. Jest patrno, že jest

$$d\bar{a} = \bar{\imath}da_x + \bar{\jmath}da_y + \bar{k}da_z. \qquad (j)$$

Píšeme-li za celou změnu veličiny a_x podél $d\bar{r}$ dle (11 h) $da_x = d\bar{r}\nabla a_x$ a podobně pro složky ostatní, jest

$$d\bar{a} = d\bar{r}\nabla a_x\bar{\imath} + d\bar{r}\nabla a_y\bar{\jmath} + d\bar{r}\nabla a_z\bar{k},$$

nebo v průhledné symbolice

$$d\bar{a} = (d\bar{r}\nabla)\bar{a}, \qquad (k)$$

kde operátor $(d\bar{r}\nabla)$ je týž jako v (11 i).

Provedeme-li vskutku symbolický úkon, nacházíme

$$d\bar{a} = \bar{\imath}\left(\frac{\partial a_x}{\partial x}dx + \frac{\partial a_x}{\partial y}dy + \frac{\partial a_x}{\partial z}dz\right) + \bar{\jmath}\left(\ldots\right) + \bar{k}\left(\ldots\right),$$

což není než (j), v němž úplné diferenciály jsou rozepsány v explicitní tvar. V (k) máme úplnou analogii s úplným diferenciálem skaláru v (11 h, i), kde

$$dU = (d\bar{r}\nabla)U = d\bar{r}\,.\,\nabla U.$$

Zde, jak se snadno rozepsáním přesvědčíme, nesmíme však závorek vynechati, neboť

$$d\bar{a} = (d\bar{r}\nabla)\bar{a} \neq d\bar{r}\,.\,\nabla\bar{a}.$$

To jest v úplném souhlase s počítáním vektorovým, neboť ∇ je vektor a platí o trojnásobném součinu to, co bylo řečeno v § 8, 1.

V symbolickém operátoru smíme zase přemístit $d\bar{r}$ a ∇ jenom, pamatujeme-li, na kterou veličinu ∇ má působit, neboli píšíce zde $(\nabla_{\bar{a}}d\bar{r})$.

Podobně jako ∇ má i operátor ∇^2 význam nezávislý na volbě soustavy souřadnicové. Je dobře si jej uvědomiti.

Buď $V(x, y, z)$ hodnota bodové funkce v bodě P prostoru. Na povrchu velmi malé koule poloměru r, myšlené kolem P, bude v různých bodech míti hodnotu různou dle směru radia z P vedeného. Všechny ty body mají souřadnice $x+\xi$, $y+\eta$, $z+\zeta$, kde $r^2 = \xi^2+\eta^2+\zeta^2$. Dle Taylorovy věty jest

$$V(x+\xi, y+\eta, z+\zeta) = V(x, y, z) + \left(\xi\frac{\partial V}{\partial x} + \eta\frac{\partial V}{\partial y} + \zeta\frac{\partial V}{\partial z}\right) +$$

$$+ \tfrac{1}{2}\left(\xi^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \eta^2\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \zeta^2\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + 2\eta\zeta\frac{\partial^2 V}{\partial y\partial z} + 2\zeta\xi\frac{\partial^2 V}{\partial z\partial x} + 2\xi\eta\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}\right).$$

Vyšší mocniny ξ, η, ζ zanedbáme. Střední hodnota toho ξ^2 stejně jako η^2 nebo ζ^2 na povrchu koule je rovna $\frac{1}{3}(\xi^2+\eta^2+\zeta^2) = \frac{1}{3}r^2$. Střední hodnota ξ, η, ζ nebo vyšších lichých mocnin ξ^3 a p. je po kouli rovna nule, neboť ku každému $+\xi_1$ najdeme stejný počet bodů se stejně numericky velikým $-\xi_1$ a p. d. Jest tedy střední hodnota funkce V na povrchu koule

$$V + \delta V = V + \frac{r^2}{6}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right).$$

čili
$$\nabla^2 V = \frac{6}{r^2}\,\delta V.$$

Jest tudíž $\nabla^2 V$ rovno šestinásobnému střednímu přebytku hodnoty V na kulovém povrchu o poloměru jedničkovém (dostatečně malém) nad hodnotou V ve středu koule. Z tóho důvodu někteří autoři nazývají $\nabla^2 V$ „dispersí V". Nezávislost na souřadnicové soustavě jest jasně patrna.

K větě Gaussově druží se stejně vysoce důležité pro mnohá odvětví fysiky věty Greenovy, které z ní snadno dovodíme. Pišme do (d) za $\bar{a}$ součin $\Phi\bar{a}$, kde Φ je skalární bodová funkce, konečná a spojitá. Také a je spojitý a konečný vektor. Pak dle (d) a (g) integrujíce stále přes uzavřenou plochu, máme
$$\int \bar{a}\Phi \,.\, d\bar{S} = \int \operatorname{div}(\bar{a}\Phi)\,d\sigma = \int (\Phi \,.\, \nabla\bar{a} + \bar{a} \,.\, \nabla\Phi)\,d\sigma.$$

Za $\bar{a}$ pišme nyní $\bar{a} = \operatorname{grad}\Psi = \nabla\Psi$, kde jest Ψ skalární bodová funkce.
$$\int \Phi \,.\, \nabla\Psi \,.\, d\bar{S} = \int \Phi \,.\, \nabla^2\Psi\,d\sigma + \int \nabla\Phi \,.\, \nabla\Psi\,d\sigma. \tag{l}$$

Zaměňme Φ a Ψ a odečtěme novou rovnici od staré. Obdržíme
$$\int (\Phi \,.\, \nabla\Psi - \Psi \,.\, \nabla\Phi)\,d\bar{S} = \int (\Phi \,.\, \nabla^2\Psi - \Psi \,.\, \nabla^2\Phi)\,d\sigma.$$

Ježto $d\bar{S} = dS \,.\, \bar{\nu}$, kde $\bar{\nu}$ je jedničkový vektor ve vnější normále, a dle $(11c)$ můžeme přepsat na
$$\int \left(\Phi\frac{d\Psi}{dn} - \Psi\frac{d\Phi}{dn}\right) dS = \int (\Phi \,.\, \nabla^2\Psi - \Psi \,.\, \nabla^2\Phi)\,d\sigma. \tag{m}$$

Učiníme-li v (l) $\Phi = \Psi$, pak podobně
$$\int \Phi\frac{d\Phi}{dn}\,dS = \int \Phi \,.\, \nabla^2\Phi\,d\sigma + \int (\nabla\Phi)^2 d\sigma, \tag{n}$$

kde
$$(\nabla\Phi)^2 = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2.$$

*51. Další o potenciálu. Rotor. Věta Stokesova.

V § 49 jsme mluvili o případu, že se síla dá derivovati z potenciálu, tedy že
$$X = -\frac{\partial U}{\partial x}, \ldots, \quad \text{nebo, což je totéž} \quad a_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \ldots$$

Jedná se o to, nalézti podmínky, kdy tomu tak jest. Leckdy z tvaru výrazů pro složky silové přímo tuto možnost poznáme a uhodneme funkci U resp. V. Jindy tomu tak není. Aby potenciál existoval, jest dle $(49i)$ zajisté nutno, aby
$$\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = 0. \tag{a}$$

Dá se dokázati, že tyto podmínky jsou též dostačující. Všechny můžeme shrnout v jedinou, zkonstruujeme-li si vektor, jehož velikostmi komponent v pravoúhlých osách jsou právě tyto tři skalární veličiny (a), nebo veličiny jim úměrné, na př. dělením konstantou m vzniklé, tedy vektor

$$\bar{i}\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)+\bar{j}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)+\bar{k}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right).$$

Nazývá se **rotorem** vektoru $\bar{a}$ a píše **rot** $\bar{a}$. Rozepíšeme-li jej ve tvar determinantu, který se velice snadno podrží v paměti, poznáme ihned srovnáním s (6h), že je výsledkem vektoriálního součinu Hamiltonova operatoru s vektorem $\bar{a}$, takže definujeme

$$\operatorname{rot}\bar{a}=[\nabla\bar{a}]=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ a_x & a_y & a_z\end{vmatrix}. \qquad (b)$$

Na místo rot $\bar{a}$ označují jej mnozí po příkladě **Maxwellově curl** $\bar{a}$.

Je-li m skalární konstanta, je dle (6d)

$$[\nabla, m\bar{a}]=\operatorname{rot} m\bar{a}=m\operatorname{rot}\bar{a}=m[\nabla\bar{a}], \qquad (c)$$

takže je-li $\bar{a}$ intensita pole silového, jest podmínkou, že existuje potenciál,

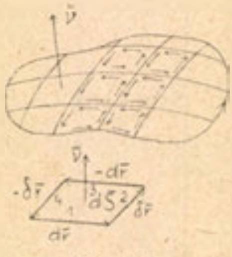
$$\operatorname{rot}\bar{a}=0, \qquad \text{nebo stejně} \qquad \operatorname{rot}\bar{F}=0. \qquad (d)$$

Ježto se potom dá vyjádřiti $\bar{a}$ jakožto — grad V, musí obecně

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}V=[\nabla,\nabla V]=0. \qquad (e)$$

Vskutku, dosadíme-li za poslední řádek determinantu (b) známé nám komponenty gradientu, vidíme, že tento obecně nutný vztah je splněn. V nauce o otáčení tuhého tělesa poznáme ve zvláštním případě fysikální smysl operace „rot", z něhož hned bude patrno, že je nezávisla na soustavě souřadnicové.

Jako jsme se naučili pomocí věty Gaussovy a Greenových převáděti integrál vektoru přes uzavřenou plochu na objemový a naopak, učí nás věta Stokesova převáděti integrál vektoru podél uzavřené křivky na integrál plošný. Hledejme práci, vykonanou v poli intensity $\bar{a}$, oběhne-li jednička hmotná v určitém směru křivku s. Za tím účelem proložme křivkou tou libovolnou (neuzavřenou ovšem) plochu S, jejíž konturou jest právě křivka daná (obr. 52).



Obr. 52.

Předpisem v § 6 jest určen směr její kladné normály. Rozdělíme-li libovolně myšlenými řezy plochu S na elementy dS, jest patrno, že práce při oběhu křivky s bude rovna součtu všech elementárních prací $\Sigma\bar{a}d\bar{r}$, které obdržíme obíhajíce ve směru daném normálou všechny elementy dS. Práce na každé vnitřní trati vyjma křivku s se ruší, ježto každá trať se proběhne dvakrát, sem i tam. Ovšem musí $\bar{a}$ býti spojité a konečné.

Vyčísleme nyní práci při oběhu elementu $d\bar{S} = [d\bar{r}, \delta\bar{r}]$, omezeného rovnoběžníkem o velmi malých daných, stálých stranách $d\bar{r}$ a $\delta\bar{r}$; jejich označení nemá znamenati snad diferenciál a variaci, nýbrž jen, že jsou velmi malé. Hodnoty intensity ve středu stran 1, 2, 3, 4 jsou $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4$. Elementární práce při oběhu bude zjevně

$$\Sigma\bar{a}d\bar{r} = \bar{a}_1 d\bar{r} + \bar{a}_2\delta\bar{r} - \bar{a}_3 d\bar{r} - \bar{a}_4\delta\bar{r} = (\bar{a}_2 - \bar{a}_4)\delta\bar{r} - (\bar{a}_3 - \bar{a}_1)d\bar{r}.$$

Ale $\bar{a}_2 - \bar{a}_4$ není než změna vektoru $\bar{a}$, přejdeme-li ze strany 4 po trati $d\bar{r}$ do strany 2. Dle (50 k) jest tato změna

$$\bar{a}_2 - \bar{a}_4 = (d\bar{r}\bar{V})\bar{a} \quad \text{a podobně} \quad \bar{a}_3 - \bar{a}_1 = (\delta\bar{r}\bar{V})\bar{a},$$

takže

$$\Sigma\bar{a}d\bar{r} = (d\bar{r}\bar{V})(\bar{a}\delta\bar{r}) - (\delta\bar{r}\bar{V})(\bar{a}d\bar{r}).$$

S $\bar{V}$ můžeme nakládati jako s vektorem, pamatujíce, že působí pouze na $\bar{a}$, poněvadž $d\bar{r}$ a $\delta\bar{r}$ jsou stálé. Ostatně snadné rozepsání by nás o tom přesvědčilo.

Pak

$$\Sigma\bar{a}d\bar{r} = (\bar{V}_a d\bar{r})(\bar{a}\delta\bar{r}) - (\bar{V}_a\delta\bar{r})(\bar{a}d\bar{r}),$$

čili dle (8 f)

$$= [\bar{V}_a\bar{a}][d\bar{r}\delta\bar{r}] = [\bar{V}\bar{a}]d\bar{S} = \operatorname{rot}\bar{a} \,.\, d\bar{S}. \qquad (f)$$

Sečtením podobných výrazů pro celou plochu plyne pak

$$\int\limits_{o} \bar{a}d\bar{r} = \int \operatorname{rot}\bar{a} \,.\, d\bar{S} = \int \operatorname{rot}_\nu a \,.\, dS. \qquad (g)$$

Třetí tvar je samozřejmé přepsání skalárního součinu, totiž součin velikosti plochy a průmětu vektoru rot a na její normálu. Náš vzorec jest věta Stokesova ve tvaru vektoranalytickém. Okamžitě jej můžeme přepsat na kartézský. Aby se však objevil v obvyklé v knihách symbolice, násobme obě strany m, čili pišme za $\bar{a}$ sílu $\bar{F}$ o složkách X, Y, Z. Pak máme

$$\int\limits_{o} (Xdx + Ydy + Zdz) =$$

$$= \int \left\{ \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) dS_x + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) dS_y + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) dS_z \right\}, \qquad (h)$$

kde ovšem jako vždy lze nahradit $dS_x = dS \,.\, \cos(\widehat{\nu x}) = dy\,dz$ atd.

Z odvození (f) a fysikálního významu (g) je patrna nezávislost rot $\bar{a}$ na soustavě souřadnic. Z (f) můžeme také vyčísti, jak nalezneme rotor v jistém místě prostoru. Veďme jím nějaký směr, ku kterému jakožto k positivní normále přiřadíme malou na něm kolmou plošku. Zjistíme práci při oběhu a dělíme ji velikostí plošky. Tak obdržíme složku rot $\bar{a}$ v daném směru. Volíme-li (libovolné) tři směry navzájem kolmé, a nalezneme pro ně složky rot $\bar{a}$, je čtverec celkové rot $\bar{a}$ v bodě začátečním dán součtem čtverců tří nalezených složek. Směr vektoru rot $\bar{a}$ nalezneme, vyhledavše největší možný kladný rotor, neboť průmět vektoru na vlastní směr je ze všech průmětů největší, roven vlastní velikosti rotoru.

Proložíme-li touž křivkou s dvě plochy S_1 a S_2, které dohromady tvoří plochu uzavřenou, budou příslušné jim plošné integrály (g) stejné,

neboť odpovídají téže práci při oběhu s. Ale ovšem bude normála směřovati v tutéž stranu oběhem danou. Považujeme-li soubor $\bar{S}_1 + \bar{S}_2$ za jedinou plochu uzavřenou a obrátíme jednu z normál tak, aby všude normála směřovala z uzavřené plochy ven, bude příslušná práce při oběhu s rovna nule, křivka naše se proběhne jednou dokola a zase zpět. Značí-li tedy ν všude vnější normálu, bude integrál přes uzavřenou plochu

$$\int_0 \operatorname{rot} \bar{a} d\bar{S} = 0. \qquad (i)$$

Srovnáním s větou Gaussovou ($50\,d$) to znamená: Dá-li se nějaký vektor na př. $\bar{a}$ vyjádřiti v nějakém prostoru jakožto rotor jiného vektoru na př. $\bar{a} = \operatorname{rot} \bar{A}$, je

$$\int_0 \bar{a} d\bar{S} = \int_0 \operatorname{rot} \bar{A} d\bar{S} = 0, \quad \text{a tedy} \quad \operatorname{div} \bar{a} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \bar{A} = 0, \quad \nabla[\nabla \bar{A}] = 0. \quad (j)$$

Vektor a nemá v tom prostoru zdrojů, a-čáry jsou uzavřené, $\bar{a}$ je vektor solenoidální, pole je zdrojů prosté, vířivé. Dá se dokázati, že také platí opak: Je-li tok vektoru $\bar{a}$ uzavřenou plochou roven nule, dá se $\bar{a}$ znázorniti jakožto rotor jiného vektoru $\bar{A}$. Z kartézského vyjádření plynou pak vzorce (a).

Tak rozlišili jsme oba hlavní druhy fysikálních vektorových polí, z nichž vznikne pole obecné tím, že se přes sebe překládají.

1. $\operatorname{rot} \bar{a} = 0$, $\operatorname{div} \bar{a} \neq 0$; $\bar{a}$ je vektor potenciálový, pole je nevířivé, vírů prosté, ale se zdroji.

2. $\operatorname{rot} \bar{a} \neq 0$, $\operatorname{div} \bar{a} = 0$; $\bar{a}$ je vektor solenoidální, pole je vířivé, zato zdrojů prosté.

Pole potenciálové přichází v úvahu hlavně v mechanice tuhých těles a theorii potenciálu, kdežto v hydrodynamice jedná se velmi často o pole vířivé. Obecné pole elektromagnetické je polem smíšeným.

52. Časový integrál síly. Impuls.

Stává se někdy, že na hmotný bod m působí síla velmi veliká po velmi kraťounkou dobu $t_1 - t_0$, tak zvaná síla nárazová. Nechceme ji zváti okamžitou, ježto dle obvyklé brachylogie jest okamžitou silou (rychlostí, zrychlením) okamžitá hodnota síly (rychlosti, zrychlení) časově proměnlivé. Doba $t_1 - t_0$ je tak krátká, že se během ní bod ze svého místa znatelně nepohnul. To, co se jediné dá pozorováním zachytiti, jest, že hmotný bod má po nárazu jinou rychlost, než měl před ním. V takovýchto případech zavádíme pojem n á r a z u G síly, jímž jmenujeme její časový integrál*)

$$\bar{G} = \int_{t_0}^{t_1} \bar{F} dt = \int_{t_0}^{t_1} m \frac{d\bar{v}}{dt} dt = \int_{t_0}^{t_1} d(m\bar{v}) = m\bar{v}_1 - m\bar{v}_0 = \bar{I}_1 - \bar{I}_0. \qquad (a)$$

*) Podobně nazýváme v nauce o elektrickém proudu „integrální proud“ $\int_{t_0}^{t_1} i dt$ (i = intensita proudu) proudovým nárazem.

Můžeme zde poznamenati, že za horní mez lze často voliti libovolné $t > t_1$, ba i $t = \infty$, neboť počínaje od okamžiku t_1 je $F = 0$, $m\bar{v}_1$ zůstává dle zákona o setrvačnosti stálé, není-li ovšem dalších projevů jiných sil. V (a) psali jsme $\bar{v}_1$ a $\bar{v}_0$ za rychlosti v časech t_1 a t_0.

Názvosloví o těchto dějích je naprosto neustálené; téměř každý autor užívá jiného. Místo našeho nárazu nebo síly nárazové říkává se impuls. My označíme tímto slovem a písmenem $\bar{I}$ takový náraz, který by uvedl hmotný bod z klidu $(\bar{v}_0 = 0)$ do daného stavu pohybového, takže v souhlasu s (a) jest $\bar{I} = m\bar{v}$, impuls roven součinu z hmoty a okamžité rychlosti. Pro tento součin užívá se často názvu hybnost (anglicky dosud momentum v souhlase s Newtonovým motus = movimentum, mouvement); Descartes označoval názvem „quantité de mouvement" pouhou velikost mv impulsu.

Věta (a) praví: Náraz rovná se změně hybnosti nebo impulsu. Jest to ovšem vektor směru $(\bar{v}_1 - \bar{v}_0)$, jehož složky jsou $m\,(v_{x1} - v_{x0})$ atd. Konečný impuls skládá se z impulsu původního a z nárazu dle pravidla o sčítání vektorů.

Matematicky idealisujeme pojem nárazu, nestarajíce se o skutečnou dobu trvání děje a kladouce $t_1 - t_0$ v limitě rovným nule. Pak ovšem F musí růsti do nekonečna, aby jeho součin s časem dal hodnotu konečnou.

Jedná-li se o sílu konečnou, musí jí odpovídati v každém okamžiku náraz $\Delta\bar{I}$ velmi malý, takže

$$lim\, m\,\Delta\bar{v} = lim\,\Delta\bar{I}, \quad lim\,\frac{\Delta\bar{I}}{\Delta t} = \frac{d\bar{I}}{dt} = lim\, m\,\frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t} = \bar{F}. \qquad (b)$$

Tuto větu, dle níž se síla rovná časovému vzrůstu impulsu, ač není než Newtonovou definicí síly, pro její důležitost v mechanice systémů nazýváme prvou větou impulsovou.

Jest patrno, že bychom mohli působení konečné síly libovolného trvání nahraditi sledem nekonečně malých nárazů, následujících po sobě v nekonečně blízkých okamžicích (tak se na sílu díval Descartes), jako naopak náraz matematicky ztotožňujeme s působením nesmírně veliké stálé síly po velmi kratinký okamžik. Vzniká jím konečná změna rychlosti a vykoná se konečný obnos práce, ačkoli je dráha proběhnutá hmotným bodem během nárazu nekonečně malá, takže se ze svého místa znatelně nepohnul, když síla již přestala působiti. Stal-li se náraz vlivem jiné hmoty, tedy, poněvadž dle zákona akce a reakce musela táž síla opačného směru po týž čas působiti na ono druhé těleso, nastala i u něho stejná změna impulsu v opačném směru: Oč impuls (hybnost) jednoho vzrostl, o tolikéž impuls druhého klesl, součet výrazů $m\bar{v}$ zůstal stálý. To je kořen tvrzení Descartova a jeho školy, že se součet veličin $m\bar{v}$ ve světě nemění; v této obecnosti jest ovšem nesprávná.

Obnos práce nárazem vykonané nalezneme takto: Dle (47 h) je práce rovna zvýšení kinetické energie

$$A = T_1 - T_0 = \tfrac{1}{2} m (v_1^2 - v_0^2) = \tfrac{1}{2} m (\bar{v}_1 - \bar{v}_0)(\bar{v}_1 + \bar{v}_0) = \tfrac{1}{2} \bar{G} (\bar{v}_1 + \bar{v}_0). \quad (c)$$

Tento vztah je nezávislý na způsobu, jak se síla s časem měnila v ne-

smírně krátké době svého působení. Patrně je stejně obecně

$$T = \tfrac{1}{2} m\bar{v}^2 = \tfrac{1}{2} \bar{I}\bar{v} = \frac{1}{2m} \bar{I}^2. \qquad (d)$$

Starý spor Descartovy školy a Leibnitze, zdali jest užíti za míru působnosti síly výrazu mv nebo mv^2 ($\frac{1}{2} mv^2$ zval živou silou teprvé Coriolis), jest bezpředmětný, neboť každý z obou výrazů týká se jiné stránky síly, prvý působení v čase, druhý ve dráze (práce).

Uveďme jednoduchý, ale důležitý příklad: Bod hmoty m, který jest schopen vykonávati ve směru $+\bar{\sigma}$ čistě harmonické kmity $s = s_m \sin \omega t$ cyklické frekvence ω, obdrží, jsa v klidu v poloze rovnovážné, impuls $\bar{I} = I\bar{\sigma}$. Jaký výkmit nastane? Změna rychlosti nárazem jest

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)_{t=0} = \frac{I}{m}, \quad \text{čili dle} \quad \frac{ds}{dt} = s_m \omega \cos \omega t, \quad \frac{I}{m} = s_m \omega.$$

Změříme-li s_m a známe m a ω, je $I = m\omega s_m$ a práce impulsem vykonaná $\frac{1}{2} m \omega^2 s_m{}^2$. Toho upotřebujeme při balistickém kyvadle a obdobné úvahy při balistickém galvanometru.

Jedná-li se o změny velmi malé, jako se vyskytují u sil konečných velikostí, můžeme přepsat (*c*), dosazujíce $\bar{v}_1 = \bar{v}_0 + \Delta\bar{v}_0$,

$$\Delta T = \tfrac{1}{2} m \,\Delta v_0 (\bar{v}_0 + \Delta v_0 + v_0) = \Delta\bar{v}_0 \,.\, m v_0 + \tfrac{1}{2} m (\Delta v_0)^2.$$

Prechodem k limitě pak plyne, vynecháme-li index 0, ježto každý okamžik můžeme voliti za počátek nárazu

$$dT = mv \,.\, dv = Idv.$$

Rozepíšeme-li úplný diferenciál kinetické energie T jakožto funkce rychlosti a rovněž stranu pravou,

$$\frac{\partial T}{\partial v_x} dv_x + \frac{\partial T}{\partial v_y} dv_y + \frac{\partial T}{\partial v_z} dv_z = mv_x dv_x + mv_y dv_y + mv_z dv_z, \qquad (e)$$

což vzhledem k vzájemné nezávislosti dv_x, dv_y, dv_z vede k rovnicím

$$\frac{\partial T}{\partial v_x} = mv_x = I_x, \qquad \frac{\partial T}{\partial v_y} = mv_y = I_y, \qquad \frac{\partial T}{\partial v_z} = mv_z = I_z. \qquad (f)$$

Tyto výrazy plynou přímo částečnou diferenciací výrazu (47 *g*) pro T.

Zde jsme volili širší přesný vývod z následujícího důvodu: Z tvaru $T = \frac{1}{2} mv^2$ plynulo by symbolickou diferenciací dle vektoru v

$$\frac{dT}{dv} = m\bar{v} = \bar{I}, \qquad (g)$$

čili obdrželi bychom správný výsledek, shrnující 3 rovnice (*f*) v jedinou, kdybychom přikli symbolické operaci diferenciace dle vektoru, prováděné v (*g*) dle známých pravidel počtu diferenciálního, význam

$$\frac{d}{dv} = \bar{i} \frac{\partial}{\partial v_x} + \bar{j} \frac{\partial}{\partial v_y} + \bar{k} \frac{\partial}{\partial v_z}, \qquad (h)$$

takže

$$\left(dv \frac{d}{dv}\right) T = dv_x \frac{\partial T}{\partial v_x} + dv_y \frac{\partial T}{\partial v_y} + dv_z \frac{\partial T}{\partial v_z} = dT. \qquad (i)$$

Operátor (*h*) jest tedy zevšeobecněním Hamiltonova operátoru.

Ze (47 g) plyne dosazením (f)

$$2T = v_x \frac{\partial T}{\partial v_x} + v_y \frac{\partial T}{\partial v_y} + v_z \frac{\partial T}{\partial v_z}, \quad \text{nebo} \quad 2T = v \frac{dT}{dv}, \tag{k}$$

což jest Eulerova poučka o homogenních funkcích pro T druhého stupně.

Z posledního výrazu kinetické energie v (d) plyne obdobně

$$\frac{dT}{d\bar{I}} = \frac{\bar{I}}{m} = \bar{v}, \tag{l}$$

čili

$$\frac{\partial T}{\partial I_x} = v_x, \quad \frac{\partial T}{\partial I_y} = v_y, \quad \frac{\partial T}{\partial I_z} = v_z. \tag{m}$$

53. Moment síly. Druhy rovnováhy.

Důležitou úlohu hraje v mechanice pojem momentu síly, definovaný dle § 7, je-li momentový bod O počátkem souřadnic, jakožto

$$\bar{M} = [\bar{r}\bar{F}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix}. \tag{a}$$

Je-li $\bar{F} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \ldots$, jest dle pravidla (6 f)

$$[\bar{r}\bar{F}] = [\bar{r}\bar{F}_1] + [\bar{r}\bar{F}_2] + \ldots \quad \text{čili} \quad \bar{M} = \bar{M}_1 + \bar{M}_2 + \ldots \tag{b}$$

moment výslednice roven (vektorovému) součtu složek, jak bylo ostatně již v § 7 řečeno. Při tom byl O libovolný bod prostoru. Věta (b) o momentech sil nese jméno obecné věty Varignonovy, která se obyčejně dokazuje elementárně pouze pro momentový bod O, ležící v rovině, v níž leží také všechny složky, tedy o momentech sil v rovině (§ 7). Jejím zvláštním případem jest $[\bar{r}\bar{F}] = 0$, leží-li bod O kdekoli v prodloužení výslednice $\bar{F}$.

Dle § 7 jest $\bar{M}$ zároveň momentem síly F vzhledem k ose v O kolmé na rovině, proložené vektory $\bar{r}$ a $\bar{F}$, a jeho složky

$$M_x = yZ - zY, \quad M_y = zX - xZ, \quad M_z = xY - yX, \tag{c}$$

jež jsou průměty momentu na osy $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, neboli průměty plochy jej znázorňující na roviny yz, zx a xy, jsou zároveň momenty síly F vzhledem k osám souřadnicovým $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$.

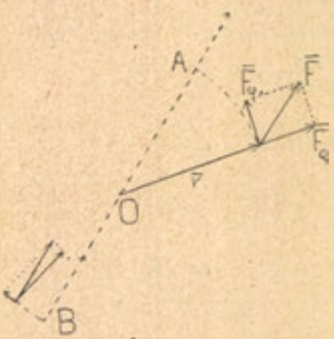
Násobíme-li obě strany rovnice (20 b) hmotou m, plyne

$$\bar{M} = \left[\bar{r}, m\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\right] = \frac{d}{dt}[\bar{r}, m\dot{\bar{r}}] = \frac{d}{dt}[\bar{r}, \bar{I}] = \frac{d\bar{U}}{dt}, \tag{d}$$

označíme-li $\bar{U} = [\bar{r}, \bar{I}]$, moment impulsu nebo krátce impulsmoment. Jest to dle § 52 patrně moment takové nárazové síly, která by v čase nesmírně krátkém dovedla vzbudit daný okamžitý pohybový stav hmotného bodu. Věta (d) nazývá se druhou větou impulsovou.

Místo krátkého slova impulsmoment mohli bychom také říkat moment hybnosti, podle vzoru anglického „moment of momentum“. Ani zde není názvosloví ustálené, na př. Klein a Sommerfeld nazývají $\bar{U}$ impulsvektorem, což není vhodné, ježto impuls $\bar{I}$ jest také vektor.

Pojem momentu síly vystupuje všude tam, kde se jedná o pohyb otáčivý, rotační. Mysleme si hmotný bod m spojen s bodem momentovým O „vazbou", to jest zařízením, které nedovolí, aby se vzdálenost Om změnila (obr. 53), tedy na př. neprodlužitelnou nehmotnou tyčí délky r, která se může kolem pevného O v libovolném směru otáčeti. Hmotný bod nacházejž se v homogenním poli intensity $\bar{a}$, takže v každé jeho poloze působí na něj síla $m\bar{a} = F$ vždy táž. Rozložme sílu tu na složku radiální F_ρ směru $+\bar{\rho}$ (nebo $-\bar{\rho}$) a složku transversální F_φ v rovině papíru. Z denní zkušenosti víme, že F_ρ se neuplatní pohybem, nýbrž bude pouze tyč napínati.



Obr. 53.

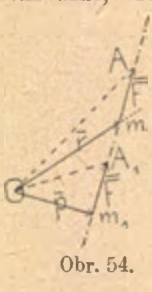
Složka F_φ uvede hmotu m do pohybu po kruhu o středu O, ležícím v rovině papíru, do pohybu otáčivého, rotačního. Říkáme často, že na m působí otáčivý moment $[\bar{r}F_\varphi]$, který však jest roven momentu $[\bar{r}F]$, neboť patrně složka $[\bar{r}F_\rho] = 0$, ježto $\bar{r}$ a F_ρ mají týž směr. Hmotný bod nachází se v poloze rovnovážné pouze tehdy, octne-li se v místě A nebo B, kde $M = 0$. Jest tedy podmínkou rovnováhy našeho bodu vázaného na pohyb po ploše kulové

$$\bar{M} = 0 \quad \text{čili dle } (c) \quad yZ - zY = zX - xZ = xY - yX = 0, \qquad (e)$$

kteréž jsou širší než podmínky rovnováhy volného bodu (44 d). Může existovat síla výsledná $F > 0$, ale její hybný účinek musí být rušen „vazbou", přesněji řečeno silou od vazby.

Rovnováha v bodě A a B není téhož druhu: v prvém případě, kdyby se bod vychýlil z rovnovážné polohy kamkoli, vzniká složka F_φ, která znovu bod uvádí do polohy rovnovážné. Rovnováha je stabilní, stálá.

V druhém případě, vychýlí-li se bod hmotný sebe méně z polohy rovnovážné, vzdaluje se vlivem vzniklé tím složky od polohy B, nevrací se do ní. Rovnováha je labilní, vratká. Jsou případy, kdy bod vychýlený z polohy rovnovážné octne se v nové poloze rovnovážné; pak mluvíme o rovnováze indiferentní, volné. Příkladem je bod vázaný na plochu, k níž ve všech místech stojí síla kolmo, na př. naše zařízení v poli radiálním o středu O.



Obr. 54.

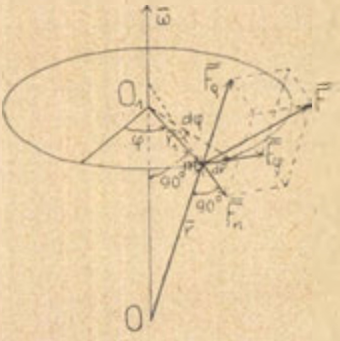
Často zavádí se pojem ramene síly F vzhledem k bodu O, jímž jest kolmice $\bar{p}$ z O na směr síly spuštěná (obr. 54), nebo (obyčejně) pouze její velikost p. Přeneseme-li sílu kamkoli v jejím směru, zůstává moment její vzhledem k libovolnému bodu O nezměněn. Neměníť se ani směr momentu, kolmice na rovině proložené $\bar{r}$ a F, ani velikost, neboť dvojnásobná plocha trojúhelníka OmA je rovna dvoj-

násobné ploše trojúhelníka Om_1A_1. Zavedením ramene síly dostává tato velikost jednoduchý výraz $p.F$ místo složitějšího $rF \sin(\widehat{rF})$. Ovšem vektoranalyticky jest stejně jednoduše $[\bar{p}F] = [\bar{r}F]$, neboť je-li trať

$$\overline{m_1 m} = \bar{l}, \text{ je } \bar{r} = \bar{p} + \bar{l}, \quad [\bar{r}F] = [\bar{p}F] + [\bar{l}F] \text{ a } [\bar{l}F] = 0.$$

54. Práce a kinetická energie při pohybu rotačním.

Síla $\bar{F}$ nechť působí na hmotný bod, který následkem vazby nebo vazeb může vykonávati pouze pohyb rotační, kolem osy směru $\bar{\omega}^0$ (obr. 55, srv. též § 16), procházející počátkem O, tak jako by s ní byl spojen tuhou tyčí délky r_1, trvale kolmou na ose $\bar{\omega}^0$ (tedy $\bar{r}_1 \perp \bar{\omega}^0$) a kolem ní otáčivou.



Obr. 55.

Možné posunutí hmotného bodu jest $+d\bar{r}$, kde $d\bar{r} = \bar{v}_\varphi\, dt = [\bar{\omega}\bar{r}]\, dt$ dle (16 e).

Elementární práce síly $\bar{F}$ jest dle (47 a) a (8 a)

$$dA = \bar{F}d\bar{r} = \bar{F}[\bar{\omega}\bar{r}]\, dt = [\bar{r}\bar{F}]\, \bar{\omega}\, dt = \\ = \bar{M}\bar{\omega}dt. \qquad (a)$$

Vzpomenouce významu skalárního součinu a toho, že

$$\bar{\omega} = \omega\bar{\omega}^0 = \dot{\varphi}\bar{\omega}^0,$$

můžeme psáti též

$$dA = M\omega \cos(\widehat{\omega M})\, dt = M_\omega\, \omega dt = M_\omega\, d\varphi, \qquad (b)$$

kde M_ω jest velikost složky momentu (počítaného vzhledem k libovolnému bodu O osy) v otáčecí ose, čili dle § 7 krátce moment síly vzhledem k otáčecí ose. Abychom obdrželi práci, musíme jej násobiti zvětšením úhlu φ, který udává polohu hmotného bodu m na obvodě kruhu o poloměru r_1 a středu O_1, jenž jest jeho dráhou.

Úplné analogie mezi druhým a pátým členem v (a) bychom se dodělali, kdybychom psali

$$\bar{\omega}dt = \omega dt\,.\, \bar{\omega}^0 = \dot{\varphi}dt\bar{\omega}^0 = d\varphi\bar{\omega}^0 = d\bar{\varphi}, \qquad (c)$$

čili znázornili elementární otočení $d\varphi$ jakožto vektor velikosti $d\varphi$ nanesený ve směru rotační osy*). Pak

$$dA = \bar{F}d\bar{r} = \bar{M}d\bar{\varphi}, \qquad (d)$$

za sílu nastupuje při pohybu rotačním moment její vzhledem k libovolnému bodu rotační osy, za posunutí $d\bar{r}$ element vektoriálního úhlového otočení. Součin (skalární) obou nazýváme **prací otáčivého momentu**, a to dle toho, je-li dA kladné či záporné, prací momentem nebo proti němu vykonanou.

*) Nesmíme si ovšem plésti nové označení $d\bar{\varphi}$ s jedničkovým vektorem $\bar{\varphi}$ v § 16!

Jest dobře představiti si vše názorně v prostoru (obr. 55). Danou sílu F můžeme rozložiti na tři složky: F_φ ve směru dráhového elementu $d\bar{r}$, F_ρ ve směru $\bar{r}$ a F_n na obou kolmou. $\bar{F}_\rho$ a F_n jsouce kolmé na posunutí, nekonají práce. Celková práce pochází od složky F_φ a je rovna

$$\bar{F}_\varphi d\bar{r} = F_\varphi v_\varphi dt = F_\varphi r_1 d\varphi, \quad \text{neboť} \quad v_\varphi = r_1 \dot{\varphi}.$$

Moment síly $\bar{F} = F_\varphi + F_\rho + F_n$ vzhledem k rotační ose $\bar{\omega}^0$ rovná se součtu momentů složek. Dle § 7 jsou to průměty dvojnásobných trojúhelníků momenty znázorňujících na rovinu kruhové dráhy. Trojúhelník odpovídající F_ρ se redukuje na přímku, nemá plochy vůbec; trojúhelník pro F_n ($\triangle OmF_n$) stojí kolmo na rovinné dráze, má nulový průmět, redukující se na přímku směru O_1m. Trojúhelník odpovídající F_φ za to leží celý v rovině dráhy. Jest patrno, že každá síla v rovině osou rotační proložené (na př. v rovině $F_\rho m F_n$), má vzhledem k ose nulový moment, protínajíc ji ve svém prodloužení, tedy nezpůsobuje práci, $dA = 0$ a ovšem také ne rotační pohyb kolem osy.

Kinetická energie při rotačním pohybu jest

$$T_\omega = \tfrac{1}{2} m v_\varphi^2 = \tfrac{1}{2} m (r_1 \dot{\varphi})^2 = \tfrac{1}{2} (m r_1^2) \dot{\varphi}^2 = \tfrac{1}{2} (m r_1^2) \omega^2. \qquad (e)$$

Nastane tedy opětně úplná obdoba mezi obecným výrazem a tímto zvláštním pro pohyb otáčivý vzorci

$$T = \tfrac{1}{2} m v^2, \quad T = \tfrac{1}{2} K_\omega \bar{\omega}^2, \qquad (f)$$

nahradíme-li stálou hmotu m nyní skalárním výrazem $K_\omega = m r_1^2$, závislým na vzájemné poloze hmotného bodu a osy rotační, neboť r_1 jest právě jeho vzdálenost od ní. Za rychlost v jest psáti rychlost úhlovou ω.

Ze vzorce (d) a obecného vztahu pro účinnost (47 i) plynou za stálého K_ω, neboli nezměněné osy rotační, vztahy obecně platné

$$m\bar{v}\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F}\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{F}\bar{v} \quad \text{a} \quad K_\omega \bar{\omega}\frac{d\bar{\omega}}{dt} = \bar{M}\frac{d\bar{\varphi}}{dt} = \bar{M}\bar{\omega}. \qquad (g)$$

V nich ovšem nesmíme krátiti vektory v a ω po obou stranách, nýbrž musíme přejít k smyslu skalárních součinů a psáti, zavedše zrychlení a

$$mva \cos(\widehat{av}) = Fv \cos(\widehat{Fv}), \quad K_\omega \omega\dot{\omega} \cos(\widehat{\omega\dot{\omega}}) = M\omega \cos(\widehat{M\omega}).$$

Skaláry v a ω krátiti smíme; $a \cos(\widehat{av})$ jest složka zrychlení, spadající do směru dráhy, kterou jsme v § 18 psali $\ddot{s}$; podobně je $F\cos(\widehat{Fv})$ složka síly v dráze F_s. Děje-li se otáčení kolem pevné osy, má ω a $\dot{\omega}$ týž směr (t. j. směr osy) $\cos(\widehat{\omega\dot{\omega}}) = 1$; $M\cos(\widehat{M\omega})$ je průmět M_ω velikosti otáčivého momentu na osu otáčecí. Dosazením tedy

$$m\ddot{s} = F_s, \quad K_\omega \dot{\omega} = K_\omega \ddot{\varphi} = M_\omega. \qquad (h)$$

Násobíme-li druhou z těchto rovnic jedničkovým vektorem $\bar{\omega}^0$, majíce stále na paměti, že se jedná o otáčení kolem pevné osy, můžeme psáti vztah

$$K_\omega \dot{\bar{\omega}} = K_\omega \ddot{\bar{\varphi}} = \bar{M}_\omega. \qquad (i)$$

formálně podobný pohybové rovnici

$$m\dot{v} = m\ddot{r} = F, \qquad (j)$$

jež zdánlivě plyne z prvého vztahu (g) krácením v.

Nesmíme zapomínati, že v odvození je podstatný rozdíl. Kdežto při diferenciaci (f) je hmota m vždy stálá, je K_ω stálé jen pokud zůstává otáčecí osa časově nezměněna. Kdežto tedy shoda skalárních rovnic (h) je podstatná, jest shoda vektoriálních náhodná. Druhý vztah (h) nazývá se často pohybovou rovnicí hmotného bodu při pohybu otáčivém.

Mohli jsme ji snadno odvoditi přímo: Zrychlení při pohybu rotačním je dle (19b) a (16a) $a_\varphi = \dot{v}_\varphi = r_1\ddot{\varphi}$, tedy složka síly ve směru dráhy $F_\varphi = mr_1\ddot{\varphi}$. Elementární práce při posunutí $r_1 d\varphi$ jest tedy $dA = F_\varphi r_1 d\varphi = mr_1^2 \ddot{\varphi} d\varphi$. Ze srovnání s ($b$) obdržíme ($h$). Obšírnější odvození nepřímé má čtenáře příkladem varovati před ukvapenými úsudky z rovnic vektorových, zvláště před krácením rovnice vektorem.

V rovnicích (d), (f) a (h) jasně se zračí formální obdoba mezi pohybem obecným a rotačním.

55. Princip virtuálních posunutí.

Bod volný. Z Newtonovy rovnice vyvodili jsme v § 44 (d) důsledek, že volný bod hmotný může za vlivu sil pouze tehdy setrvati v trvalém klidu, býti v rovnováze, je-li výslednice všech sil rovna nule. Obsahově totéž můžeme formálně vyjádřiti poněkud jinak. Představme si, že jsme udělili bodu velmi malé posunutí $\delta\bar{r}$, které musí vyhovovati té jediné podmínce, že musí býti možné, jsouc jinak ze všech možných vybráno zcela libovolně. Takovéto posunutí, které je v myšlenkách provedeno bezčasově, jakožto možná variace místa, nazýváme posunutím virtuálním (Gauss též fakultativním). U zcela volného hmotného bodu jsou ovšem možnými veškerá myslitelná posunutí vůbec.

Skalární součin z výsledné síly F a virtuálního posunutí, tedy $F\delta\bar{r} = \delta A$, znamená virtuální práci, odpovídající posunutí $\delta\bar{r}$. Je-li virtuální práce pro libovolné posunutí rovna nule, nelze jinak, leč že $F = 0$, neboť $\delta\bar{r}$ nejsou obecně rovny nule. Jest tedy možno vyjádřiti podmínku rovnováhy větou

$$F\delta\bar{r} = 0 \quad \text{čili} \quad X\delta x + Y\delta y + Z\delta z = 0, \qquad (a)$$

kterou nazýváme principem virtuálních posunutí, nebo ještě lépe principem virtuálních prací.

Z kartézského tvaru je patrno, že se rozpadá podmínka rovnováhy na tři $X = Y = Z = 0$, ježto δx, δy, δz jsou navzájem nezávislé a úplně libovolné. Zvláště jednoduchého tvaru nabývá princip virtuálních prací, mají-li síly potenciál, takže $F = -\nabla U = -\operatorname{grad} U$. Pak

$$-F\delta\bar{r} = \delta\bar{r}\,.\,\nabla U = 0 \quad \text{čili} \quad \frac{\partial U}{\partial x}\delta x + \frac{\partial U}{\partial y}\delta y + \frac{\partial U}{\partial z}\delta z = 0. \qquad (b)$$

Levá strana je úplnou variací potenciální energie, takže můžeme psát na místě toho

$$\delta U = 0. \qquad (c)$$

Rovnováha může nastati pouze tehdy, má-li potenciální energie extrémní hodnotu — maximum nebo minimum.

Pro použití na jednotlivý bod nemá princip náš valného významu, kterého nabývá teprve v mechanice systémů. Za to jest zde věc velmi jednoduchá a připravuje dobře půdu porozumění případů složitějších.

Pohyb vázaný. Již v § 53 dotkli jsme se případu, že hmotný bod se nemůže pohybovati zcela volně, že pohyb jeho jest vázán nějakou podmínkou, že existuje vazba. Vazby mohou býti různé. V § 53 jednalo se o bod, který se může pohybovati pouze podél povrchu koule, nemoha z něho vybočiti ani ven, ani dovnitř. To je případ oboustranné vazby, která je matematicky dána rovnicí určité plochy, zde na př., je-li střed koule začátkem, R poloměrem,

$$|\bar{r}| = R \quad \text{nebo} \quad \bar{r}^2 = R^2 \quad \text{či} \quad x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0.$$

Takovéto vazby nebo podmínky nazýváme holonomní (Hertz) a neobsahují-li explicite čas, zároveň skleronomní (Boltzmann). Obsahuje-li podmínka explicite čas, znamená to, že hmotný bod je vázán na nějakou pohybující se plochu; takové podmínky nazývá Boltzmann rheonomní. Více o nich uslyšíme v dynamice soustav bodových. Vazby mohou býti také jednostranné, vyjádřeny nerovnostmi. Tak na př. $\bar{r}^2 \geqq R^2$ znamená, že bod se může pohybovati po povrchu koule, z něhož však může vybočiti ven, nikoli dovnitř; $\bar{r}^2 \leqq R^2$ platí pro bod uzavřený v duté kouli nebo zavěšený na neprodlužitelném, ale dokonale ohebném vlákně délky R. My se omezíme na holonomní oboustranné vazby.

Dejme tomu, že hmotný bod musí při svém pohybu zůstati na ploše

$$\Phi(x, y, z) = 0. \tag{d}$$

To znamená, že nejsou již vůbec všechna posunutí $\delta\bar{r}$ možná, nýbrž pouze ta, která leží v ploše Φ. To můžeme vyjádřit tak, že musí

$$\delta\bar{r} \,.\, \nabla\Phi = 0, \tag{e}$$

neboť jak víme (§ 11), jest $\nabla\Phi$ vektor konečné velikosti, ležící v normále plochy Φ, takže (e) vytýká soubor všech konečných $\delta\bar{r}$, které jsou kolmy na normále, čili leží v ploše $\Phi = 0$. Stejně bychom to nahlédli z kartézského tvaru. Má-li (d) býti splněno i po virtuálním posunutí musí $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$ ležeti na ploše $\Phi = 0$, čili

$$\Phi(x + \delta x,\ y + \delta y,\ z + \delta z) = \Phi(xyz) + \frac{\partial\Phi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\delta z = 0,$$

a pro (d)

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\delta z = 0. \tag{e'}$$

Tuto podmínku musí virtuální posunutí splňovati. Jest identická s (e). Tato nová podmínka*) přistupuje tedy ještě k podmínce rovnováhy (a).

---

*) Někdy zní takováto podmínka $a_1\delta x + a_2\delta y + a_3\delta z = 0$, kde a_1, a_2, a_3 jsou funkce x, y, z, ale podmínka tato není úplnou variací nějaké funkce Φ. Pak se dle Hertze nazývá anholonomní nebo neholonomní. Vyskytuje se na př. při valení těles.

Slovy můžeme výsledek vyjádřiti takto: Virtuální posunutí $\delta\bar{r}$ omezují se nyní na taková, která leží v ploše $\Phi = 0$. Pro tato posunutí musí se práce výsledné síly $\bar{F}$ rovnati nule, má-li býti rovnováha, t. j. výsledná síla nesmí míti složky v ploše samé, čili musí býti na ploše $\Phi = 0$ kolmá.

Obě podmínky (a) a (e) můžeme spojiti v jedinou pomocí Lagrangeových neurčitých součinitelů. Násobíme (e) libovolným, konečným, skalárním faktorem λ, který ovšem může míti a má fysikální dimensi, a přičteme výsledek k (a). Dostáváme podmínku rovnováhy

$$\delta\bar{r}(\bar{F} + \lambda \, . \, \bar{V}\Phi) = 0. \qquad (f)$$

Tvrdíme, že platí pro libovolná $\delta\bar{r}$, takže se redukuje na

$$\bar{F} + \lambda\bar{V}\Phi = 0 \quad \text{čili} \quad X + \lambda\frac{\partial\Phi}{\partial x} = Y + \lambda\frac{\partial\Phi}{\partial y} = Z + \lambda\frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0. \qquad (g)$$

Vskutku můžeme veškerá $\delta\bar{r}$ v (f) roztříditi: 1. na posunutí virtuální, která vyhovují podmínce (e): Pro tato posunutí dává (f) dostačující podmínku $\delta\bar{r} . \bar{F} = 0$, která je totožná s (g), pravíc, že $\bar{F}$ je na virtuálních posunutích, tedy na ploše Φ, kolmé. 2. Ostatní libovolná posunutí $\delta\bar{r}$, která nesplňují (e), nejsou tedy „virtuální“. Ježto právě jsou libovolná, vedou znovu k podmínce (g). Výsledná síla na Φ kolmá nezpůsobí ovšem skutečného posunutí, ježto dle podmínky (d) je posunutí v tom směru nemožné.

V kartézských souřadnicích uvažujeme takto: Podmínka rovnováhy jest dle (f)

$$\left(X + \lambda\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\delta x + \left(Y + \lambda\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)\delta y + \left(Z + \lambda\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)\delta z = 0. \qquad (f')$$

δx, δy, δz nejsou navzájem nezávislé, nýbrž jedno z nich můžeme pomocí (e) vyčísliti jakožto funkci druhých dvou. Budiž to třeba δx. Volme pak ono dosud libovolné λ tak, aby $X + \lambda\frac{\partial\Phi}{\partial x} = 0$. V (f') potom zbývají pouze dva členy násobené δy a δz. Tyto složky posunutí jsou však nyní zcela libovolné, a proto lze nahraditi (f') rovnicemi (g).

Zvláště z vektorového tvaru je jasně patrno následující: U bodu, který není úplně volný, mohli jsme nahraditi podmínku vázanosti, dle níž se může pohybovati pouze podél plochy $\Phi = 0$, silou z vázanosti $\Phi = \lambda\bar{V}\Phi$ (zvanou též silou od vazby), která má směr vektoru $\bar{V}\Phi$, kolmý na ploše Φ. Že tento výraz vskutku jest silou, je patrno z principu dimensí; v (f) vystupuje aditivně se silou $\bar{F}$.

V dříve uvedeném případě bodu vázaného na kouli můžeme si věc představiti asi takto: Hmotný bod jest těžiště kuličky absolutně hladké z látky nesmírně tvrdé, která se může pohybovati pouze v prostoru mezi dvěma koncentrickými kulovými plochami, rovněž absolutně hladkými a tvrdými. Pokud se jedná o posunutí virtuální v okamžité tečné rovině koule, nevzniká síla z vázanosti $\Phi_t = (\lambda\bar{V}\Phi)_t$ žádná, nebo lépe řečeno, síla z vázanosti nemá složky v tangenciální rovině koule. Stojí tedy na kouli kolmo. Jakmile bychom myslili na posunutí $\delta\bar{r}$ libovolné jiné, vzniká reakční síla od vazby, po případě i pro veliká $\bar{F}$ dostatečně

veliká, aby i pro posunutí s vazbami nesrovnatelná činila rovnici (f) platnou. Jest tudíž rovnice (f) pro všechna posunutí ekvivalentní s rovnicí (a), ve které $\delta\bar{r}$ jsou virtuální posunutí s vazbami srovnatelná.

Rovnici platnou pro posunutí s vazbami srovnatelná, totiž

$$\delta\bar{r}\nabla\Phi = 0 \quad \text{čili} \quad \delta\bar{r}.\lambda.\nabla\Phi = \bar{\Phi}\delta\bar{r} = 0, \tag{h}$$

jsme pak mohli interpretovati takto: „Síly od vazeb nekonají práce při žádném s podmínkami srovnatelném (virtuálním) posunutí." To jest kořen principu virtuálních posunutí, to nové, nedokazatelné ve své celé obecnosti, co přistupuje k Newtonovým rovnicím pohybovým. Hamel nazývá tuto větu principem Lagrangeovým. Nazveme-li síly F, které nejsou dány kinematickými podmínkami systému s vazbami, silami vnějšími nebo vtisknutými, a označíme-li síly od vazeb, které jsou dány kinematickými podmínkami jakožto vektory Φ, praví Newtonova rovnice, dle níž je zrychlení bodu dáno veškerými silami na bod působícími

$$m\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = F + \Phi. \tag{i}$$

Nemá-li vzniknouti zrychlení, má-li býti rovnováha, musí $F + \bar{\Phi} = 0$ nebo pro libovolné posunutí $\delta\bar{r}.(F + \Phi) = 0$. Jsou-li $\delta\bar{r}$ posunutí možná, virtuální, má dle hořejší obecné hypothesy $\delta\bar{r}.\Phi = 0$ a tedy také $\delta\bar{r}.F = 0$. Tyto vztahy praví, že síly od vazeb musí býti kolmé na možných posunutích, míti tedy tvar $\Phi = \lambda.\nabla\Phi$, a síly vtisknuté za rovnováhy $F = -\Phi = -\lambda.\nabla\Phi$. Tak jsme mohli na základě hořejší základní hypothesy o silách z vazeb a Newtonova zákona odvodit princip virtuálních posunutí.

Dovoluje nám k dané vtisknuté síle $F = \bar{\imath}X + \bar{\jmath}Y + \bar{k}Z$ na dané ploše $\Phi = 0$ nalézti místo x, y, z, kde je hmotný bod v rovnováze, neboť pro určení čtyř neznámých x, y, z, λ máme čtyři rovnice (g) a (d). Známe tím také sílu reakční (od vazby) $\lambda\nabla\Phi$, jejíž velikost je velmi důležito znáti technice, která musí ji přemáhati pevností materiálu. Sílu X, Y, Z, která by v daném bodě x, y, z držela bod v rovnováze, nalézti nemůžeme, ježto pro čtyři neznámé X, Y, Z, λ jsou dány pouze tři rovnice (g). Rovnice (d) nelze k nim připojiti, ježto v ní žádná z neznámých se nevyskytuje.

Své úvahy můžeme snadno rozšířiti na případ, když má bod hověti dvěma podmínkám, dvěma vazbám, $\Phi(xyz) = 0$ a $\Psi(xyz) = 0$. Geometrický smysl je ten, že má zůstati trvale na prostorové křivce, průsečíku obou ploch Φ a Ψ. Úvahami naprosto obdobnými docházíme ke vztahu

$$\delta\bar{r}(F + \lambda\nabla\Phi + \mu\nabla\Psi) = 0, \tag{j}$$

čili

$$F + \lambda\nabla\Phi + \mu\nabla\Psi = 0. \tag{k}$$

a

$$X + \lambda\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \mu\frac{\partial\Psi}{\partial x} = Y + \lambda\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \mu\frac{\partial\Psi}{\partial y} = Z + \lambda\frac{\partial\Phi}{\partial z} + \mu\frac{\partial\Psi}{\partial z} = 0. \tag{l}$$

Síla od vazby leží v normále ke křivce, a výsledná síla vnější, má-li býti rovnováha, musí v ní ležeti též.

V rovnici (f) i (j) bylo posunutí $\delta\bar{r}$ úplně libovolné. Kdybychom omezili jeho význam na posunutí virtuální, mohli jsme členy $\lambda\delta\bar{r}\nabla\Phi$ a $\mu\delta\bar{r}\nabla\Psi$ vynechati, ježto jsou nulami. Pak však vznikne jako obecný výraz principu virtuálních posunutí jednoduchá věta (a), v níž ovšem jsou $\delta\bar{r} = \bar{\imath}\delta x + \bar{\jmath}\delta y + \bar{k}\delta z$ posunutí virtuální, s vazbami srovnatelná.

Podmínek více než dvě u jediného bodu býti nemůže. Kdyby byly tři (ovšem navzájem nezávislé), byly by dány určité hodnoty x, y, z, bod byl by v prostoru pevný, nebylo by možného posunutí, rovnováha by byla vždy, vnější síly vždy byly by vyváženy silami od vazeb. Proto mluvíme u bodu úplně volného o třech stupních volnosti, u bodu vázaného na ploše o dvou, na křivce pak o jediném. Nazýváme totiž počtem stupňů volnosti počet navzájem nezávislých údajů (kartézských souřadnic, polárních souřadnic, nebo údajů jiných, zvaných obecnými souřadnicemi), které úplně určují polohu daného hmotného systému (zde bodu) za dané kinematické konstituce.

Princip virtuálních posunutí ovládá celou nauku o rovnováze sil čili statiku. Jeho začátky lze hledati již v Aristotelově „zlatém" pravidle o páce, nebo ve Stevinově (1608) větě: „Ut spatium agentis ad spatium patientis, sic potentia patientis ad potentiam agentis," či konečně ve zcela podobném výroku v Galileových přednáškách o mechanice. Výslovně pronesl jej bez důkazu na základě geniální indukce Jan Bernoulli v dopise Varignonovi z 26. ledna 1717. Tehda nazýval se často „principem virtuálních rychlostí", ježto virtuální posuvy byly myšleny děleny elementem časovým dt. Lépe jest však mluviti o virtuálních pracích. Virtuální posunutí jsou míněna bezčasově, takže, je-li v podmínkových rovnicích $\Phi = 0$ atd. obsažen explicite čas, pokládá se při hledání virtuálních posunutí variací za stálý. Musíme si totiž vše představiti tak, že během „virtuálního" posunutí neměla vazba dostatek času, aby se znatelně změnila. Proto v tomto případě nejsou posunutí skutečná dx, dy, dz, počítaná z

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{\partial\Phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\Phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\Phi}{\partial z}dz = 0,$$

zároveň posuny virtuálními δx, δy, δz dle (e'). Není-li ve $\Phi = 0$ čas explicite, jest ovšem každé posunutí skutečné zároveň posunutím virtuálním.

Jsou-li podmínky dány rovnicemi, tedy jsou-li vazby oboustranné, jsou, jak se lze snadno přesvědčiti, virtuální posunutí zvratná, t. j. ke každému $+\delta\bar{r}$ patří možné $-\delta\bar{r}$. Jsou-li vazby jednostranné, dané nerovnostmi, nejsou virtuální posuvy zvratné a princip nabývá tvaru, který prvý udal Fourier (1799), později (1829) Gauss, totiž $\delta\bar{r}\bar{F} \leq 0$: Virtuální práce vtisknutých sil musí býti buď rovna nule nebo záporná.

Snadno lze osvědčiti účinnost principu virtuální práce na jednoduchých strojích, což přenecháváme čtenáři. Při takovýchto úlohách se velmi často užívá principu bezvážné, neprodlužitelné a dokonale ohebné niti, která ve stavu klidu je ve všech svých bodech podrobena témuž podélnému napětí, síle, která v každém bodě působí stejnou velikostí na obě strany.

56. Princip d'Alembertův.

Pohybovou rovnici Newtonovu pro volný hmotný bod můžeme přepsat na tvar $F - m\ddot{r} = 0$, jejž můžeme čísti: Připojíme-li k výsledné vnější, vtisknuté síle, působící na volný hmotný bod, fiktivní sílu $-m\ddot{r}$, tedy vznikne systém rovnovážný. Síla $-m\ddot{r}$ nazývá se v tomto spojení silou od setrvačnosti nebo kinetickou reakcí hmotného bodu, jakoby jí, ana má směr proti skutečnému zrychlení, se hmota vzpírala nebo bránila tomu, aby byla uvedena v pohyb. Nesmíme špatně rozuměti tomuto výrazu slovnímu:

Pohybu se vskutku nezabrání. Jak Maxwell vtipně poznamenal, mohli bychom stejně mluviti o tom, že číška čaje se brání oslazení, ježto se nestane sladkou dříve, než přidáme do ní cukru. Zde zcela podobně myslíme na tu okolnost, že hmota nedostane se z klidu do pohybu, leč nějakou vnější akcí. Ba mohli bychom zcela obecně definovati hmotu jako to, co může působiti silou setrvačnosti. Leč není třeba snad se obávati špatného porozumění. Ježto tedy vnější síly spolu se silami od setrvačnosti tvoří systém rovnovážný, můžeme na celkovou sílu $F - m\ddot{r}$ užíti principu virtuálních posunutí a psáti

$$\delta r \left(F - m \frac{d^2 r}{dt^2} \right) = 0, \qquad (a)$$

čili

$$\left(X - m \frac{d^2 x}{dt^2} \right) \delta x + \left(Y - m \frac{d^2 y}{dt^2} \right) \delta y + \left(Z - m \frac{d^2 z}{dt^2} \right) \delta z = 0. \qquad (a')$$

Posunutí δr i jeho složky jsou zde zcela libovolné a proto rozpadá se (a) a (a') na Newtonovy pohybové rovnice. Leč přece má (a) resp. (a'), princip d'Alembertův (1743) ve tvaru, jejž mu dal Lagrange ve své slavné Mécanique analytique (1811), ten význam, že problém pohybový, dynamický, redukuje na problém rovnováhy, statický.

Podléhá-li hmotný bod vazbám $\Phi = 0$, $\Psi = 0$, nahraďme je silami od vazeb $\Phi = \lambda . \nabla \Phi$ a $\Psi = \mu . \nabla \Psi$.

Pak zní rovnice Newtonova:

$$F + \Phi + \Psi = m \frac{d^2 r}{dt^2}. \qquad (b)$$

Zrychlení bodu bude nyní ovšem následkem vazeb jiné, než by bylo bez nich. Bude takové, jaké by odpovídalo u volného bodu vnější vtisknuté síle $F' = F + \Phi + \Psi$, kteráž nyní spolu s kinetickou reakcí $-m\ddot{r}$ tvoří systém rovnovážný. Redukovali jsme tento případ na předchozí, a užijeme-li tedy téhož obratu, plyne

$$\delta r \left(F + \Phi + \Psi - m \frac{d^2 r}{dt^2} \right) = 0, \qquad (c)$$

nebo, ježto δr jsou úplně libovolné,

$$X + \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \mu \frac{\partial \Psi}{\partial x} = m \frac{d^2 x}{dt^2}, \quad Y + \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \mu \frac{\partial \Psi}{\partial y} = m \frac{d^2 y}{dt^2},$$

$$Z + \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \mu \frac{\partial \Psi}{\partial z} = m \frac{d^2 z}{dt^2}. \qquad (c')$$

Rovnice (b') nazývají se nyní často **Lagrangeovými rovnicemi v prvém tvaru.**

Když v rovnici (b) omezíme význam $\delta\bar{r}$ na posunutí virtuální, můžeme Φ a Ψ prostě vynechati, neboť učinili jsme již v § 55 hypothesu, že síly od vazeb při virtuálních posunech práce nekonají, takže $\delta\bar{r}\bar{\Phi} = \delta\bar{r}\bar{\Psi} = 0$. Jest tedy ($a$) resp. ($a'$) obecným tvarem principu D'Alembertova, rozumíme-li $\delta\bar{r} = \bar{i}\delta x + \bar{j}\delta y + \bar{k}\delta z$ posunutí virtuální.

Z daných sil vtisknutých a vazeb můžeme určiti pohyb hmotného bodu, neboť pro pět neznámých x, y, z, λ, μ máme pět rovnic, totiž tři (c') a $\Phi = 0$, $\Psi = 0$.

Rozklad síly na složky dle kartézských souřadnic není podstatou věci. Můžeme získati pohybové rovnice obdobné Lagrangeovým na př. v rovinné soustavě polární s libovolným počátkem dle (19 b), když rozložíme vtisknutou vnější sílu F na složku radiální F_ρ a transversální F_φ. Pak ovšem musíme k nim přidati dle (b) složky neznámých zatím sil reakčních v týchž směrech; tak obdržíme pohybové rovnice vázaného pohybu

$$F_\rho + \Phi_\rho + \bar{\Psi}_\rho = m\bar{a}_\rho = m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\bar{\rho},$$
$$F_\varphi + \Phi_\varphi + \bar{\Psi}_\varphi = m\bar{a}_\varphi = m(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\bar{\varphi}, \qquad (d)$$

kde ovšem zatím neznáme velikost $\bar{\Phi}$ a $\bar{\Psi}$, o nichž víme jen, že stojí na skutečném pohybu kolmo.

Podobně při rozkladu síly v „přirozeném" systému na složku tangenciální a normální (viz (18 h) a obr. 23)

$$\bar{F}_\tau = m\ddot{s}\bar{\tau} = m\frac{d}{dt}(R\dot{\varphi})\,\bar{\tau}, \qquad \bar{F}_\nu + \bar{\Phi}_\nu + \bar{\Psi}_\nu = m\frac{v^2}{R}\bar{\nu} = mR\dot{\varphi}^2\bar{\nu}. \qquad (e)$$

Zde má φ význam úhlu při středu křivosti, R je poloměr křivosti, $\bar{\nu}$ značí normálu dovnitř křivky k středu křivosti směřující. Složka $-mR\dot{\varphi}^2\bar{\nu}$ nazývá se často **silou centrifugální,** směřujíc z křivky ven. Při tomto rozkladu nepřistupuje k F_τ žádná složka sil od vazeb, které dle předpokladu mohou míti směr jedině $\pm\bar{\nu}$.

Není zbytečno výslovně připomenouti, že o pohybu vázaném platí nezměněně princip kinetické energie ve tvaru (47 f, h, i) nebo, mají-li síly vtisknuté, potenciál ve tvaru (49 o), neboť síly od vazeb nekonají práce.

57. Příklad: Matematické kyvadlo.

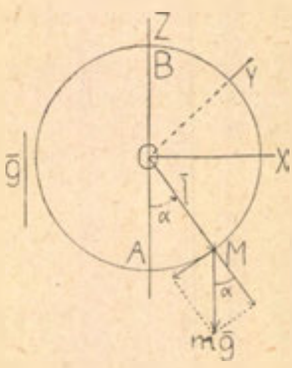
Abychom ukázali, jak se poznatků, jichž jsme došli, v praxi skutečně užívá, vypracujeme obšírně příklad fysikálně velmi důležitý.

Nechť se hmotný bod hmoty m pohybuje v silovém poli intensity $\bar{g} = -g\bar{k}$, jsa vázán na kouli poloměru l (obr. 56). Ptejme se nejprve po poloze rovnovážné. Působící síly vnější jsou

$$X = Y = 0, \quad Z = -mgk.$$

Podmínka vázanosti

$$\Phi = x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0, \qquad (a)$$



Obr. 56.

takže

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 2z. \qquad (b)$$

Rovnice (55 g) zní

$$2x\lambda = 0, \quad 2y\lambda = 0, \quad -mg + 2z\lambda = 0. \qquad (c)$$

Dle prvých dvou je $x = y = 0$, tedy dle (a) $z^2 = l^2$, čili $z = \pm l$. Rovnovážná poloha hmotného bodu je A nebo B, jak ostatně také bez počtu je na prvý pohled patrno.

Síla od vazby v rovnovážné poloze jest

$$\lambda \nabla \Phi = \frac{mg}{2z}(2x\bar{\imath} + 2y\bar{\jmath} + 2z\bar{k}) = mg\bar{k},$$

působí tedy na hmotný bod směrem $+\bar{k}$, to jest vzhůru; bod sám působí dle principu akce a reakce silou $-mg\bar{k}$ směrem dolů.

Ptejme se, mají-li vnější síly potenciál, čili zda existuje funkce U taková, aby

$$-\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad -\frac{\partial U}{\partial y} = 0, \quad -\frac{\partial U}{\partial z} = -mg.$$

Jest patrno, že

$$U = mgz + C, \qquad (d)$$

kde konstanta C nezávisí na x, y, z. Dle (55 c) je rovnováha tehdy, má-li potenciální energie U hodnotu extrémní. To zde nastává, je-li z maximum nebo minimum, čili $\pm l$, jako nahoře. Patrně jest v bodě A za minimální potenciální energie rovnováha stálá, v bodě B za maximálního U rovnováha vratká.

Zkoumati pohyb hmotného bodu jest úlohou méně snadnou. Dle (56 c') platí zde vztahy

$$m\ddot{x} = 2x\lambda, \quad m\ddot{y} = 2y\lambda, \quad m\ddot{z} = -mg + 2z\lambda. \qquad (e)$$

Abychom si úkol usnadnili, podrobme pohyb nové vazbě, dle níž má hmotný bod zůstávati v rovině $y = 0$, tedy

$$\Psi \equiv y = 0, \text{ čili } \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0. \qquad (f)$$

Z rovnic (e) změní se pouze druhá na $m\ddot{y} = 2y\lambda + \mu$. Dle ($f$) však $y = 0$, $\ddot{y} = 0$, čili $\mu = 0$. Síla od nové vazby jest $\mu \nabla \Psi = 0$, což znamená, že na kouli vázaný hmotný bod, pohyboval-li se jednou v rovině $y = 0$, bude se v ní pohybovati bez vnějšího donucení i nadále. Z rovnic (e) zbývá tedy první a třetí. Zaveďme novou proměnnou, úhel $AOM = \alpha$ v obr. 56. Pak

$$x = l \sin \alpha, \quad \dot{x} = l \cos \alpha \,.\, \dot{\alpha}, \quad \ddot{x} = -l \sin \alpha \,.\, \dot{\alpha}^2 + l \cos \alpha \,.\, \ddot{\alpha},$$
$$z = -l \cos \alpha, \quad \dot{z} = l \sin \alpha \,.\, \dot{\alpha}, \quad \ddot{z} = l \cos \alpha \,.\, \dot{\alpha}^2 + l \sin \alpha \,.\, \ddot{\alpha},$$

takže dosazením do (e) obdržíme

$$\begin{aligned} -ml \sin \alpha \,.\, \dot{\alpha}^2 + ml \cos \alpha \,.\, \ddot{\alpha} &= 2\lambda l \sin \alpha = 2\lambda x \\ ml \cos \alpha \,.\, \dot{\alpha}^2 + ml \sin \alpha \,.\, \ddot{\alpha} + mg &= -2\lambda l \cos \alpha = 2\lambda z. \end{aligned} \qquad (g)$$

Násobíme-li prvou $\cos\alpha$, druhou $\sin\alpha$ a sečteme, zůstane jednoduchý vztah $ml\ddot{\alpha} = -mg\sin\alpha$ čili $\ddot{\alpha} = -\frac{g}{l}\sin\alpha$. (h)

Tento základní vztah jsme odvodili z principu D'Alembertova, resp. prvých rovnic Lagrangeových v souřadnicích kartézských cestou sice obecnou, ale celkem složitou. Mohli jsme jej odvoditi daleko jednodušeji různými úvahami jinými:

1. Z pohybových rovnic v souřadnicích přirozených, resp. rozložení síly $m\bar{g}$ na složku normální a tangenciální. Složka tangenciální (ve směru rostoucího α!) jest dle (56e) $ml\ddot{\alpha}$ (neboť $R = l$, $\varphi = \alpha$) a zde působí složka $mg\sin\alpha$ ve směru klesajícího α, čili $mg\sin\alpha = -F_\tau$. Máme tedy

$$ml\ddot{\alpha} = -mg\sin\alpha \quad \text{jako dříve.}$$

2. Ze základního vztahu pro pohyb otáčivý (54f). V našem případě vystupuje osa otáčecí směru $\bar{\omega}^0$ při rostoucím α kolmo z papíru ven v bodě O. $K_\omega = ml^2$, $\bar{\xi} = \ddot{\alpha}\bar{\omega}^0$. Moment $\bar{M}$ síly $m\bar{g}$ kolem O je $[\bar{l}, m\bar{g}]$, má tedy velikost $mlg\sin\alpha$ a směr $-\bar{\omega}^0$ kolmo za papír. Dosazením

$$ml^2\ddot{\alpha}\bar{\omega}^0 = -mlg\sin\alpha\,.\,\bar{\omega}^0 \quad \text{jako dříve.}$$

3. Přímo z věty o impulsmomentu (53d). Ten jest

$$\bar{U} = [\bar{r}, m\bar{v}] = m\,[\bar{l}, l\dot{\alpha}] = ml^2\dot{\alpha}\bar{\omega}^0.$$

Moment $\bar{M}$ síly jest $-mlg\sin\alpha\bar{\omega}^0$, tedy dle (53$d$)

$$-mlg\sin\alpha = \frac{d}{dt}(ml^2\dot{\alpha}) = ml^2\ddot{\alpha} \quad \text{jako dříve.}$$

4. Z věty o kinetické energii. Ta jest $T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(l\dot{\alpha})^2$. Elementární práce dA síly $\bar{F} = m\bar{g}$ jest $dA = \bar{F}d\bar{r} = -mgld\alpha\sin\alpha$. Dle (47$i$)

$$-mgl\sin\alpha\dot{\alpha} = \frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}ml^2\dot{\alpha}^2\right) = ml^2\dot{\alpha}\ddot{\alpha} \quad \text{jako dříve.}$$

Jaká jest síla od vazby? Dle obecné definice jest $\lambda\bar{V}\Phi = 2x\lambda\bar{\imath} + 2z\lambda\bar{k}$. Výrazy $2x\lambda$ a $2z\lambda$ jsou dány rovnicemi (g). Dosadivše je sem a píšíce za $\ddot{\alpha}$ výraz (h), obdržíme bezprostředně

$$\lambda\bar{V}\Phi = (ml\dot{\alpha}^2 + mg\cos\alpha)(-\bar{\imath}\sin\alpha + \bar{k}\cos\alpha).$$

Povýšíme-li poslední faktor na druhou (ovšem skalárně), obdržíme 1. Jest to tedy vektor jedničkový. Jeho směr obdržíme po jediném pohledu na obr. 57, kde je znázorněna část tečné k dráze v bodě M. Patrně jest kolmý na dráze a směřuje do středu O, tedy roven $-\bar{l}^0$. Jest tedy síla od vazby, kterou označíme $\bar{\Phi}_v$

$$\bar{\Phi}_v = \lambda\bar{V}\Phi = -\bar{l}^0(ml\dot{\alpha}^2 + mg\cos\alpha). \quad (i)$$



Obr. 57.

Obdrželi bychom ji ze statické úvahy o rovnováze sil, jakožto reakci proti složce $mg\cos\alpha\bar{l}^0$ vnější síly, k níž bychom připojili fiktivní (zdánlivou) sílu centrifugální $ml\dot{\alpha}^2\bar{l}^0$ pohybem vznikající.

K témuž výsledku bychom dospěli kratčeji z pohybové rovnice (56e). Dle obr. 56, je-li reakční síla Φ_v, ovšem kolmá na dráze a předpokládaná ve směru

$\bar{\nu} = -\bar{l}^0$, máme

$$\bar{F}_\nu + \bar{\Phi}_\nu = (-mg\cos\alpha + \Phi_\nu)\bar{\nu} = ml\dot{\alpha}^2\bar{\nu},$$

takže

$$\bar{\Phi}_\nu = -\Phi_\nu\bar{l}^0 = -\bar{l}^0(ml\dot{\alpha}^2 + mg\cos\alpha), \text{ jako nahoře.}$$

Nyní jest nám integrovati pohybovou rovnici (h). Je-li i největší α stále ještě velmi malé, jedná-li se tedy o velmi malé elongace z rovnovážné polohy A, z nichž největší je α_m, můžeme za $\sin\alpha$ klásti přibližně úhel α (v obloukové míře), takže, píšeme-li pro krátkost za podstatně kladné $g/l = \omega^2$, přejde (h) ve tvar

$$\ddot{\alpha} = -\frac{g}{l}\alpha = -\omega^2\alpha. \qquad (j)$$

To jest diferenciální rovnice typu (26 b, d), kterou jsme ostatně mohli dovoditi přímo ze základních rovnic (e) substitucemi $x = l\alpha$, $y = 0$, $z = -l$. Integrovali jsme ji v § 26. Odpovídá harmonické změně výchylky α, kteráž

$$\alpha = \alpha_m \sin(\omega t + \alpha_0). \qquad (k)$$

Kmity bodu jsou harmonické, kmitová doba (sem i tam) dle (26 c)

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \qquad (l)$$

Kyvy jsou isochronní, nezávislé na amplitudě α_m, pokud ovšem zůstává dostatečně malá. Ježto tedy α je vždy velmi malé, jest také úhlová rychlost $\dot{\alpha}$ velmi malá, neboť dle (k) jest $\dot{\alpha}^2 = \omega^2(\alpha_m^2 - \alpha^2)$, $\cos\alpha$ je blízce roven 1, a tedy dle (i) reakční síla přibližně stálá a rovna $m\bar{g}$.

Tento případ pohybu odpovídá kývání malé těžké kuličky zavěšené na bezvážném neprodlužitelném vláknu ve vzduchoprázdném prostoru (neodporujícím prostředí) v poli zemské tíže intensity g, byla-li kulička velice málo vychýlena z rovnovážné polohy. Toto idealisované pokusné zařízení nazýváme **matematickým** čili **jednoduchým kyvadlem**. Dle (l) lze ho užíti k stanovení intensity zemské tíže g.

Je-li integrovati rovnici (h) úplnou,

čili

$$\ddot{\alpha} = -\frac{g}{l}\sin\alpha = -\omega^2\sin\alpha, \qquad (h)$$

můžeme postupovati způsobem podobným jako v § 26, násobíce obě strany výrazem $\dot{\alpha}dt = d\alpha$. Pak

$$\dot{\alpha}\ddot{\alpha}dt = -\omega^2\sin\alpha\,.\,d\alpha, \qquad \text{čili} \qquad d(\tfrac{1}{2}\dot{\alpha}^2) = \omega^2 d(\cos\alpha),$$

$$\tfrac{1}{2}\dot{\alpha}^2 = \omega^2\cos\alpha + C, \qquad \tfrac{1}{2}\dot{\alpha}_0^2 = \omega^2\cos\alpha_0 + C,$$

$$\dot{\alpha}^2 - \dot{\alpha}_0^2 = 2\omega^2(\cos\alpha - \cos\alpha_0), \qquad (m)$$

kde $\dot{\alpha}_0$ jest daná úhlová rychlost příslušná výchylce α_0.

Téhož výsledku se doděláme z věty o kinetické energii,

$$T + U = T_0 + U_0.$$

Jestiť zde dle (d)

$$U = mgz + C = -mgl\cos\alpha + C,$$

tedy

$$\tfrac{1}{2}ml^2\dot{\alpha}^2 - mgl\cos\alpha + C = \tfrac{1}{2}ml^2\dot{\alpha}_0^2 - mgl\cos\alpha_0 + C,$$

z čehož plyne (m). Nyní jest nám také jasno, jaký význam má integrační způsob na konci § 26 a zde užitý; (m) jest integrálem kinetické energie, či jak se dříve říkalo integrálem živé síly.

Výsledek, k němuž jsme dospěli, budeme diskutovati dle velmi jasného postupu v knize Hamelově. Budiž dána úhlová rychlost $\dot{\alpha}_0$ v nejnižším bodě A dráhy, tedy $\alpha_0 = 0$, $\cos \alpha_0 = 1$. Mysleme třeba, že vznikla horizontálním nárazem na hmotný bod v poloze rovnovážné. Pak

$$\dot{\alpha}^2 = 2\omega^2 (\cos \alpha - 1) + \dot{\alpha}_0^2, \tag{n}$$

čili

$$\dot{\alpha} = \sqrt{\dot{\alpha}_0^2 - 2\omega^2(1 - \cos \alpha)} = \sqrt{\dot{\alpha}_0^2 - 4\omega^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\alpha}. \tag{n'}$$

Mohou nastati tři případy, dle toho, je-li $\dot{\alpha}_0$ větší, menší, či rovno 2ω.

1. $\dot{\alpha}_0 > 2\omega$. Úhlová rychlost podrží vždy reálnou hodnotu, hmotný bod obíhá v kruhu kolem O, ovšem s proměnlivou rychlostí $\dot{\alpha}$, a to největší $\dot{\alpha}_0$, je-li $\alpha = 0, 2\pi, 4\pi$, tedy v nejnižším bodě dráhy, nejmenší $\sqrt{\dot{\alpha}_0^2 - 4\omega^2}$, je-li $\alpha = \pi, 3\pi, 5\pi, \ldots$ v bodě nejvyšším.

2. $\dot{\alpha}_0 < 2\omega$. Za reálného úhlu α_m, takového, že $\sin \tfrac{1}{2}\alpha_m = \frac{\dot{\alpha}_0}{2\omega}$, jest úhlová rychlost $\dot{\alpha} = 0$. Výchylka α jest vždy menší než α_m, nejvýše jemu rovna, neboť za $\alpha > \alpha_m$ by se stala rychlost $\dot{\alpha}$ imaginární. Za výchylky α_m se tedy pohyb hmotného bodu obrátí, $\dot{\alpha}$ změní své znamení. Bod provádí pohyb kývavý.

3. $\dot{\alpha}_0 = 2\omega$. Nejvyššího bodu B dráhy bylo by lze právě ještě stihnouti, ač s rychlostí nulovou.

Všimněme si těchto tří případů blíže.

1. Oběh v kruhu.

Z (n') plyne pro dobu, za kterou urazí hmotný bod dráhu od $\alpha = 0$ do α,

$$t = \int_0^\alpha \frac{d\alpha}{\sqrt{\dot{\alpha}_0^2 - 4\omega^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}} = \frac{1}{\dot{\alpha}_0} \int_0^\alpha \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}}, \tag{o}$$

kde $k^2 = \frac{4\omega^2}{\dot{\alpha}_0^2}$, takže $0 < k^2 < 1$.

Výsledek (o) jest eliptický integrál, který elementárními funkcemi nelze vyjádřiti v uzavřeném tvaru. Spokojíme se tím, že vypočteme dobu jednoho celého oběhu, t. j. dosadíme za horní mez $\alpha = 2\pi$. Rozvinutím jmenovatele v řadu

$$\left(1 - k^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \tfrac{1}{2} k^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \tfrac{3}{8} k^4 \sin^4 \frac{\alpha}{2} + \tfrac{5}{16} k^6 \sin^6 \frac{\alpha}{2} + \ldots$$

Ze sbírky trigonometrických vzorců vybereme

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} \cos \alpha,$$

$$\sin^4 \frac{\alpha}{2} = \tfrac{3}{8} - \tfrac{1}{2} \cos \alpha + \tfrac{1}{8} \cos 2\alpha,$$

$$\sin^6 \frac{\alpha}{2} = \tfrac{5}{16} - \tfrac{15}{32} \cos \alpha + \tfrac{3}{16} \cos 2\alpha - \tfrac{1}{32} \cos 3\alpha,$$

takže

$$\left(1 - k^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \tfrac{1}{4} k^2 + \tfrac{9}{64} k^4 + \tfrac{25}{256} k^6 + \ldots - B \cos \alpha + C \cos 2\alpha - \ldots$$

kde $B, C, \ldots$ jsou funkce sudých mocnin stálého k.

Ježto však $\cos\alpha\, d\alpha$, $\cos 2\alpha\, d\alpha, \ldots$ integrováno mezi 0 a 2π dává nulu, máme pro čas jednoho oběhu

$$T = \frac{2\pi}{\dot\alpha_0}\left(1 + \tfrac{1}{4}k^2 + \tfrac{9}{64}k^4 + \tfrac{25}{256}k^6 + \ldots\right). \qquad (p)$$

Tato řada konverguje pro $k < 1$, a to tím rychleji, čím je k menší, tedy $\dot\alpha_0$ proti $2l : g$ větší. Tím více také mizí rozdíl mezi maximální rychlostí $\dot\alpha_0$ ve spodním a minimální $\sqrt{\dot\alpha_0^2 - 4\omega^2}$ v horním bodě, čili tím menší je **stupeň nestejnoměrnosti otáčení**, kterýmžto jménem se v technice označuje rozdíl mezi úhlovou rychlotí největší a nejmenší, dělený rychlostí **střední**.

2. **Pohyb kývavý.**

Buď α_m maximální výchylka z rovnovážné polohy odpovídající $\dot\alpha = 0$, a dosaďme do (n) hodnoty sobě odpovídající $\alpha_0 = \alpha_m$ a $\dot\alpha_0 = 0$. Obdržíme

$$\dot\alpha^2 = 2\omega^2 (\cos\alpha - \cos\alpha_m), \qquad (q)$$

čili

$$dt = \frac{1}{\omega}\,\frac{d\alpha}{\sqrt{2\cos\alpha - 2\cos\alpha_m}} = \frac{1}{\omega}\,\frac{d\alpha}{\sqrt{2\,\{(1 - \cos\alpha_m) - (1 - \cos\alpha)\}}}. \qquad (q')$$

α nabývá postupně všech hodnot mezi α_m a $-\alpha_m$, takže

$$1 > \cos\alpha > \cos\alpha_m. \qquad (r)$$

Zaveďme novou proměnnou ψ substitucí

$$1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2} = (1 - \cos\alpha_m)\sin^2\psi = 2\sin^2\frac{\alpha_m}{2}\sin^2\psi, \qquad (s)$$

čili

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sin\frac{\alpha_m}{2}\sin\psi. \qquad (t)$$

Vztah (r) jest tím splněn. Když ψ stále s časem roste a probíhá veškeré reálné hodnoty, kolísá α mezi hodnotami $+\alpha_m$ a $-\alpha_m$. Můžeme tudíž psáti dle (s)

$$\sqrt{2(1 - \cos\alpha_m) - 2(1 - \cos\alpha)} = \sqrt{2(1 - \cos\alpha_m)(1 - \sin^2\psi)} =$$

$$= \sqrt{4\sin^2\frac{\alpha_m}{2}\cos^2\psi} = \pm 2\sin\frac{\alpha_m}{2}\cos\psi.$$

Diferenciací (t) plyne

$$\tfrac{1}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\, d\alpha = \sin\frac{\alpha_m}{2}\cos\psi\, d\psi,$$

čili dle (t)

$$d\alpha = \frac{2\sin\frac{\alpha_m}{2}\cos\psi\, d\psi}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\sin\frac{\alpha_m}{2}\cos\psi\, d\psi}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\alpha_m}{2}\sin^2\psi}}.$$

Odmocninu jest bráti se znamením kladným, ježto $\cos\frac{1}{2}\alpha$ jest vždy kladný. Dosadíme-li nalezené výrazy do (q') a integrujeme, je

$$t = \frac{1}{\omega}\int \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\alpha_m}{2}\sin^2\psi}}.$$

ψ má stále růsti s časem. Položíme-li $\sin\frac{1}{2}\alpha_m = k$ a počítáme čas od $\alpha = 0$, čili dle (t) od $\psi = 0$, dostáváme konečně

$$t = \frac{1}{\omega}\int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\psi}}.$$

To jest **Legendreův** normální tvar eliptického integrálu prvého druhu, označovaného $F(\psi, k)$. Jeho hodnoty pro ruzná ψ obdržíme nejpohodlněji z tabulek, jako jsou na př. E. **Jahnke**-F. **Emde**: Funktionentafeln mit Formeln und Kurven, Lipsko 1909.

Integrace pro čas celého kmitu sem i tam, když α proběhne hodnoty od 0 do $+\alpha_m$ a odtud k $-\alpha_m$ a k nule zpět, čili ψ hodnoty od 0 do 2π, může se zase uvésti na rozvoj v řadu. Jest totiž

$$T = \frac{1}{\omega} \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} = F(2\pi, k)$$

rozvojem zcela podobným jako v případě (1)

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \left(1 + \tfrac{1}{4}k^2 + \tfrac{9}{64}k^4 + \tfrac{25}{256}k^6 + \ldots\right). \qquad (u)$$

Je-li maximální elongace α_m hmotného bodu 5^0, tedy $k = \sin \frac{1}{2}\alpha_m = 0{\cdot}0436$ je prvý korekční člen $\frac{1}{4}k^2 = 0{\cdot}000475 \doteq \frac{1}{2100}$. Pro $\alpha_m = 10^0$ je $\frac{1}{4}k^2 = 0{\cdot}0019 \doteq \frac{1}{526}$ atd. Tím jest zároveň dána míra přesnosti výpočtu zjednodušeného ve vzorci (l).

Případ přechodný.

Je-li $\dot{\alpha}_0 = 2\omega$, vznikne z (n)

$$\dot{\alpha}^2 = 2\omega^2 (1 + \cos \alpha) = 4\omega^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Odmocněním a oddělením proměnných, počítáme-li čas od spodní polohy $\alpha = 0$,

$$t = \pm \frac{1}{2\omega} \int_0^{\alpha} \frac{d\alpha}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \pm \frac{1}{\omega} \log tg \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{4}\right).$$

Má-li se α státi $\pm \pi$, čili hmotný bod dospěti do horního bodu kružnice, je čas potřebný nekonečně veliký. Hmotný bod se blíží hornímu bodu B dráhy **asymptoticky**, se stále ubývající rychlostí, aniž ho v konečném čase stihne.

Jak se při těchto pohybech chová **síla od vazby**?

Dle (i) jest $\Phi_\nu = -(ml\dot{\alpha}^2 + mg \cos \alpha) l^0$. Pokud jest uzávorkovaný výraz kladný, má síla od vazby směr dovnitř kruhu, reakce hmotného bodu tedy směr z kruhu ven. Pokud můžeme vazbu nahraditi ohebnou, neprodlužitelnou, bezváznou nití, kterou hmotný bod napíná, potud odpovídají naše vzorce vláknovému matematickému kyvadlu s konečnými amplitudami. Stane-li se závorka zápornou, směřuje reakce bodu hmotného dovnitř kruhu nit by se shroutila, bod jí vázaný nebo uvnitř duté koule se pohybující by odpadl od kruhové dráhy.

Dle (n) máme, dosadivše za $\omega^2 = g : l$

$$\Phi_\nu = -l^0 (ml\dot{\alpha}_0^2 + 3mg \cos \alpha - 2mg).$$

Při **oběhu v kruhu** nastává nejmenší rychlost úhlová v horním bodě B, za $\alpha = \pi$, $\cos \alpha = -1$ a tudíž reakce hmotného bodu $ml\dot{\alpha}_0^2 - 5mg$. Aby hmotný bod nespadl dovnitř, musí tedy $\dot{\alpha}_0^2 > 5\omega^2$. Jeli $\dot{\alpha}_0^2 = 5\omega^2$, jest reakce v nejvyšším bodě sice nulová, ale bod má konečnou rychlost horizontální, takže bodem B proběhne, aniž spadne.

Za **pohybu kývavého** lze psát dle (i) a (q) dosazením za ω^2

$$\Phi_\nu = -l^0 (3mg \cos \alpha - 2mg \cos \alpha_m).$$

Pro $\alpha = \alpha_m$ se stane uzávorkovaný výraz roven $mg \cos \alpha_m$. Má-li býti > 0 musí $\alpha_m < \frac{\pi}{2}$. U nitkového kyvadla lze tedy připustiti rozkmity nejvýše do roviny horizontální. V tomto případě jest dle (n) a (q)


Obr. 58.

$$\dot{\alpha}_0^2 = 2\omega^2 - 2\omega^2 \cos \alpha = 2\omega^2 (1 - \cos \alpha) < 2\omega^2,$$

ježto α leží mezi $\pm \frac{\pi}{2}$.

V případech dosud nevyšetřených $2\omega^2 < \dot{\alpha}_1^2 < 5\omega^2$, mezi něž patří také případ přechodným nazvaný, se stane $\Phi_\nu = 0$ a hmotný bod opustí kruhovou dráhu, může-li (nitka, dutá koule), a ježto $\alpha > \frac{\pi}{2}$ a existuje konečná rychlost úhlová $\dot{\alpha}$ a tedy i postupná $l\dot{\alpha}$, nejprve stoupá a pak klesá v parabole. Za $\Phi_\nu = 0$ jest totiž $3mg \cos \alpha = 2\, mg \cos \alpha_m$, $\alpha_m > \frac{\pi}{2}$, $\cos \alpha_m < 0$ a příslušná úhlová rychlost dle (q) $\dot{\alpha}_1^2 = -\omega^2 \cos \alpha_1$. Přenecháme čtenáři, aby na základě vývodů § 23 dokázal, že parabola vybočí z kruhu teprve klesající větví (obr. 58).

58. Kyvadlo konické.

V předcházejícím § 57 napsali jsme sice rovnice (e) pro obecný pohyb bodu po ploše kruhové, čili pro tak zvané kyvadlo sférické (kulové), leč neřešili jsme jich. Vede totiž obecné řešení k obtížím rázu matematického; jest nutno užívati jako pomůcky eliptických funkcí a proto odkazujeme čtenáře ke knihám obšírnějším.*) Zde se zmíníme pouze o dvou zvlášť jednoduchých případech tohoto pohybu.

Prvý nastává, když pohyblivý bod se vzdálí jen nesmírně málo od své polohy rovnovážné. Pak totiž můžeme podobně jako u matematického kyvadla o velmi malé amplitudě klásti v (57 e) $z = -l$ takže pohybové rovnice jsou:

$$m\ddot{x} = 2x\lambda, \qquad m\ddot{y} = 2y\lambda, \qquad 0 = -mg - 2l\lambda. \qquad (a)$$

Dosadíme-li do prvých 2λ z poslední, máme

$$\ddot{x} = -\frac{g}{l}x = -\omega^2 x, \qquad \ddot{y} = -\frac{g}{l}y = -\omega^2 y. \qquad (b)$$

To jest však případ, který odpovídá obecnému skládání dvou navzájem kolmých kmitů harmonických téže frekvence, jež bylo řešeno v § 29. Výsledný pohyb bude harmonický v elipse, se zvláštními případy stejnoměrného pohybu kruhového a harmonického v přímce. Jest, jak víme z kinematiky, isochronický, doba kmitová nezávisí ani na amplitudě, ani na tvaru dráhy, rovnajíc se

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

*) Učebnice mechaniky, jež napsali Webster (angl.), Appell (franc.), Budde (něm.) a. j., nebo knihy o eliptických funkcích, jako na př. Greenhillova (angl.). Velmi obšírně o sférickém kyvadle jedná Durège v Elliptische Funktionen.

jako u kyvadla matematického. Plošná rychlost horizontální projekce hmotného bodu jest ve všech případech stálá.

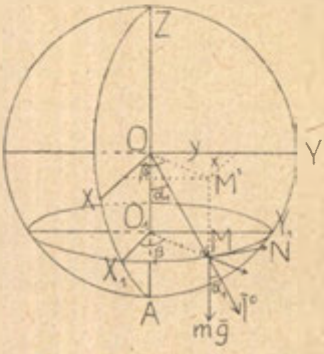
Po druhé se můžeme ptáti, zdali vyhovuje rovnicím (57 e) pohyb takový, že hmotný bod by obíhal stále v téže horizontální rovině kruh kolem bodu O_1 ležícího na ose Z. To jest případ kyvadla konického neboli kuželového. Má tedy býti splněna podmínka

$$z = -l\cos\alpha_1 = -C, \qquad (c)$$

kde C a α_1 jsou stálé. Z (57 e) vznikne $m\ddot{x} = 2x\lambda$, $m\ddot{y} = 2y\lambda$, $0 = -mg - 2C\lambda$, čili po výpočtu 2λ a dosazení

$$\ddot{x} = -\frac{g}{C}x = -\omega_1^2 x,$$

$$\ddot{y} = -\frac{g}{C}y = -\omega_1^2 y. \qquad (d)$$



Obr. 59.

Ze srovnání s předcházejícím případem vidíme, že jest tento případ možný, a že bod obíhá v kruhu stálou úhlovou rychlostí ω_1. Vedeme-li výpočet dále, pišme dle obr. 59

$$x = l\sin\alpha_1\cos\beta, \qquad y = l\sin\alpha_1\sin\beta, \qquad z = -l\cos\alpha_1. \qquad (e)$$

Tyto vztahy, v nichž β jest s časem proměnlivý úhel, splňují základní podmínku (57 a).

Násobme prvou a druhou rovnici (57 e) y a x a odečtěme prvou od druhé; neznámé λ vypadne a zbývá

$$\ddot{y}x - \ddot{x}y = 0, \quad \text{t. j. integrací} \quad \dot{y}x - \dot{x}y = c = \text{stálé}. \qquad (f)$$

Tyto vztahy, které platí také u obecného sférického kyvadla pro jeho průmět na rovinu kolmou k ose Z, nepraví dle (20 a) a (17 c) nic jiného, než že plošné zrychlení bodu M jest nulou, jeho plošná rychlost stálá. Ostatně plynulo totéž dosazením (e) do druhé rovnice (f), čímž vznikne $\dot{\beta}l^2\sin^2\alpha_1 = c$. Ježto c, l, α_1 jsou stálé, jest

$$\dot{\beta} = \frac{c}{l^2\sin^2\alpha_1} = \omega_z = \text{stálé}, \qquad \beta = \omega_z t + \beta_0.$$

Bod M provádí stejnoměrný pohyb kruhový úhlovou rychlostí ω_z, která jest $\omega_z = \omega_1$, jak poznáme dosazením (e) do některé z rovnic (d) nebo na prvý pohled. Dle (c) a (d) je

$$\omega_1^2 = \frac{g}{C} = \frac{g}{l\cos\alpha_1}, \qquad (g)$$

takže oběžná doba konického kyvadla

$$T = \frac{2\pi}{\omega_1} = 2\pi\sqrt{\frac{l\cos\alpha_1}{g}}. \qquad (h)$$

Za velmi malého úhlu α_1 přechází tento případ v předcházející.

Ptejme se ještě po síle od vazby. Ta jest

$$\bar{\Phi} = \lambda \bar{V} \Phi = 2\lambda(\bar{i}x + \bar{j}y + \bar{k}z) = -\frac{mg}{\cos\alpha_1}\{(\bar{i}\cos\beta + \bar{j}\sin\beta)\sin\alpha_1 - \bar{k}\cos\alpha_1\}.$$

Znásobíme-li celý uzávorkovaný výraz sám sebou skalárně, obdržíme 1. Jest to tedy vektor jedničkový. Velmi snadno zjistíme, že jeho směr jest $\overline{OM}$, takže jest celkem $\bar{l}^0$. Jest totiž $(\bar{i}\cos\beta + \bar{j}\sin\beta)$ jedničkový vektor směru $\overline{O_1M}$. Celkem je síla od vazby

$$\bar{\Phi} = -\frac{mg}{\cos\alpha_1}\bar{l}^0. \qquad (i)$$

a reakcí proti ní $-\bar{\Phi}$ napíná hmotný bod nit OM. Ovšem musí, jedná-li se o závěs na niti, býti $\cos\alpha_1 > 0$, tedy $\alpha_1 < \frac{1}{2}\pi$.

Tyto vývody z Lagrangeových rovnic mohli jsme zkrátiti přímou úvahou. Na bod M působí vnější síla vtisknutá mg a síla od vazby $\bar{\Phi}$, která může mít směr $+\bar{l}^0$ nebo $-\bar{l}^0$. Její velikost budiž označena Φ_n. Předpokládejme schválně falešně $\bar{\Phi} = +\Phi_n\bar{l}^0$. Obě síly rozložme na složky ve směru $-\bar{k}$, O_1M a MN (obr. 59) ve směru pohybu.

Pak plyne

$$-m\ddot{z} = mg + \Phi_n\cos\alpha_1 = 0, \quad \text{neboť } z = \text{stálé}. \qquad (j)$$

Dle (56 e), kde $R = l\sin\alpha_1$ a $\varphi = \beta$

$$0 = ml\sin\alpha_1 \cdot \ddot{\beta}, \qquad -\Phi_n\sin\alpha_1 = ml\sin\alpha_1 \cdot \dot{\beta}^2. \qquad (k)\,(l)$$

Z (j) plyne

$$\Phi_n = -\frac{mg}{\cos\alpha_1}, \qquad \text{tedy} \qquad \bar{\Phi} = -\frac{mg}{\cos\alpha_1}\bar{l}^0,$$

jako dříve. Z (k) jde $\beta = \omega_z t + \beta$, kde ω_z = stálé.

Dosadíme-li za Φ_n a β do (l) dostáváme

$$\omega_z^2 = \frac{g}{l\cos\alpha_1}, \qquad \text{tedy} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{l\cos\alpha_1}{g}}, \quad \text{jako dříve.}$$

Nejkratčeji bývá problém řešen v elementárních knihách, ovšem za předpokladu, že je stejnoměrný pohyb konického kyvadla možný, což my jsme teprve dokazovali. Ovšem jest tak nutno, neboť vnější síla mg rychlost v kruhu nemění, stojíc na ni kolmo. Musíme však vycházeti z poznatku, který teprve později odůvodníme, že kinetický problém pohybu v kruhu můžeme řešiti jako statický problém rovnováhy sil, když k silám skutečným přidáme neskutečnou fiktivní sílu centrifugální velikosti $mv^2 : R = mR\dot{\varphi}^2$ (viz 56 e). Podmínkou rovnováhy sil, vnější mg, od napětí niti $\bar{\Phi} = -\Phi_n\bar{l}^0$ a centrifugální, velikosti $mR\dot{\varphi}^2 = ml\sin\alpha_1\omega_z^2$ a směru $\overline{O_1M}$, jest, že jejich vektorový součet se rovná nule. Z průmětu jeho na směr OM plyne

$$\Phi_n = mg\cos\alpha_1 + ml\sin\alpha_1 \cdot \omega_z^2 \cdot \sin\alpha_1.$$

Průmět na směr kolmý na OM a v rovině OMM' ležící dává

$$mg\sin\alpha_1 = ml\sin\alpha_1\omega_z^2\cos\alpha_1.$$

Z této rovnice vypočteme, ω_z^2 a z prvé, jeho dosazením, Φ_n stejné, jako nahoře.

Zde je vhodno poznamenati následující: Kdybychom pohyb konického kyvadla poněkud porušili, takže by úhel sklonu nebyl přesně α_1, nýbrž $\alpha = \alpha_1 + \delta$ a úhlová rychlost místo ω_1 nyní $\omega = \omega_1 + \varepsilon$, kde však jsou δ a ε veličiny nekonečně malé prvého řádu, jichž druhé mocniny zanedbáváme, vyšla by pro α diferenciální rovnice druhého řádu homogenní s konstantními koeficienty. Takovýto pohyb nazývá Routh pohybem stacionárním (steady motion) nebo se mluví o stabilitě pohybu. Ze zmíněné diferenciální rovnice pro α totiž plyne, že se α mění periodicky kolem hodnoty α_1. Kyvadlo pokračuje ve svém pohybu, který není sice přesně konický, ale liší se od něho neustále velmi málo a periodicky. Děje se na př. v elipse, jejíž veliká osa se kolem OZ pomalu otáčí. Ač výzkum stability našeho pohybu neskýtá pražádných obtíží, odkazujeme přece, nechtějíce se šířiti, na knihu Hamelovu, kde je věc velmi průhledně vyložena.

59. Síly od tření v prostředí.

Upravíme-li si matematické kyvadlo — hmotnou kuličku na tenounké ohebné nitce — a pozorujeme jeho velmi malé kyvy ve vzduchu, poznáme brzy, že zákon o nezměnitelnosti amplitudy (57 k) není splněn. Amplitud s časem ubývá. Celý děj odpovídá lépe tlumenému pohybu kmitavému, jak jsme jej popsali v § 33. Mimo vnější síly $-\bar{\imath}mg\alpha = -\bar{\imath}m\omega^2 l\alpha$, kterou jsme předpokládali v § 57, a která v (33 a) odpovídá $-\omega^2 s\bar{s}^0$ a má směr proti pohybu resp. rychlosti, měli jsme předpokládati ještě vnější sílu $-2b\dot{s}m\bar{s}^0$, která má týž směr proti rychlosti hmotného bodu, a jest této rychlosti úměrna. Tato zkušenost opakuje se nám při pozorování skutečných pohybů velmi často, ba můžeme říci, snad s výjimkou pohybů nebeských těles, vždy. Velmi nápadnou se stává, děje-li se pohyb tělesa v nějakém hustém prostředí, na př. vodě a pod. Vystupují nové síly, které závisí na rychlosti pohybujícího se bodu nebo tělesa a mají směr opačný než rychlost. Nazýváme je silami od tření. Podobné síly vystupují ve velmi značné míře, stýkají-li se dvě tuhá tělesa, nadaná různou relativní rychlostí podél jistých ploch. Pak vystupují síly, zvané třením vlečným nebo valným. Vypátrání mechanismu, to jest fysikální podstaty velmi složitých zjevů, které souborně označujeme třením, jest velmi obtížné a namnoze se dosud veškerým snahám vymyká. Při tření výbavují se totiž tepelné a někdy i elektrické a magnetické zjevy, které absorbují, jak uvidíme, část kinetické energie.

Za účelem matematického zpracování pohybů v „odporujícím prostředí" činí se ode dávna jisté předpoklady o závislosti celého tohoto souboru zjevů na rychlosti. Tak na př. Newton kladl funkci rychlosti, v síle od tření $F_f = -f(v)\bar{v}^0$ vystupující, rovnu $f(v) = Av + Bv^2$, Jan Bernouli (1711) a Euler (1736) Av^n, d'Alembert (1744) $A + Bv^n$ a t. d. Pomocí takovýchto jednoduchých zákonů hledělo se dospěti k popisu pohybového zjevu diferenciální rovnicí, která se dá v uzavřeném tvaru integrovati. Tento postup často stačí jakožto prvé přiblížení k popisu časového průběhu skutečně pozorovaného. Jindy tomu tak není (na př. při brzdění železničních vozů) a pak jsme odkázáni vůbec jen na pokus.

V mechanice tuhých těles dotkneme se tření zvaného vlečným a valným. Zde jen několik poznámek obecných a o tření prostředí.

zvláště vzduchu, v němž se hmotný bod pohybuje. Celkem dosti dobře odpovídá vzorec Newtonův, dle něhož za rychlostí velmi malých je tření úměrno prvé, za velikých druhé mocnině rychlosti. Za rychlostí blízkých rychlosti akustických vln, kolem 330 *m/sek* tření vzduchu rychle roste nad úměrnost s v^2, dospívá maxima kolem 450 *m/sek*, a pak povlovně klesá k hodnotě přibližně stálé kolem $v = 1300$ *m/sek* a výše. Cranz ve své knize o vnější balistice, to jest nauce o pohybu těles vržených ve vzduchu, kde dosud nejúplněji jedná o výsledcích sem spadajících pokusů, uvádí neméně než 25 různých hodně složitých tvarů jednotného zákona, jenž byl pro odporovou sílu vzduchu různými autory navržen. Obecně lze říci, že v nejjednodušším zákoně $f(v) = Av^n$, kde $n = 1$ nebo $n = 2$, lze konstantu A považovati za úměrnou specifické hmotě ϱ prostředí a největšímu průřezu Q vrženého tělesa. Dále závisí na vnitřním tření prostředí a tím na teplotě, a konečně na tvaru tělesa*).

Síly od tření $F_f = -f(v)\bar{v}^0$ dle § 49 nemají potenciálu, nejsou konservativní. Angličané nazývají je dissipativní, Lord Kelvin mluví o dissipaci energie. To proto, že třením vzniklé teplo jest tvarem energie, který neumíme úplně přeměniti na energii mechanickou, t. j. kinetickou nebo potenciální, viditelných těles. Mimo to se toto teplo šíří vedením a zářením do okolí, teplotové rozdíly se v brzku vyrovnávají, a v prostoru všude stejné teploty vůbec neumíme, jak thermodynamika učí, trvale běžícím a periodicky se opakujícím — jedním slovem cyklickým — dějem teplo měniti na mechanickou energii.

Sestává-li celková síla F z části konservativní $F_c = -\nabla U$ a nekonservativní F_f od tření, zní Newtonova rovnice $F_c + F_f = m\dot{\bar{v}}$. Z násobení posunutím $d\bar{r} = \bar{v}dt$ obdržíme elementární práci

$$dA = F_c d\bar{r} + F_f d\bar{r} = mv\,dv = d\left(\tfrac{1}{2}mv^2\right) = dT. \qquad (a)$$

Ježto dle (49*j*) je $F_c d\bar{r} = -dU$, plyne

$$F_f d\bar{r} = d(T + U). \qquad (b)$$

Neplatí tedy věta o zachování mechanické energie ve tvaru (49*o*), nýbrž, ježto

$$F_f d\bar{r} = -f(v)\,\bar{v}^0\bar{v}dt = -f(v)\,vdt = -f(v)\,ds, \qquad (c)$$

součet kinetické a potenciální energie podél dráhy hmotného bodu neustále klesá. Jest totiž $f(v)$ podstatně kladné; je-li jeho, ovšem kladná, vhodně volená střední hodnota na trati od s_0 do s_1, kde $s_1 - s_0 > 0$, označena f_m, jest dle známé věty integrálního počtu

$$\int_{s_0}^{s_1} \bar{F}_f d\bar{r} = -\int_{s_0}^{s_1} f(v)\,ds = -f_m \int_{s_0}^{s_1} ds = -f_m(s_1 - s_0) < 0. \qquad (d)$$

takže

$$(T_1 + U_1) - (T_0 + U_0) < 0, \quad T_1 + U_1 < T_0 + U_0. \qquad (e)$$

Klesnutí rovná se dle (*b*) práci spotřebované na přemáhání tření.

*) Jiným zajímavým spisem o těchto a podobných problémech jest angl. kniha Lanchestrova, do němčiny přeložená Rungem: Aerodynamik, ein Gesamtwerk über das Fliegen.

Pohybuje-li se hmotný bod se třením kolmo na směr intensity homogenního pole — na př. těleso šinoucí se po horizontální ploše ledové — zůstává potenciální energie stálou $U_1 = U_0$, tedy klesá kinetická energie, těleso ztrácí rychlost, až se zastaví.

Pohybuje-li se hmotný bod v témž poli stálé intensity $\bar{g}$ podél siločáry, jest jeho pohybová rovnice

$$m\bar{g} - f(v)\,\bar{v}^0 = m\dot{\bar{v}}.$$

Jeho rychlost se z počátku zvětšuje. Je-li však $f(v)$ funkce stoupající, odpovídá-li větší rychlosti větší tření, stane se někdy v tak velikým, že

$$m\bar{g} = f(v)\,\bar{v}^0. \qquad (f)$$

Ježto potom $\dot{\bar{v}} = 0$, zůstává rychlost nadále stejnou a můžeme ji vypočísti z (f), známe-li tvar funkce $f(v)$.

Dosadíme-li dle toho, co bylo dříve řečeno, do $f(v) = Av^n$ za $A = C\varrho Q$ a do $m\bar{g} = mg\bar{v}^0$ za g rovné hmotě tělesa součin z jeho hmoty specifické ϱ_1 a objemu V, plyne pro konečnou rychlost

$$C Q \varrho v^n = V\varrho_1 g, \quad \text{čili} \quad v^n = \frac{1}{C\varrho}\varrho_1 \frac{V}{Q} g. \qquad (g)$$

Ježto za zvětšování tělesa téhož tvaru roste jeho objem rychleji než průřez, dosahují tělesa veliká větší konečné rychlosti než malá. Rovněž tělesa specificky těžší padají rychleji než specificky lehčí téhož tvaru. Na tom se zakládá na př. třídění rudy od hlušiny v tekoucí vodě. Kapky dešťové dosahují dosti značné rychlosti konečné (kolem 5 *m/sek*), nesmírně malé kapičky vodní nebo mlha z nich sestávající, které došly v nauce o elektřině významného použití, klesají ve vzduchu velmi pomalu (*mm/sek* a méně) a stav proměnné rychlosti trvá pouze velmi krátký okamžik.

*60. Síly při pohybu relativním. Pohyb postupný.

Newtonův dynamický základní zákon má dle definice v § 44 platiti v prostoru absolutním, síla i zrychlení v něm má býti vztažena na absolutně pevnou soustavu souřadnicovou. Ale již v kinematice relativního pohybu jsme řekli, že trati, rychlosti i zrychlení, jak je stanoví pozorovatel umístěný na povrchu zeměkoule, jsou vesměs relativní, měří se vzhledem k soustavě s povrchem zemským pevně spojené, tedy takové, která sama se nachází v pohybu vzhleďem k soustavě proložené sluncem, jakožto středem, a určitými stálicemi, které intuitivně přisuzujeme vyšší stupeň „absolutnosti". Pro takového pozorovatele patrně neplatí Newtonův zákon, použije-li ho na měřená zrychlení, která v souhlase s § 39 musíme označiti $\frac{d^2\bar{s}}{dt^2}$, a skutečné, fysikálně existující síly $\bar{F}$, to jest takové, které dle naší domněnky by mohl dokázati také pozorovatel v absolutním prostoru, na př. na slunci nebo jiné stálici pevně umístěný. Neplatí tedy obecně prostý vztah

$$m\frac{d^2\bar{s}}{dt^2} = \bar{F}. \qquad (a)$$

Ale snadno si pomůžeme, připustíme-li platnost Newtonova zákona v celé jeho velikolepé generalisující koncepci, píšíce jej dle (39 h) ve tvaru

$$\bar{F} = m\bar{a}_a = m(\bar{a}_r + \bar{a}_v + \bar{a}_c),$$

neboli

$$\bar{F} - m\bar{a}_v - m\bar{a}_c = m\bar{a}_r = m\frac{d^2\bar{s}}{dt^2}. \qquad (b)$$

K síle skutečné, abstraktně absolutní, musíme připojiti dodatečné členy, které mají se silami formální podobnost, rovnajíce se součinům z hmoty a zrychlení $-m\bar{a}_v$ a $-m\bar{a}_c$ a proto se nazývají silami zdánlivými, fiktivními. Pak platí (b) jakožto obdoba Newtonova zákona pro zdánlivé, námi naměřené zrychlení. Pro rovnovážný stav vzhledem k soustavě pohybované jest pravá strana (b) nulou.

Člen $-m\bar{a}_c = -2m[\bar{\omega}\bar{v}_r]$ dle (39 h), t. zv. síla Coriolisova vystupuje pouze při relativním pohybu vzhledem k soustavě rotující. Za rovnováhy jest nulou. Nerotuje-li soustava Σ' (označení totéž jako v §§ 38 a 39), mizí rovněž, a síla z vedení $-m\bar{a}_v$ se dle (39 g) redukuje na $-m\bar{c}$, kde $\bar{c}$ jest zrychlení pohybované soustavy Σ' vzhledem k absolutně pevné Σ. Pohybuje-li se však soustava Σ' přímočaře a rovnoměrně, je také $-m\bar{a}_v = 0$ a Newtonova rovnice má týž tvar, jako by byla Σ' v absolutním prostoru pevná. Rovnice (a) v tomto — a pouze v tomto — případě platí.

Naopak můžeme říci: Ze zjevů mechanických a takových, které se dají mechanicky vyložiti, mechanickými zjevy interpretovati, nemůžeme ničeho usouditi pro rozhodnutí otázky, zdali je soustava, na níž dlí pozorovatel, v absolutním klidu, nebo rovnoměrném, postupném, přímočarém pohybu. Vskutku se absolutní síla $\bar{F} = m\ddot{\bar{r}}$ ničím neliší od síly $\bar{F}_r = m\frac{d^2\bar{s}}{dt^2}$, jak ji naměříme v pohybované soustavě.

Předpokládejme v § 38 obr. 43, že v pravoúhlé soustavě pevné Σ a pohyblivé Σ' jsou všechny osy trvale rovnoběžné, takže $\bar{i}' = \bar{i}$, $\bar{j}' = \bar{j}$, $\bar{k}' = \bar{k}$, což nikterak neomezuje obecnost úvahy, podmiňujíc pouze pohyb postupný. Pak dle (38 a) je

$$\frac{\bar{d}\bar{s}}{dt} = \frac{d\bar{s}}{dt} = \dot{\bar{s}},$$

diferenciační znaménko $\bar{d}$ ztrácí svůj zvláštní význam. Má-li tedy býti

$$\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \frac{\bar{d}^2\bar{s}}{dt^2} = \frac{d^2\bar{s}}{dt^2}, \quad \text{musí} \quad \dot{\bar{r}} = \dot{\bar{s}} + \bar{v}_0, \qquad (c)$$

kde $\bar{v}_0$, dle (38 d, e) patrně rychlost z vedení, jest co do směru a rychlosti stálá. Další integrací plyne $\bar{r} = \bar{s} + \bar{v}_0 t + \bar{r}_0$, kde konstanta $\bar{r}_0$ jest dle obr. 43 polohový vektor začátku O' pohyblivé soustavy Σ' v okamžiku $t = 0$. Předpokládáme-li bez újmy obecnosti, že v tom okamžiku spadaly soustavy Σ a Σ' v jedno, je $\bar{r}_0 = 0$, a dle označení v § 38

$$\bar{s} = \bar{r} - \bar{v}_0 t,$$

čili

$$\bar{i}x' + \bar{j}y' + \bar{k}z' = \bar{i}(x - v_{0x}t) + \bar{j}(y - v_{0y}t) + \bar{k}(z - v_{0z}t). \qquad (d)$$

Z toho vidíme, že t. zv. transformací Galileovou

$$x' = x - v_{0x}t, \quad y' = y - v_{0y}t, \quad z' = z - v_{0z}t, \qquad (e)$$

to jest dosazením x', y', z' za x, y, z, se základní rovnice pohybová a tedy také ostatní z ní odvozené mechanické věty nemění. Říkáme, že pohybové rovnice jsou vzhledem ke Galileově transformaci invariantní. Krátce můžeme říci: Celá věda o mechanice jest táž pro pozorovatele v absolutním prostoru pevně umístěného a jiného, který koná svá pozorování v systému Σ', jsa spolu s ním unášen absolutním postupným, rovnoměrným a přímočarým pohybem. Tuto větu nazývají klasickým principem relativnosti, jejž nutno dobře odlišovati od moderního Einsteinova principu téhož jména.

Dva různé postupné pohyby, dvě po sobě provedené transformace, můžeme nahraditi jedinou téhož tvaru, v níž jen stálé koeficienty změní své hodnoty. To vyjadřují matematikové větou: Galileovy transformace tvoří grupu.

Spolu s rychlostí dá se na základě čistě mechanických zjevů také kinetická energie pouze relativně stanoviti; jest totiž dle (38 *d*)

$$\tfrac{1}{2} mv_a^2 = \tfrac{1}{2} mv_r^2 + \tfrac{1}{2} mv_v^2 + mv_r v_v, \qquad (f)$$

kde levá strana jest absolutní kinetická energie T_a, prvý člen pravé strany pozorovaná relativní kinetická energie T_r, druhý a třetí člen jsou neznámé. V posledním členu vyskytuje se pozorovaná relativní rychlost v_r dokonce jakožto faktor lineární, nikoli kvadratický.

Obecné rovnice (*b*) užíváme často i tehdy, považujeme-li soustavu pevně spojenou s povrchem zemským za absolutně klidnou Σ, což velmi často, ba v technice snad vždy jest možno a nevede k znatelným větším chybám, jak v příštím paragrafu se ukáže. Jest totiž někdy pohodlno, uvažovati o pohybu hmotného bodu nebo soustavy hmotných bodů vzhledem k systému koordinat Σ', pevně spojenému s nějakou pohybující se hmotou, tělesem, které spolu s Σ' vzhledem k povrchu zemskému provádí postupný nebo rotační pohyb. Mysleme na př. na pád tělesa v jedoucím vlaku, otáčejícím se kolotoči. I tu vystupují síly fiktivní.

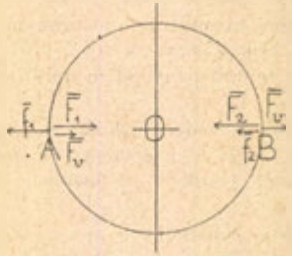
*61. Pohyby na zeměkouli.

Pro pozorovatele umístěného na zeměkouli mají zdánlivé síly při relativním pohybu význam velice důležitý.

I. Pojednáme nejprve o vlivu jejího pohybu revolučního*), abstrahujíce zatím od její rotace. Zrychlení $\bar{c}$ středu zeměkoule pochází od přítažlivé síly stálic, oběžnic, slunce a měsíce. Dle všeobecného zákona gravitačního jest velikost zrychlení rovna $kM : r^2$, kde M jest hmota přitahujícího tělesa, r jeho vzdálenost od země a k konstanta gravitační, jejíž velikost v absolutní soustavě měr leží mezi 6·66 až $6{\cdot}68 . 10^{-8} cm^3\, sec^{-2}\, gr^{-1}$. Má ovšem rozměr, neboť násobena hmotou a dělena čtvercem vzdálenosti má dáti rozměr zrych-

*) Rychlost zeměkoule v eliptické dráze má střední hodnotu 27·8 $km\, sec^{-1}$ a kolísá v rozmezí $\pm 500\, m\, sec^{-1}$ během půl roku.

lení $cm\,sec^{-2}$. Pro nesmírně velikou vzdálenost stálic a poměrně malou hmotu oběžnic jest jejich vliv k zanedbání nepatrný. Od slunce pochází zrychlení zeměkoule směrem k slunci $\bar{c} = 0{\cdot}58\ cm\,sec^{-2}$, tedy poměrně malé vůči zrychlení zemské tíže, kolem $980\ cm\,sec^{-2}$. Měsíc má hmotu $27{\cdot}2.10^6$-kráte menší než slunce, ale jeho střední vzdálenost (384.400 *km*) jest asi 390-kráte menší než střední vzdálenost slunce (asi 150.10^6 *km*), takže zrychlení zeměkoule k měsíci má velikost rovnou pouze asi 0·0055 zrychlení k slunci, t. j. $0{\cdot}0034\ cm\,sec^{-2}$. Jakkoli jsou tyto veličiny velmi malé, přece způsobují mohutný zjev slapů mořských, přílivu a odlivu.



Obr. 60.

Představme si (obr. 60) zemi jakožto kouli o středu O ve vzdálenosti r_0 od slunce (nebo měsíce), které nechť jest v obrazci na levo od zeměkoule. Je-li R poloměr zemský, jest vzdálenost nejbližšího k slunci bodu A rovna $r_1 = r_0 - R$, nejvzdálenějšího B pak $r_2 = r_0 + R$. Pro jednoduchost myslíme si přitahující těleso v rovině rovníkové. Směr do středu O zeměkoule jest v A charakterisován jedničkovým vektorem $\bar{\varrho}_1$, v B pak $\bar{\varrho}_2 = -\bar{\varrho}_1$. Je-li v bodě A nebo B umístěna hmota m, působí na ni skutečné (absolutní) síly dle gravitačního zákona od zeměkoule $\bar{F}_1 = F\bar{\varrho}_1$, resp. $\bar{F}_2 = -\bar{F}_1 = F\bar{\varrho}_2$, a od slunce (měsíce)

$$\bar{f}_1 = -k\frac{Mm}{r_1^2}\bar{\varrho}_1 \quad \text{resp.} \quad \bar{f}_2 = +k\frac{Mm}{r_2^2}\bar{\varrho}_2.$$

Chceme-li popisovati zjevy vzhledem k středu zeměkoule, musíme ke skutečným silám dle rovnice (60 *b*) přičísti zdánlivou sílu z vedení $-m\bar{a}_v$ a Coriolisovu $-m\bar{a}_c$, které, abstrahujeme-li zatím od rotace zemské, jejíž vliv pojmeme do velikosti F (viz níže), se dle (39 *g*) redukují na sílu $-m\bar{c}$, směřující od slunce (měsíce) pryč a rovnou

$$\bar{F}_v = k\frac{Mm}{r_0^2}\bar{\varrho}_1 = -k\frac{Mm}{r_0^2}\bar{\varrho}_2.$$

Jsou tedy síly celkem v A a B směrem do zemského středu působící

$$F\bar{\varrho}_1 - kMm\left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_0^2}\right)\bar{\varrho}_1, \quad \text{resp.} \quad F\bar{\varrho}_2 - kMm\left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r_2^2}\right)\bar{\varrho}_2. \qquad (a)$$

Dle

$$r_0 - r_1 = r_2 - r_0 = R \quad \text{a} \quad r_1 \doteq r_0 \doteq r_2$$

lze přibližně psáti

$$\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_0^2} = \frac{(r_0 - r_1)(r_0 + r_1)}{r_1^2 r_0^2} \doteq \frac{2R}{r_0^3} \doteq \frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r_2^2} \qquad (b)$$

a shrnouti výsledek úvahy ve výrok: Popisujeme-li zjevy na zeměkouli relativně k jejímu klidnému středu, působí na částice v místech A a B vedle přitažlivosti zemské síly odpudivé $2kMmR : r_0^3$, jakožto výslednice přítažlivosti slunce (měsíce) a zdánlivé síly z vedení. Vody oceánu, jichž částice jsou volně pohyblivé, vzdují se na místech těch

i sousedních, z klidné zeměkoule vodou oblité vytvořilo by se těleso ovální podobné protáhlému rotačnímu elipsoidu s přímkou AB jakožto velkou osou rotační.

Pojednali jsme obšírněji o této jednoduché věci, ježto v elementárních knihách bývá tato statická theorie slapů vylíčena často velmi zkresleně a falešně, jak jinak není možno, neužije-li se správně pojmu zdánlivé síly z vedení. Elementárně a při tom správně lze vysvětliti zjev jen z představy, že částice v A padá k slunci (měsíci) s větším zrychlením než střed zemský O, a ten zase rychleji než částice v protilehlém místě B. Proto, že ve výraze pro odpudivou sílu vystupuje třetí mocnina střední vzdálenosti r_0^3 ve jmenovateli, převládá přes jeho malou hmotu vliv měsíce nad sluncem více než dvakráte.

Při popisu zjevů pohybových na omezeném okrsku zemském, vzhledem k soustavě s povrchem zemským pevně spojené, síla z vedení $-m\ddot{c}$ vypadne z počtu. Pohybové rovnice hmotného bodu m, na nějž působí mimo sílu od slunce (měsíce) libovolná skutečná (absolutní) síla F a počátku souřadnic p pevného na povrchu (nerotující!) zeměkoule zní:

$$\frac{d^2\bar{s}_m}{dt^2} = \frac{\bar{F}}{m} + \bar{a}_{am} - \ddot{\bar{c}}_p, \quad \frac{d^2\bar{s}_p}{dt^2} = \bar{a}_{ap} - \ddot{\bar{c}}_p = 0. \qquad (c)$$

Členy $\bar{a}_{am}$ a $\bar{a}_{ap}$ jsou zrychlení způsobená sluncem (měsícem) v bodě m a p. Po dosazení z druhé do prvé rovnice (c) lze jejich rozdíl $\bar{a}_{am} - \bar{a}_{ap}$ vždy zanedbati. Jeho maximálná velikost jest totiž obdobně s (b) rovna $2kMr : r_0^3$, kde r jest vzdálenost bodu m od počátku p, $kM : r_0^2$ dle dříve uvedeného $0{\cdot}58\ cm\ sec^{-2}$. Je-li tedy na př. $1{\cdot}5\ km$, jest onen rozdíl pouze $2 . 0{\cdot}58 . 10^{-8}\ cm\ sec^{-2}$.

II. Přihlédněme nyní k vlivu rotace zemské. Z ($60b$) a ($39g, h$) víme, že rotační pohyb vztažné soustavy vede k zdánlivým silám z vedení a Coriolisově

$$-m\bar{a}_v = -m([\dot{\bar{\omega}}\bar{s}] + [\bar{\omega}[\bar{\omega}\bar{s}]])$$

a

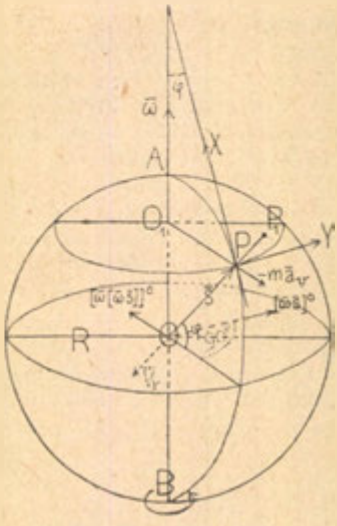
$$-m\bar{a}_c = -2m\left[\bar{\omega}\frac{d\bar{s}}{dt}\right] = -2m[\bar{\omega}\bar{v}_r]. \qquad (d)$$

Zemskou rotaci můžeme považovati za rovnoměrnou a směr osy rotační za stálý, takže $\bar{\omega}$ = stálé, $\dot{\bar{\omega}} = 0$. Uvidíme sice později, že se směr ω poněkud mění (precese a Chandlerova perioda), ale v nepříliš dlouhých dobách jsou změny ty nesmírně nepatrné a zde úplně je lze zanedbati. V síle z vedení zbývá tudíž pouze druhý člen.

Zeměkoule otočí se o 360^0 v absolutně pevné soustavě — vzhledem k hvězdné obloze — jednou za hvězdný den, čili $23^h\ 56^m\ 4^s =$ $= 86164$ sekund stř. času slunečního.*) Jest tudíž velikost rotační rychlosti

$$\omega = \frac{2\pi}{86164}\frac{1}{sec} = \frac{1}{13714}\frac{1}{sec} = 7{\cdot}292 . 10^{-5}\ sec^{-1}.$$

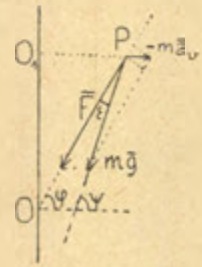
*) Data jsou čerpána z výborných tabulek logaritmických dra M. Valoucha (3. vyd. Praha. J. č. m. a f., 1919).



Obr. 61 *a*.

1. Jednejž se o bod P klidný na povrchu zeměkoule, v zeměpisné šířce φ, jehož posiční vektor vzhledem k středu zemskému O je $\overline{OP} = \bar{s} = R\bar{s}^0$ (obr. 61). Působí na něj dle zákona gravitačního síla skutečná F směru $\overline{PO}$

$$\bar{F} = -k\frac{Mm}{R^2}\bar{s}^0.$$



Obr. 61 *b*.

Od rotace pochází za klidu bodu síla zdánlivá

$$-m\bar{a}_v = -m[\bar{\omega}[\bar{\omega}\bar{s}]].$$

Z definice vektorového součinu a přímého názoru jest patrno, že

$$[\bar{\omega}\bar{s}] = \omega R \sin(90 - \varphi) \,.\, [\bar{\omega}\bar{s}]^0 = \omega R \cos\varphi [\bar{\omega}\bar{s}]^0,$$

kde jedničkový vektor $[\bar{\omega}\bar{s}]^0$ má směr kolmý na $\bar{\omega}$ a $\bar{s}$, v obrazci vyznačený a rovnoběžný se směrem $\overline{PY}$ podél rovnoběžky od západu na východ. Jest tudíž vektor

$$[\bar{\omega}[\bar{\omega}\bar{s}]] = \omega \,.\, \omega R \cos\varphi \sin 90^0 [\bar{\omega}[\bar{\omega}\bar{s}]]^0 = \omega^2 R \cos\varphi [\bar{\omega}[\bar{\omega}\bar{s}]]^0 \qquad (e)$$

směru $\overline{PO_1} \parallel \bar{a}_v^0$, a zdánlivá síla $-m\bar{a}_v$ má velikost $m\omega^2 R\cos\varphi = m\omega^2 \,.\, \overline{O_1P}$ a směřuje kolmo od zemské osy pryč. Totéž bychom obdrželi rozepsáním

$$[\bar{\omega}[\bar{\omega}\bar{s}]] = \bar{\omega}(\bar{\omega}\bar{s}) - \bar{s}\omega^2 = \bar{\omega}^0\omega^2 R \sin\varphi - \bar{s}^0\omega^2 R.$$

Tuto zdánlivou sílu $-m\bar{a}_v$ nazýváme silou centrifugální, čili odstředivou. Jak je patrno, vystupuje všude, kde popisujeme pohyby vzhledem k soustavě souřadnic, která se sama otáčí v prostoru absolutním (nebo s dostatečnou přesností za absolutní považovaném). Má-li bod vzhledem k ní zůstati v klidu, musí dle (60 *b*) vektorový součet všech skutečných sil a síly centrifugální býti roven nule. Tím jest také prokázána oprávněnost dříve neodůvodněného postupu výpočtu ku konci § 58.

Má-li (obr. 61 *b*) hmotný bod P zůstati vzhledem k zeměkouli v klidu, musí sílu

$$\bar{F} - m\omega^2 R\cos\varphi\, \bar{a}_v^0 = m\bar{g} \qquad (f)$$

vyvažovati jiná, na př. od napětí vlákna, na němž P jest zavěšen. Směr vlákna by i tehdy, kdyby země byla ideální homogenní koulí, spadal v jedno se směrem PO, středoběžným, pouze na rovníku nebo na pólech. Jinak směřuje na sev. polokouli vždy o něco jižněji. Směr výsledné síly mg, čili **váhy** hmotného bodu nazýváme **svislým** nebo **vertikálním**, její intensitu g **zrychlením zemské tíže**. Z výrazu (f) je dále patrno, že toto zrychlení by i na dokonalé kouli záviselo na zeměp. šířce φ. Maximální centrifugální zrychlení na rovníku je

$$\omega^2 R = (7{\cdot}3)^2 \,.\, 10^{-10} \,.\, 637 \,.\, 10^6 \, cm\, sec^{-2} \doteq 3{\cdot}4\, cm\, sec^{-2},$$

takže činí jen asi třetinu procenta zrychlení g. Poněvadž úhel ε mezi mg a F je velmi malý, lze psáti přibližně o velikostech

$$mg = F - ma_v \cos\varphi = F - m\omega^2 R \cos^2\varphi, \qquad (g)$$

kde $F = mG$ je síla a G zrychlení, které by na bod P působily, kdyby se kulová země neotáčela. Jest tedy g_φ a g_0 v zeměpisné šířce φ a na rovníku $(\varphi = 0)$

$$g_\varphi = G - \omega^2 R \cos^2\varphi, \quad g_0 = G - \omega^2 R, \quad g_\varphi - g_0 = \omega^2 R \sin^2\varphi.$$

Na kulové zemi přibývalo by od rovníku k točnám zrychlení se čtvercem sinusu zeměpisné šířky. Ježto země je **zploštělá** a **geocentrická šířka** φ není úplně totožnou se **šířkou zeměpisnou** $\psi = \varphi + \varepsilon$, roste zrychlení rychleji.

2. **Volný pád a horizontální pohyb na rotující zeměkouli.** Nechť padá bod hmoty m z bodu P_1, ležícího ve výšce h nad P (obr. 61). Je-li $\bar{s}$ jeho okamžitý polohový vektor měřený od bodu P, který si myslíme pevně spojený se zemí, je pohybová rovnice dle (f) a $(60\,b)$

$$m\frac{d^2\bar{s}}{dt^2} = m\bar{g} - m\bar{a}_c = m\bar{g} - 2m\left[\bar{\omega}\frac{d\bar{s}}{dt}\right]. \qquad (h)$$

Považujme směr rychlosti v_r v prvém přiblížení za stálý a totožný s g^0 — což vzhledem k velmi malé rychlosti otáčecí ω je možno, jak nás sám výsledek poučí — a volme jej za kladnou osu Z. Směr $[\bar{\omega}\bar{v}_r]$ je kolmý na rovině poledníkové AOP a směřuje tedy podél rovnoběžky na západ. Úhel mezi ω a $\bar{v}_r$ je $90^0 + \varphi$ (vlastně $90^0 + \psi$, ale abychom nekomplikovali výkres, zaměňujeme zde φ za ψ) a tudíž

$$|[\bar{\omega}\bar{v}_r]| = \omega v_r \sin(90 + \varphi) = \omega v_r \cos\varphi.$$

Coriolisova síla je $-ma_c$, tedy směru opačného, na východ; tak volme osu Y. Osa X jde potom podél meridiánu na sever. Rovnice (h) přepíše se semikartézsky

$$m\frac{d^2\bar{s}}{dt^2} \equiv m\frac{d^2}{dt^2}(\bar{i}x + \bar{j}y + \bar{k}z) = \bar{k}mg - 2m\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega\cos\varphi & 0 & -\omega\sin\varphi \\ 0 & 0 & \dot{z} \end{vmatrix} \qquad (i)$$

a rozpadne se na

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = 2\omega\cos\varphi \,.\, \dot{z}, \quad \ddot{z} = g.$$

Z prvé a třetí plyne bezprostředně

$$\dot{x} = A, \quad x = At + B, \quad \dot{z} = gt + C, \quad z = \tfrac{1}{2}gt^2 + Ct + D.$$

Buď bod m v čase $t = 0$ vypuštěn z P_1 $(x = y = 0,\ z = -h)$ bez počáteční rychlosti. Pak integrační konstanty $A = B = C = 0$, $D = -h$, a dosazením za $\dot{z}$

$$\ddot{y} = 2\omega g \cos\varphi \,.\, t, \quad \dot{y} = \omega g \cos\varphi \,.\, t^2 + E, \quad y = \tfrac{1}{3}\omega g \cos\varphi \,.\, t^3 + Et + G.$$

Dle začátečních podmínek jsou konstanty $E = G = 0$. Celkem máme:

$$\begin{aligned} &\dot{x} = 0, \quad x = 0, \\ &\dot{y} = \omega g \cos\varphi \,.\, t^2, \quad y = \tfrac{1}{3}\omega g \cos\varphi \,.\, t^3, \\ &\dot{z} = gt, \quad z = \tfrac{1}{2}gt^2 - h. \end{aligned} \tag{j}$$

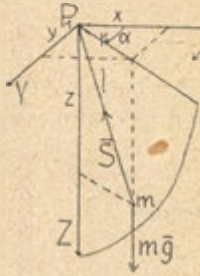
Eliminací t z y a z plynula by dráha jakožto Neilova parabola. Hmotný bod dopadne na povrch zemský $(z = 0)$ v čase $t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$, ale nikoli do bodu P $(x = y = z = 0)$, nýbrž do bodu $x = z = 0$, $y = \frac{1}{3}\omega g \cos\varphi \,.\left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{3}{2}}$, ležícího ve vzdálenosti y na východ. Úchylka ta je největší na rovníku, kdežto na pólech je rovna nule. Ale vždy je velmi malá. Kdyby na př. na rovníku byla výška pádu $h = 18g$, t. j. asi 180 metrů, byla by $y = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{13700} \,.\, 980 \,.\, 6^3 = 5\,cm$. Byl tedy náš zjednodušující předpoklad $v_r \| g$ dostatečně dobře splněn. Ostatně činíme při výpočtu i druhý tichý předpoklad, že totiž $\bar{g}$ je podél celé dráhy téže velikosti, ač ve skutečnosti směrem k zemi poněkud, třeba nesmírně nepatrně, roste.

Východní úchylka shledána při pokusech (Reich 1831) v mezích pozorovacích chyb souhlasnou se skutečností. Současně stanovena velmi malá úchylka jižní, která přesahuje mnohokráte tu, která by plynula z theorie přesnější (srv. Föppl IV, 356), a jest tak malá, že se pozorování úplně vymyká. Někteří (Hall 1903) ji přičítají vůbec jen pokusným chybám. Elementárně lze východní výchylku vysvětliti takto: Těleso v bodě P_1 mělo v okamžiku vypuštění větší východní složku rychlosti ($\omega \times$ vzdálenost od osy zemské) než bod P zemského povrchu. Poněvadž se tato složka zachovává, „předběhne“ při svém pádu bod P směrem na východ.

Ještě snadněji lze dokázati, že hmotný bod, kterému udělíme horizontální rychlost podél meridiánu na sever, $\bar{v}_r = v_r\bar{\imath}$, podléhá Coriolisově síle $\ddot{y} = 2\omega \sin\varphi \,.\, v_r$, která vede k východní výchylce $y = \omega \sin\varphi \,.\, v_r t^2$. Při jižní rychlosti $\bar{v}_r = -v_r\bar{\imath}$ nastává výchylka na západ, tedy na severní polokouli vždy k pozorovatelově pravé ruce. Populární vysvětlení lze podati zcela obdobně jako nahoře. Zato se takovému výkladu vymyká jižní (severní) výchylka tělesa horizontálně vrženého na východ (západ), která se vysvětluje Coriolisovou silou $-\bar{\imath}\,2m\omega \sin\varphi \,.\, v_y$ (při $v_y \gtrless 0$). Tato plyne z determinantu v (i), kde poslední řádek je přepsán na $0, v_y, 0$. Ač jest Coriolisova síla velmi malá (za rychlosti 10 $m/sec.$ obnáší asi $\frac{1}{7000}$ váhy tělesa), zdá se, že u řek je její sekulární působení patrným. Mnohé řeky severní polokoule (Gironda, Odra, Visla, Němen, Dunaj, Volha, Ganges) zneháhla překládají svůj spodní tok na pravo, takže, ač jejich pravý břeh jest pokryt vypnulinami a pahrbky, je na levém břehu v dosti veliké šířce rovinný plochý nános. (Baerův zákon 1860.)

Oba popsané děje východní úchylky přicházejí k platnosti u mas vzduchových, které, stoupajíce poblíže rovníku vzhůru, se pohybují na sever, kde padají zpět k povrchu zemskému. Východní výchylka způsobuje, že se projevují jakožto větry západní (passáty). U nás stoupající masy vzduchové způsobují větry východní. Podobné úvahy platí i o proudech mořských.

3. Kyvadlo Foucaultovo. Východní úchylky pokusně stanovené při volném pádu mohli bychom užíti jakožto důkazu pro rotaci zemskou. Ale daleko přesvědčivěji působí snazší klasický pokus Foucaultův s kyvadlem, provedený r. 1851 v pařížském Pantheonu ve velikém měřítku. Rovina kyvů otáčí se totiž směrem ručiček hodinových (na sev. polokouli) úhlovou rychlostí $\omega \sin \varphi$, kde ω a φ mají týž význam, jako dosud v tomto paragrafu, úhlové rychlosti zeměkoule a zeměpisné šířky. Velmi přesné pokusy provedl v letech 1876—1878 Kamerlingh Onnes v Groningách. Základní diferenciální rovnice plynou z názoru velmi snadno. Užijeme téže soustavy souřadnic jako na obr. 61, přenesše pouze počátek do P_1. Základní rovnice je podobná jako (h); k vnější síle $m\bar{g}$ přistoupí napětí $\bar{S}$ vlákna délky l, takže



Obr. 62.

$$m \frac{\bar{d}^2 \bar{s}}{dt^2} = m\bar{g} + \bar{S} - 2m[\bar{\omega}\bar{v}_r]. \qquad (k)$$

Dle jediného pohledu na poněkud zřetelnější obr. 62 a rovnici (i) lze (k) rozepsati na

$$m \frac{d^2}{dt^2}(\bar{\imath}x + \bar{\jmath}y + \bar{k}z) = \bar{k}mg - \left(\bar{\imath}S\frac{x}{l} + \bar{\jmath}S\frac{y}{l} + \bar{k}S\frac{z}{l}\right) -$$
$$- 2m \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ \omega \cos\varphi & 0 & -\omega \sin\varphi \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix},$$

jež se rozpadá na tři základní rovnice, k nimž přistupuje podmínka

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2, \quad \text{čili} \quad x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} = 0. \qquad (l)$$

Zní:

$$m\ddot{x} = - S\frac{x}{l} - 2m\omega\dot{y}\sin\varphi,$$

$$m\ddot{y} = - S\frac{y}{l} + 2m\omega(\dot{x}\sin\varphi + \dot{z}\cos\varphi), \qquad (m)$$

$$m\ddot{z} = - S\frac{z}{l} - 2m\omega\dot{y}\cos\varphi + mg.$$

Násobme postupně $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ a sečtěme. Vznikne vzhledem k (l)

$$m(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}) = \frac{d}{dt}(\tfrac{1}{2}mv^2) = mg\dot{z}. \qquad (n)$$

To však není nic jiného než princip kinetické energie v témž tvaru, jako u obyčejného matematického kyvadla v absolutním prostoru.

S í l a C o r i o l i s o v a n e k o n á ž á d n é p r á c e, jak je ostatně na prvý pohled patrno z jejího výrazu $[\omega \bar{v}_r]$, neboť stojí stále kolmo na rychlosti a tedy dráze hmotného bodu; formálně dle (8 *a*) a (6 *b*) jest $\bar{v}_r [\omega \bar{v}_r] = 0$.

V dalším omezíme se na kyvy o amplitudě velmi malé, takže $x, y, \dot{x}, \dot{y}$ jsou veličiny velmi malé prvého řádu. Ježto z je konečné a neustále přibližně rovno l, jest dle (l) $z\dot{z} = -(x\dot{x} + y\dot{y})$, $\dot{z}$ a rovněž $\ddot{z}$ nekonečně malé druhého řádu. Zanedbáme-li ve třetí rovnici (m) veličiny malé proti konečným, obdržíme pro $z = l$ velikost napětí vlákna $S = mg$, a dosadivše do prvé a druhé, v níž zanedbáme $\dot{z}$ nekonečně malé druhého řádu,

$$\ddot{x} = -g\frac{x}{l} - 2\omega\dot{y}\sin\varphi,$$

$$\ddot{y} = -g\frac{y}{l} + 2\omega\dot{x}\sin\varphi. \qquad (o)$$

Z nich plynou násobením $\dot{x}$, $\dot{y}$, resp. x, y

$$\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} = -\frac{g}{l}(x\dot{x} + y\dot{y}) \quad \text{a} \quad x\ddot{y} - y\ddot{x} = 2\omega\sin\varphi\,(x\dot{x} + y\dot{y})$$

a integrací

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = -\frac{g}{l}(x^2 + y^2) + C_1, \quad x\dot{y} - y\dot{x} = \omega\sin\varphi\,(x^2 + y^2) + C_2. \quad (p)$$

Těmito rovnicemi jest určen pohyb průmětu hmotného bodu v horizontální rovině XY. Zaveďme v ní (obr. 62) souřadnice polární r a α; pak

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\alpha}^2, \quad x\dot{y} - y\dot{x} = r^2\dot{\alpha}$$

výpočtem nebo dle (16 *d*) a (17 *c*), neboť poslední výraz není než dvojnásobná plošná rychlost bodu. Rovnice (p) přejdou dosazením v

$$\dot{r}^2 + r^2\dot{\alpha}^2 = -\frac{g}{l}r^2 + C_1, \quad r^2\dot{\alpha} = r^2\omega\sin\varphi + C_2. \qquad (q)$$

Prvá jest splněna také průmětem sférického kyvadla, jak okamžitě plyne z (58 *b*), druhá však ne, neboť plošná rychlost zde není stálá jako tam. Ale nechme soustavu souřadnicovou X, Y otáčeti se kolem osy Z úhlovou rychlostí $\omega\sin\varphi$. Pak nový úhel α_1 bude

$$\alpha_1 = \alpha - (\omega\sin\varphi)t, \quad \dot{\alpha}_1 = \dot{\alpha} - \omega\sin\varphi$$

a dosazením do druhé z rovnic (q)

$$r^2\dot{\alpha}_1 = r^2\dot{\alpha} - r^2\omega\sin\varphi = C_2. \qquad (r)$$

Z prvé rovnice (q) vznikne, zanedbáme-li člen s ω^2 jakožto malý druhého řádu,

$$\dot{r}^2 + r^2\dot{\alpha}_1^2 = -\frac{g}{l}r^2 - 2C_2\omega\sin\varphi + C_1 = -\frac{g}{l}r^2 + C_3. \qquad (s)$$

V nové otáčející se soustavě obdržíme tedy úplně stejné rovnice jako dle § 58 platí v absolutním prostoru pro velmi malé kmity kyvadla sférického. To však znamená, že se na př. u kmitů rovinných

na severní polokouli v zeměpisné šířce φ otáčí rovina kmitová sama úhlovou rychlostí $\omega \sin \varphi$ ve směru od severu přes východ, jih a západ, tedy ve směru ručiček hodinových neboli stejně se zdánlivým oběhem slunce, což právě potvrdil pokus Foucaultův.

Vysvětliti jej elementárně jest velmi obtížno, ne-li nemožno. Kvalitativně průběh chápeme, vzpomeneme-li úchylek při horizontálním pohybu na zeměkouli, a myslíme-li za malých amplitud kývání přibližně jako pohyb horizontální. Ostatně nejsou rovnice (o) než vyjádřením této okolnosti. Bod uchyluje se neustále v pravo od pozorovatele, hledícího ve směru pohybu. Obyčejný způsob elementárního výkladu bývá tento: Dle poznámky k ($57 f$) zachovává rovinné kyvadlo v absolutním prostoru rovinu kyvu. Rozložíme-li (obr. 61 a) absolutní rotační rychlost zeměkoule ω na složky v ose X a Z, jsou $\omega \cos \varphi$ a $-\omega \sin \varphi$. Otáčení kolem osy X nemá na kyvadlo vlivu. Zato složka otáčení kolem osy Z směrem od Y k X projevuje se pozorovateli tak, jakoby se rovina kyvů vzdalovala od osy X a blížila k Y rychlostí $\omega \sin \varphi$. Že tento jednoduchý výklad není správný, plyne již z toho, že by nutně musel platiti pro libovolné amplitudy, čemuž tak není.

Několik slov o příčinách častého nezdaru při demonstraci pokusu Foucaultova: Amplitudy musí býti malé a pohyb kyvadla pokud možno rovinný. Přesná theorie sférického kyvadla totiž učí, že elipsa, kterou opisuje horizontální průmět bodu, se otáčí, a to v témž směru, v němž sama se probíhá. Osy stáčí se úhlovou rychlostí úměrnou ploše opsané elipsy. Odpovídají-li na př. amplitudám 5^0 a 1^0, otočí se již během 10 celých kmitů téměř o 2^0 (srv. Voigt: El. Mech.). Tímto zjevem se Foucaultovo otočení (u nás $11^0 5'$ za hodinu) překrývá, a snadno může i co do směru vyjíti zdánlivě opačně.

4. Kyvadlo kuželové. Rovnicím (o) vyhovují, jak se snadno přesvědčíme dosazením, integrály

$$x = \pm r_0 \sin nt, \quad y = \pm r_0 \cos nt. \tag{t}$$

Při tom musí n splňovati rovnici

$$n^2 \pm 2\omega \sin \varphi \, . \, n - \frac{g}{l} = 0,$$

čili, zanedbáme-li $\omega^2 \sin^2 \varphi$ proti $g : l$

$$n = \sqrt{\frac{g}{l}} \left(1 \mp \omega \sin \varphi \sqrt{\frac{l}{g}} \right). \tag{u}$$

Jak plyne z ($29 d$) značí (t) pohyb hmotného bodu v kruhu a sice po prvé ($y = +$) směrem od osy Y k X, po druhé ($y = -$), směrem opačným. Z (u) je patrno, že úhlová rychlost konického kyvadla, které se na severní polokouli otáčí směrem ručiček hodinových ($y = -$), je větší nežli proti ručičkám hodinovým. Dva hodinové stroje regulované takovými kyvadly úplně totožnými, ale v opačném směru obíhajícími, nejdou stejně, nýbrž prvý předbíhá — na severním pólu u kyvadla 1 m dlouhého denně o 4 vteřiny, jinde o $4 . \sin \varphi$ vteřin. Důvod se snadno demonstruje otáčením takového kyvadla na centrifugálním stroji.

IV. Dynamika soustavy bodové.

62. Bodová soustava. Těleso.

Mějme libovolný počet n navzájem rozlišitelných (diskretních) hmotných bodů v prostoru rozložených. Ježto jsou rozlišitelny, mysleme je očíslovány jakožto m_1, m_2, ... m_n. Jejich okamžitou polohu určujeme polohovými vektory $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2$, ... $\bar{r}_n$, vedenými z téhož v prostoru pevného počátku O. Vzájemná poloha dvou libovolných bodů m_λ a m_μ jest dána vektorem $\bar{r}_{\lambda\mu} = -\bar{r}_{\mu\lambda}$, kde pořad indexů značí směr postupu. Patrně jest zcela obecně $\bar{r}_{\lambda\mu} = \bar{r}_\mu - \bar{r}_\lambda$.

Vybereme-li ze všech hmotných bodů ve vesmíru za účelem určité úlohy jen jistý jejich soubor, na př. hmotné body, které se nacházejí uvnitř jisté předepsané uzavřené plochy, mluvíme o soustavě bodové, bodovém systému. Všechny relativní polohové vektory $\bar{r}_{\lambda\mu}$ mezi body této soustavy určují její okamžitou konfiguraci. Mohou-li se jak směry, tak velikosti všech vektorů $\bar{r}_{\lambda\mu}$ libovolně měniti, mluvíme o soustavě (úplně) volných bodů. Jejím opakem je soustava taková, v níž veškeré vzájemné vzdálenosti jednotlivých bodů jsou nepromĕnné, kde tedy veškeré velikosti $r_{\lambda\mu}$ jsou stálé, jakoby veškeré body byly spojeny nehmotnými, úplně tuhými tyčemi. Takovouto soustavu bodů, tuhými vazbami spojených, nazýváme soustavou absolutně tuhou. Jak si tyto tuhé vazby můžeme představiti fysikálně realisovány, o tom pojednáme později. Pojem tuhé soustavy je velmi důležitý, neboť od něho přecházíme k pojmu tuhého tělesa, stanovíce axiomaticky: „Je-li mechanická věta dokázána pro soustavu diskretních, navzájem tuhými vazbami spojených bodů, platí i pro tuhé těleso, které jest považovati za mezní (limitní) její případ."

Fysikálním tělesem vůbec nazýváme soustavu hmotných bodů, obsaženou v jisté, v prostoru vhodně volené, uzavřené ploše regulárné — t. j. spojitou tečnou rovinu a určitou křivost mající. O volbě této plochy rozhoduje v každém případě zvlášť zkušenost. Hmota M tělesa konečného jest součet Σm hmot veškerých hmotných bodů čili částic v ploše té uzavřených. Předpokládáme, že i v nejmenším fysikálně uskutečnitelném a měřitelném objemovém elementu ΔV, myšleném v nejbližším okolí hmotné částice kteréhokoli skutečného tělesa (na př. $\Delta V = \Delta x \,.\, \Delta y \,.\, \Delta z$), se vždy nachází prakticky nekonečné veliké

(t. j. sice konečným, ale nesmírně velikým číslem dané) množství hmotných bodů. Elementy ΔV poblíže hranic volíme tak, aby se v nich nevyskytovaly hmotné částice tělesa sousedního, leč snad v množství zanedbatelně malém proti částicím vlastním. Je-li celková hmota částic v libovolném elementu ΔV rovna ΔM, nazývá se poměr

$$\frac{\Delta M}{\Delta V} = \varrho, \quad \text{kde} \quad M = \Sigma m \tag{a}$$

střední specifickou hmotou (hmotou jedničky objemové) v objemu ΔV. Celá hmota tělesa je ovšem

$$M = \Sigma \Delta m = \Sigma \varrho \Delta V. \tag{b}$$

Je-li ϱ v celém tělese stálé, nazýváme toto stejnorodým, homogenním, a skutečná spec. hmota je rovna spec. hmotě střední, poměru $M : V$.

Představujeme-li si důsledně dle tohoto obrazu, odpovídajícího theorii atomistické, libovolné těleso jakožto soustavu nesmírně mnoha nesmírně malých a ovšem dostatečně hustě v prostoru rozložených částic, nemůže objemový element ΔV sestoupiti k limitě matematicky nulové, nemůže se státi libovolně malým, nýbrž jenom do jisté míry nesmírně malým. V praktickém počítání nahrazujeme u konečných těles tyto nejmenší ΔV, při jichž postupném zmenšování ϱ se asymptoticky, ale spojitě blíží jisté konečné hodnotě, objemovými elementy téhož tvaru a velikosti ΔV, které si myslíme vyplněny hmotou $\varrho \, . \, \Delta V$ stejnoměrně a spojitě rozloženou. Dalším podělením takového elementu ΔV na libovolně malé dV zůstane hodnota spec. hmoty ϱ nedotčena. Pak můžeme sumaci ač nesmírně velikého, přece konečného počtu sčítanců $\Sigma \varrho . \Delta V$ nahraditi integrací a psáti

$$\frac{dM}{dV} = \varrho, \quad M = \int_V \varrho \, dV, \tag{c}$$

nedopouštějíce se prakticky chyby, neboť předpokládáme, že prakticky přípustná ΔV jsou tak malá, že při přechodu z jednoho do sousedního v témže tělese se ϱ mění prakticky spojitě.

Narážíme zde znovu na filosoficky nepřeklenutelný rozdíl mezi oběma jediné možnými obrazy o konstituci hmoty, atomistickým a spojitostním*). Diskretním částicím $m_1, m_2, \ldots$ odpovídají v obraze druhém elementy hmotné $(dm)_1, (dm)_2, \ldots$, které se ovšem navzájem všude dotýkají, takže má-li se jejich vzájemná vzdálenost — vlastně vzdálenost jejich středů $r_{1,2}$ měniti, musí býti opatřeny atributy hmoty jakožto tělesných celků, stlačitelností, pružností atd., o jichž příčinách pak dále mluviti nemá smyslu. Proto exaktní fysikální atomistická theorie hmoty byla nejprve zbudována u látek, které tyto atributy jeví v míře nejpatrnější, u plynů.

---

*) Pro přechod od jednoho k druhému srovnej též poznámku pod čarou § 45.

63. Hmotný střed.

Každé soustavě hmotných bodů přísluší jistý geometrický bod, zvaný **hmotným středem**, nebo z důvodů, které později v § 91 vysvitnou, **těžištěm soustavy**. Jak jméno samo praví, nalezneme jej dle obecného pravidla hledání středu několika veličin, kterým přikládáme různé „váhy". Těmito veličinami jsou polohové vektory $\bar{r}_1$, $\bar{r}_2, \ldots \bar{r}_n$ hmotných bodů soustavy, „vahami" jsou jejich hmoty m_1, $m_2, \ldots m_n$. Výsledkem počtu jest

$$\bar{r}^* = \frac{m_1\bar{r}_1 + m_2\bar{r}_2 + \ldots m_n\bar{r}_n}{m_1 + m_2 + \ldots m_n} = \frac{\sum\limits_{\lambda=1}^{n} m_\lambda \bar{r}_\lambda}{\sum\limits_{\lambda=1}^{n} m_\lambda}, \qquad (a)$$

vektor $\bar{r}^*$, který jest polohovým vektorem hmotného středu O^* vztaženým k témuž počátku O, z něhož jsou vedeny $\bar{r}_1, \ldots \bar{r}_\nu$. Jest patrno, že změní-li se konfigurace, změní se obecně i poloha jejího hmotného středu. Za to nezávisí na volbě počátku O, který může tedy býti libovolný. Kdybychom totiž na místě O byli volili za počátek bod O', daný polohovým vektorem $\overline{OO'} = \bar{c}$, byly by nové polohové vektory $\bar{r}'_\lambda = \bar{r}_\lambda - \bar{c}$ a tedy

$$\bar{r}'^* = \frac{\Sigma m\bar{r}'}{\Sigma m} = \frac{\Sigma m\bar{r} - \bar{c}\Sigma m}{\Sigma m} = \bar{r}^* - \bar{c}. \qquad (b)$$

Všem společné $\bar{c}$ mohli jsme vytknouti před znamení součtové. Snadná geometrická úvaha nebo jednoduché znázornění ukazuje, že nový hmotný střed jest identický se starým O^*. Právě v této jeho vlastnosti leží jeho význam. U tuhé soustavy jest hmotný střed vzhledem k ní neproměnně dán, nechť se soustava jakkoli posune nebo otočí, jak ihned poznáme, zvolíme-li za počátek některý bod m_λ soustavy.

Ve výrazech (b) vynechali jsme indexy i označení, čeho se summace týká, což pro usnadnění typografické úpravy budeme i nadále činiti tam, kde z předcházejících vývodů jest věc jasna a nemůže vésti k omylům.

Rozepíšeme-li (a) v semikartézský tvar, obdržíme z

$$\bar{r}_\lambda = ix_\lambda + jy_\lambda + kz_\lambda, \quad \bar{r}^* = ix^* + jy^* + kz^*,$$

$$x^* = \frac{\Sigma mx}{\Sigma m}, \quad y^* = \frac{\Sigma my}{\Sigma m}, \quad z^* = \frac{\Sigma mz}{\Sigma m}, \qquad (c)$$

předpis na výpočet souřadnic hmotného středu.

Kdybychom za počátek O volili hmotný střed sám, t. j. $\bar{r}^* = 0$, zvouce polohové vektory bodů vzhledem k těžišti $\bar{s}_\lambda = i\xi_\lambda + j\eta_\lambda + k\zeta_\lambda$, bylo by

$$\Sigma m\bar{s} = 0, \quad \text{čili} \quad \Sigma m\xi = \Sigma m\eta = \Sigma m\zeta = 0. \qquad (d)$$

Výpočet souřadnic hmotného středu u těles konečných rozměrů děje se integrací. Je-li po prvé hmota rozložena prostorově, ϱ hmota specifická, dV element objemový, po druhé rozložena v nesmírně tenké vrstvě plošné tak, že na elementu plošném dS je její množství σdS, nebo konečně velmi přibližně na tenounké hmotné čáře (na př. drátu) tak,

že na elementu délkovém ds se nachází množství εds hmoty, jsou souřadnice x^* — a podobně i ostatní — dány vzorci

$$x^* = \frac{\int x\varrho dV}{\int \varrho dV}, \quad \text{resp.} \quad x^* = \frac{\int x\sigma dS}{\int \sigma dS} \quad \text{a} \quad x^* = \frac{\int x\varepsilon ds}{\int \varepsilon ds}. \qquad (e)$$

Veličiny σ a ε se označují zpravidla jmény plošná, resp. lineární hustota, ač lépe je říkati hmota jedničky plošné resp. délkové. Jsou-li ϱ, σ, ε všude v tělese stejné, těleso tedy homogenní, lze je vytknouti před integrační znamení a zkrátí se v čitateli i jmenovateli. Nebudeme zde prováděti výpočet různých příkladů na stanovení těžiště, kterých najde čtenář s dostatek v každé učebnici integrálního počtu (na př. i v elementárních Vojtěchových: Základech matematiky, Praha 1916). Také věty Guldinovy (franc. 17. st.) čili Pappusovy (4. stol.), dle nichž se někdy snadno vypočte těžiště homogenních čar nebo ploch, klademe zde bez důkazu. Praví:

1. Obsah plochy vytvořené rotací oblouku rovinné čáry kolem osy, ležící (mimo ni) v její rovině, rovná se součinu z délky tohoto oblouku a obvodu kruhu opsaného jeho hmotným středem.

2. Objem tělesa vytvořeného rotací rovinné plochy kolem osy, ležící v její rovině a ji neprotínající, rovná se součinu z plochy a délky kružnice hmotným středem opsané.

Dále uvádíme, že, má-li homogenní těleso (plocha, čára) rovinu (osu) souměrnosti, musí těžiště ležeti na ní. Buď na př. rovinou souměrnosti rovina $x = 0$. Pak patří ke každému m s kladným x stejné m se záporným x, takže součet všech podobných párů dává $\Sigma mx = 0$ a tedy $x^* = 0$.

Rozdělíme-li těleso na dvě části s hmotami M_1 a M_2 a hmotnými středy $\bar{r}_1^*$, a $\bar{r}_2^*$, je výsledný střed hmotný

$$\bar{r}^* = \frac{M_1\bar{r}_1^* + M_2\bar{r}_2^*}{M_1 + M_2}, \qquad (f)$$

tedy počítá se tak, jakoby celé hmoty obou částí byly soustředěny v bodech $\bar{r}_1^*$ a $\bar{r}_2^*$. Důkaz (f) plyne bezprostředně, dosadíme-li $M_1 = \sum\limits_1 m$ a $M_1\bar{r}_1^* = \sum\limits_1 m\bar{r}_1$, kde $\sum\limits_1$ znamená sumaci přes prvou část soustavy, a podobně pro druhou část. Z pravé strany (f) vznikne pravá strana (a). Podobně lze si počínati, můžeme-li dané těleso M považovati za rozdíl dvou $M_1 - M_2$. V čitateli i jmenovateli (f) mají pak druhé členy znamení záporné.

Důležité jest pamatovati si, že hmotný střed dvou bodů hmotných m_1 a m_2 leží na jejich spojnici, kterou dělí v obráceném poměru hmot. Důkaz nejjednodušeji plyne, položíme-li počátek O do jednoho z daných bodů, na př. m_1, takže $\bar{r}_1 = 0$.

Pak dle (a)

$$m_2\bar{r}_2 = (m_1 + m_2)\bar{r}^*, \quad \bar{r}^* = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\bar{r}_2. \qquad (g)$$

Máme tedy vzdálenost $\overline{m_1m_2} = \bar{r}_2$ rozděliti na $m_1 + m_2$ dílů a O^*

leží vzdáleno o m_2 dílů od hmoty m_1, tedy ve zdálenosti m_1 dílů od hmoty m_2. Kdybychom počátek O byli umístili v O^*, bylo by dle (d)

$$m_1\bar{r}_1 + m_2\bar{r}_2 = 0, \quad \frac{r_1}{r_2} = -\frac{m_2}{m_1}, \tag{h}$$

což zase praví totéž.

64. Síly vnitřní a vnější.

Mezi každými dvěma hmotnými body působí centrální síly. To je axiomatický předpoklad atomistického názoru na hmotu, jak byl blíže vylíčen v § 43. Síla $\bar{f}_{\lambda\mu}$, kterou působí hmotná částice m_μ na částici m_λ jest táž, ale opačného směru než síla $\bar{f}_{\mu\lambda}$, kterou působí m_λ na m_μ. To učí třetí Newtonův axiom o akci a reakci, vyjádřený obdobně se (43 b) rovnicemi

$$\bar{f}_{\lambda\mu} = m_\lambda \bar{a}_{\lambda\mu}, \quad \bar{f}_{\mu\lambda} = m_\mu \bar{a}_{\mu\lambda}, \quad \bar{f}_{\lambda\mu} + \bar{f}_{\mu\lambda} = 0. \tag{a}$$

Představujeme-li si hmotu spojitou, nastupují místo hmotných částic $m_1, \ldots$ objemové hmotou vyplněné elementy $(dm)_1, \ldots$, pro něž stejně zákon akce a reakce se postuluje.

Sestává-li soustava, o kterou se zajímáme, z n hmotných bodů, a je-li $\lambda \leq n$, $\mu \leq n$ a $\lambda \neq \mu$, nazýváme veškeré síly $\bar{f}_{\lambda\mu}$, působící mezi body soustavy, silami vnitřními. Seskupíme-li je po párech dle (a) a sečteme, vidíme, že součet veškerých vnitřních sil libovolné soustavy je roven nule, nebo symbolicky vyjádřeno

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} \bar{f}_{\lambda\mu} = 0, \quad \lambda \neq \mu. \tag{b}$$

Rozepsáním plynuly by tři podobné vztahy pro složky dle os souřadnicových.

Vztah (b) mohli bychom také jinak psáti. Na bod λ-tý působí ode všech ostatních síla

$$\bar{f}_\lambda = \bar{f}_{\lambda 1} + \bar{f}_{\lambda 2} + \cdots + \bar{f}_{\lambda,\lambda-1} + \bar{f}_{\lambda,\lambda+1} + \cdots + \bar{f}_{\lambda n}. \tag{b'}$$

Napíšeme-li takto síly působící na všech n bodů soustavy a sečteme, máme

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \bar{f}_\lambda = 0, \tag{c}$$

což jest totéž jako (b), a zase praví, že výslednice všech vnitřních sil soustavy je rovna nule.

Máme-li vně soustavy, t. j. vně uzavřené plochy, obsahující všechny body $m_1, \ldots m_n$, ještě další hmotné body $m_{n+1}, m_{n+2}, \ldots m_p$, působí na bod m_λ celková síla

$$\bar{f}_\lambda + \bar{f}_{\lambda,n+1} + \bar{f}_{\lambda,n+2} + \cdots + \bar{f}_{\lambda,p} = \bar{f}_\lambda + \bar{F}_\lambda.$$

Část síly $\bar{F}_\lambda = \sum_{\mu=n+1}^{p} \bar{f}_{\lambda\mu}$ pocházející od vnějších bodů, zveme silou

vnější, na bod m_λ působící. Součet veškerých sil na všechny body soustavy

$$\sum_{\lambda=1}^{n}(\bar{f}_\lambda + \bar{F}_\lambda) = \sum_{1}^{n}\bar{f}_\lambda + \sum_{1}^{n}\bar{F}_\lambda = \sum_{1}^{n}\bar{F}_\lambda = \sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{\mu=n+1}^{p}\bar{f}_{\lambda\mu} \qquad (d)$$

nemusí obecně býti a také není roven nule, nýbrž roven součtu vnějších sil.

Jsou-li síly vnější nesmírně malé, takže jejich účinek padá pod mez i nejpřesnějšího pozorování a nepotřebujeme-li tedy, upírajíce svou pozornost k soustavě samotné, o ně se starati, mluvíme o *soustavě isolované*, nebo uzavřené, jakoby jakýmsi ideálním obalem byla před zasahováním z vnějška chráněna. Může to ovšem býti soustava tuhá, nebo soustava volných bodů. Proto nevolíme pro ni rovněž obvyklý název soustavy volné, aby nemohlo dojíti k nedorozumění.

U opaku soustavy isolované, totiž *soustavy obecné*, mohou vnější síly býti buď přímo dány jejím zařaděním pod typický druh pohybových zjevů (na př. síla od napiaté spirály, přítažlivá síla zemská, srv. konec § 43), nebo mohou pocházeti od vazeb, kterým je soustava podrobena (síla od podkladu při pohybu po nakloněné rovině, napětí vlákna u kyvadla) a býti více méně neznámy nebo neúplně — na př. jen co do svého směru — známy. Proto *síly vnější* lze rozlišiti na síly *dané, či vtisknuté* a *síly od vnějších vazeb, či reakční*. Uvedeme o těchto Hamelův axiomatický postulát: Ztratí-li následkem vazeb nějaká soustava ν stupňů volnosti, zůstává ν určujících udajů veškerých sil reakčních předem neurčeno a vystupuje jako tolikéž neznámých v rovnicích pohybových.

65. Prvá věta impulsová: Věta o těžišti.

Budiž dána obecná soustava n hmotných bodů, na které působí síly vnitřní $\bar{f}$ a vnější $\bar{F}$. Její celkové hmota buď $M = \Sigma m$. Napíšeme-li pohybovou rovnici pro každý bod a všechny sečteme, je

$$\sum_{\lambda=1}^{n} m_\lambda \ddot{\bar{r}}_\lambda = \sum_{\lambda=1}^{n}\bar{f}_\lambda + \sum_{\lambda=1}^{n}\bar{F}_\lambda = \sum_{\lambda=1}^{n}\bar{F}_\lambda, \qquad (a)$$

neboť dle (64 c) je součet všech vnitřních sil soustavy roven nule.

Ježto hmoty částic jsou stálé, je dle (63 a)

$$\Sigma m\bar{r} = M\bar{r}^*, \quad \frac{d}{dt}\Sigma m\bar{r} = \Sigma m\dot{\bar{r}} = M\dot{\bar{r}}^*, \quad \frac{d^2}{dt^2}\Sigma m\bar{r} = \Sigma m\ddot{\bar{r}} = M\ddot{\bar{r}}^*. \qquad (b)$$

Dosazením do (a) obdržíme tedy

$$M\ddot{\bar{r}}^* = \ddot{\bar{r}}^*\sum^{n} m_\lambda = \sum^{n}\bar{F}_\lambda. \qquad (c)$$

Tato věta, kde $\ddot{\bar{r}}^* = \bar{a}^*$ jest zrychlení těžiště, úplně obdobného tvaru jako pohybová rovnice jediného hmotného bodu, praví: *Těžiště soustavy pohybuje se jako hmotný bod, v němž by byla soustředěna veškerá hmota, a na nějž by působily veškeré vnější síly. Vnitřní síly nemohou změniti pohyb těžiště.*

Je-li soustava isolována, t. j. npeůsobí-li na ni vnější síly, po-

hybuje se její těžiště přímočaře a rovnoměrně v absolutním prostoru, nebo, bylo-li jednou v klidu, setrvává v něm trvale.

Věta (c) o pohybu těžiště je existenčním důvodem dynamiky hmotného bodu vedle důvodů didaktických, doporučujících při učení postup od jednoduššího k složitějšímu.

Všimněme si, že v (b) je

$$\overset{n}{\Sigma} m_\lambda \dot{\bar{r}}_\lambda \equiv \overset{n}{\Sigma} m_\lambda \bar{v}_\lambda \equiv \bar{I}, \tag{d}$$

součet hybností všech částic soustavy, který budeme analogicky s § 52 nazývati **impulsem soustavy**. Dosazením z (b) do (a) plyne věta

$$\frac{d}{dt} \overset{n}{\Sigma}_\lambda m_\lambda \dot{\bar{r}}_\lambda \equiv \frac{d\bar{I}}{dt} = \overset{n}{\Sigma} \bar{F}_\lambda, \tag{e}$$

dle níž **časový vzrůst impulsu soustavy se rovná výslednici všech vnějších sil**, t. zv. **prvá věta impulsová**. Má u soustavy zcela týž tvar, jako v (52b) pro jediný hmotný bod. Není-li vnějších sil, je impuls stálý.

Všimněme si, že nebylo pranic řečeno o tom, je-li soustava tuhá, nebo sestává-li z volných bodů — věta naše platí obecně.

V souřadnicích pravoúhlých zní rovnice (a), (b), (e)

$$\Sigma m\ddot{x} \equiv \frac{d}{dt} \Sigma m\dot{x} = M\ddot{x}^* = \Sigma X \tag{f}$$

a impuls jest

$$\bar{I} = \bar{\imath} I_x + \bar{\jmath} I_y + \bar{k} I_z = \bar{\imath}\Sigma m\dot{x} + \bar{\jmath}\Sigma m\dot{y} + \bar{k}\Sigma m\dot{z}. \tag{g}$$

K osvětlení důležité věty o těžišti vzpomeneme některých příkladů: Lokomotiva sjíždí se svahu tak mírného, že pohybová síla tíže právě stačí překonávati sílu od tření. Vnější pohybová síla je tedy nulou, **těžiště** lokomotivy pohybuje se rovnoměrně. V lokomotivě pohybují se však těžké mechanismy, písty, táhla a pod. relativně k podstavci, takže se těžiště v lokomotivě periodicky posunuje. Lokomotiva jakožto celek by se tedy neposunovala po kolejích rovnoměrně, nýbrž prováděla by jakýsi pohyb trhavý. Stejně je tomu při jízdě lokomotivy vůbec a podobně i u parní lodi, hnané velmi silnými stroji s těžkými pohyblivými součástmi, kde by nastávaly nepříjemné pohyby celku nejen ve směru horizontálním, ale i vertikálním. Dříve zavěšovala se nová lokomotiva na lana a uvedla v pomalý běh; protizávaží, spolu se strojem se pohybující, umístěna tak, aby těžiště zůstávalo relativně k lokomotivě stále na témž místě. Nyní určují se protizávaží výpočtem. Technikové mluví o „vyrovnání hmot" (Massenausgleich) u takovýchto strojů. U lodí plyne další požadavek z principu, o němž v příštím paragrafu bude řeč (Schlick).

Těžiště nabitého děla je v klidu. Obdrží-li projektil hmoty m_1 výbuchem náboje, tedy vlivem vnitřních sil, rychlost $\bar{v}_1$ u ústí děla, odskočí hlaveň (hmoty m_2) rychlostí $\bar{v}_2$ tak, aby $m_1\bar{v}_1 + m_2\bar{v}_2 = 0$. U moderních děl je hlaveň sama uložena pohyblivě do kolébky s lafetou pevně spojené, po níž při výstřelu sama odjede do zadu. Zpětný pohyb tlumí se pery, hydraulicky a pod., a stlačené pero nebo vzduch posune na konec zase hlaveň vpřed do původní polohy. U děl starších odskočila hlaveň i s lafetou.

Těžiště veškerých úlomků z projektilu, prasklého explosí vnitřního náboje, postupovalo by ve vzduchoprázdném prostoru dále v původní parabolické dráze. Ve vzduchu není dráha těžiště přesným pokračováním původní balistické křivky, ježto přistupují nové neznámé vnější síly odporu vzduchového na jednotlivé úlomky.

Pohyb těžiště sluneční soustavy, předpokládáme-li, že vnější síly od stálic jsou zanedbatelně malé, jest přímočarý rovnoměrný.

S í l y n á r a z o v é. Působí-li na soustavu bodovou okamžité n á r a z o v é s í l y (viz § 52), odvodíme velmi snadno prvou větu impulsovou pro tento druh sil: Násobme (e) přírůstkem časovým dt a integrujme pro čas nesmírně krátký $t_1 - t_0$; obdržíme

$$\int_{t_0}^{t_1} d\bar{I} = \int_{t_0}^{t_1} \Sigma \bar{F}_\lambda dt = \Sigma \int_{t_0}^{t_1} \bar{F}_\lambda dt, \qquad (h)$$

což můžeme přepsat na

$$\bar{I}_1 - \bar{I}_0 = \Delta \bar{I} = \Sigma \bar{G}_\lambda \qquad (i)$$

a číst:

P r o s t á z m ě n a i m p u l s u j e s t r o v n a v ý s l e d n é s í l e n á r a z o v é.

Rovnice (h) a (i) nejsou omezeny délkou časového intervalu $t_1 - t_0$, která může být libovolná.

66. Problém dvou těles.

N e w t o n dovodil z Keplerových zákonů, že mezi dvěma tělesy sluneční soustavy působí přitažlivá síla centrální, obráceně úměrná čtverci jejich vzdálenosti. Máme-li v nekonečném prostoru taková dvě tělesa m_1 a m_2 ve vzdálenosti r, pišme pro velikost síly té dle $(35\,e)$ na těleso prvé a druhé

$$\frac{m_1 \mu_2}{r^2}, \quad \text{resp.} \quad \frac{m_2 \mu_1}{r^2}.$$

Faktor μ_2 nemůže záviseti na ničem jiném, než na tělese druhém a podobně μ_1 na prvém. Z podmínky, že akce je rovna reakci, obdržíme, kladouce oba výrazy sobě rovnými,

$$\frac{\mu_1}{m_1} = \frac{\mu_2}{m_2} = k, \quad \text{takže síla jest} \quad k\frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

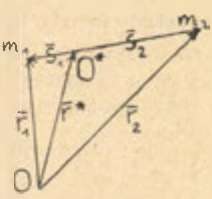
Z § 61 víme, že k se nazývá gravitační konstantou.

Jsou-li (obr. 63) polohové vektory obou hmot $\bar{r}_1$ a $\bar{r}_2$, a zavedeme-li jedničkové vektory $\bar{\varrho}_{12}$ a $\bar{\varrho}_{21}$ opačného směru tak, že

$$\bar{r}_2 - \bar{r}_1 = \bar{r}_{12} = r\bar{\varrho}_{12} = -r\bar{\varrho}_{21}, \qquad (a)$$

můžeme psáti pohybové rovnice obou těles

$$m_1 \ddot{\bar{r}}_1 = k\frac{m_1 m_2}{r^2}\bar{\varrho}_{12}, \quad m_2 \ddot{\bar{r}}_2 = k\frac{m_1 m_2}{r^2}\bar{\varrho}_{21}. \qquad (b)$$



Obr. 63.

Sečtěme je a zavedme do výsledku dle § 63 těžiště soustavy O^*; máme pak

$$m_1\ddot{\bar{r}}_1 + m_2\ddot{\bar{r}}_2 = (m_1 + m_2)\ddot{\bar{r}}^* = 0, \quad \text{čili} \quad \ddot{\bar{r}}^* = 0. \qquad (c)$$

Těžiště je v klidu, nebo se pohybuje přímočaře rovnoměrně. To jsme mohli říci ihned, neboť m_1 a m_2 dle našeho předpokladu tvoří uzavřenou soustavu s vnitřními silami centrálními.

Vztahujme polohu hmot m_1 a m_2 k těžišti vektory

$$\bar{r}_1 - \bar{r}^* = \bar{s}_1 = s_1\bar{\sigma}_1 \quad \text{a} \quad \bar{r}_2 - \bar{r}^* = \bar{s}_2 = s_2\bar{\sigma}_2, \qquad (d)$$

kde zřejmě jedničkové vektory $\bar{\sigma}_1 = -\bar{\sigma}_2 = \bar{\varrho}_{21} = -\bar{\varrho}_{12}$, a dle (63 g)

$$s_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} r \quad \text{a} \quad s_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} r. \qquad (e)$$

Z (d), (b) a (e) následuje, že

$$\ddot{\bar{s}}_1 = \ddot{\bar{r}}_1 = k\frac{m_2}{r^2}\bar{\varrho}_{12} = -k\frac{m_2^3}{(m_1+m_2)^2} \cdot \frac{1}{s_1^2}\bar{\sigma}_1 \qquad (f)$$

a podobně pro $\ddot{\bar{s}}_2$, zaměníme-li indexy 1 a 2. Vztah (f) jest zcela téhož tvaru jako (35 f) a v důsledku toho vidíme, že jak prvé, tak druhé těleso vykonává planetární pohyb kolem společného těžiště. Obě tělesa m_1 a m_2 považovali jsme dosud za hmotné body, ale uvidíme později, že naše úvahy platí přesně i pro koule rozměrů konečných proti vzdálenosti r, leží-li jejich hmotné středy ve středech koulí, mezi nimiž pak měříme r. Rozřešili jsme tedy pohyb obou komponent dvojhvězdy, z takovýchto těles sestávající. Oběžná doba obou jest zřejmě táž a proto neplatí třetí zákon Keplerův, jak v § 35 byl slovně vyřčen, ale ovšem platí přesný vztah (35 n), kam za μ musíme dosaditi z (f) známý faktor. Vzhledem k stejnosti oběžných dob plyne pro velké poloosy eliptických drah kolem těžiště

$$a_1 : a_2 = m_2 : m_1. \qquad (g)$$

Čím je větší jedna z hmot v poměru k druhé, tím blíže u ní je těžiště soustavy a tím menší elipsu kolem něho opisuje.

Snadno nalezneme také relativní pohyb tělesa m_2 vzhledem k m_1, které na př. myslíme klidným. Polohový vektor m_2 vzhledem k m_1 jest $\bar{r}_2 - \bar{r}_1 = \bar{r}_{12}$ a zrychlení dle (b)

$$\frac{d^2}{dt^2}(\bar{r}_2 - \bar{r}_1) = \ddot{\bar{r}}_2 - \ddot{\bar{r}}_1 = -k\frac{m_1 + m_2}{r^2}\bar{\varrho}_{12}. \qquad (h)$$

Totéž plynulo by z theorie relativního pohybu, neboť abychom obdrželi zrychlení relativní, v (39 i) psané $\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}$ musíme od absolutního zrychlení bodu m_2 odečísti absolutní zrychlení $\bar{c} = \ddot{\bar{r}}_1$ bodu m_1, část to zrychlení z vedení. Ježto bodem m_1 prokládáme souřadnicovou soustavu, která se neotáčí, vypadnou v (39 i) všechny členy obsahující $\bar{\omega}$.

Je-li m_1 hmota slunce, m_2 hmota libovolné z planet, zní vzorec (35 n)

$$\frac{T_2^2}{a_2^3} = \frac{4\pi^2}{k(m_1 + m_2)}, \qquad (i)$$

takže vidíme, že slovní znění třetího zákona Keplerova potřebuje korekci vlastními hmotami planet m_2, m_3, .. dle

$$\frac{T_2^2}{T_3^2} = \frac{a_2^3}{a_3^3} \frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_3}. \qquad (j)$$

Že dobře vyhovuje i vztah jednodušší, svědčí o tom, že hmoty planet m_2, m_3, .. jsou proti hmotě slunce m_1 velmi malé. Největší je u velikána sluneční soustavy Jupitera 1 : 1047, u země je 318 kráte menší, totiž 1 : 333.400.

Z rovnice (i) určují astronomové poměr hmoty dvojhvězd, jichž vzdálenost (vlastně roční paralaxu) a dráhu znají, k hmotě slunce. Na př. η Cassiopey má hmotu asi 8 kráte větší; je to hvězda čtvrté velikosti. Z téže rovnice lze určiti poměr hmot slunce a planety, která má družici, satelita, neboť pro tato dvě posledně jmenovaná tělesa platí ovšem stejně vztah (i).

Je-li hmota družice m', její oběžná doba kolem planety (siderická) T' a velká poloosa její dráhy a', platí

$$\frac{m_2 + m'}{m_1 + m_2} = \left(\frac{T_2}{T'}\right)^2 \cdot \left(\frac{a'}{a_2}\right)^3. \qquad (k)$$

Ježto je nutno v čitateli zanedbati m' vůči m_2, hodí se tato metoda hlavně pro satelity velmi malé. V soustavě slunce, země, měsíc, nedává dostatečně přesné výsledky.

Není nikterak nesnadno napsati n diferenciálních pohybových rovnic pro n nebeských těles, které se přitahují dle Newtonova zákona. Zněly by

$$m_1 \ddot{\bar{r}}_1 = k \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \bar{\rho}_{12} + k \frac{m_1 m_3}{r_{13}^2} \bar{\rho}_{13} + \ldots + k \frac{m_1 m_n}{r_{1n}^2} \bar{\rho}_{1n}$$

$$m_2 \ddot{\bar{r}}_2 = k \frac{m_2 m_1}{r_{12}^2} \bar{\rho}_{21} + k \frac{m_2 m_3}{r_{23}^2} \bar{\rho}_{23} + \ldots + k \frac{m_2 m_n}{r_{2n}^2} \bar{\rho}_{2n}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

Zpracováním stejným jako prvých dvou v tomto paragrafu obdrželi bychom integrál (c) o pohybu těžiště. V § 68 nalezneme druhý integrál, který praví, že součet momentu hmotových zrychlení je roven nule, a v § 71 nalezneme třetí integrál „živé síly“. Jak ukázali B r u n s a P o i n c a r é, není dalšího integrálu algebraického v souřadnicích a rychlostech. Již problém tří těles jest obecně neřešitelný. Astronomové vycházejí proto od Keplerova řešení problému dvou těles, z nichž jedním jest slunce, jehož hmota m_1 převyšuje asi 750kráte všechny ostatní hmoty m_2, m_3, .. sluneční soustavy. Považujíce je za prvé přiblížení, jímž vskutku jest, hledí vystihnouti vliv ostatních planet, jichž dráhy považují se zatím za známé, čili t. zv. p o r u c h y, pomocí rozvojů v řady. Potom počítá se znova zpětné působení původní planety na ostatní atd.

Klasickým dílem ponewtonovským jest L a p l a c e o v a „Mécanique céleste“ (1799), výbornými přehledy dnešního stavu těchto otázek stejnojmenná díla T i s s e r a n d o v a a P o i n c a r é o v a, jakož i C h a r l i e r o v a „Mechanik des Himmels“.

67. Hmota a váha.

Z V. axiomu Boltzmannova v § 43 víme, že ze všech hmot můžeme voliti jednu jedinou libovolně a ostatní jsou pak jí jakožto jedničkou dány. V § 44 jsme takovou jedničku hmoty, již definovali, leč dosud jsme se nezmínili o tom, jak jiné hmoty s ní srovnáváme. V dynamice jediného bodu jsme toho také nepotřebovali, neboť tam hrála hmota vůbec úlohu velmi podružnou. Jde-li však nyní o srovnávání konečných hmot, musíme ukázati, jak je možné na základě našeho základního předpokladu o centrálních silách mezi částicemi. Mějme dvě hmotné soustavy

$$M_I = \sum_1^n m_\lambda \quad \text{a} \quad M_{II} = \sum_{n+1}^p m_\mu,$$

které navzájem působí, ale dohromady jakožto celek tvoří isolovanou soustavu $M_I + M_{II}$, na niž vnější síly nepůsobí. Na soustavu I působí od II síly

$$\sum_{\lambda=1}^n \sum_{\mu=n+1}^p \bar{f}_{\lambda\mu} = \bar{F}_{I,II}, \qquad \text{na } II \text{ od } I \qquad \sum_{\mu=n+1}^p \sum_{\lambda=1}^n \bar{f}_{\mu\lambda} = \bar{F}_{II,I}.$$

Tyto síly jsou vzhledem k jednotlivým soustavám I a II silami vnějšími, vzhledem k soustavě $I + II$ tvoří spolu s vnitřními silami $\bar{f}_I$ soustavy I a $\bar{f}_{II}$ soustavy II úplný soubor vnitřních sil. Ježto $\bar{f}_I = 0$ i $\bar{f}_{II} = 0$, musí patrně

$$\bar{F}_{I,II} + \bar{F}_{II,I} = 0. \qquad (a)$$

Dle věty o těžišti však

$$\bar{F}_{I,II} = \bar{r}_I^* M_I, \quad \bar{F}_{II,I} = \bar{r}_{II}^* M_{II}, \qquad (b)$$

kde $\bar{r}_I^*$ a $\bar{r}_{II}^*$ jsou zrychlení hmotných středů soustav I a II, která dle (a) zřejmě leží v téže přímce a mají směr opačný. Změříme-li jejich velikosti, můžeme zjistiti poměr hmot, neboť dle (a)

$$M_{II} : M_I = |\bar{r}_I^*| : |\bar{r}_{II}^*|. \qquad (c)$$

Takto lze libovolným vzájemným působením, na př. při rázu těles, nalézti poměr jejich hmot. Ale měření podobná nebyla by valně přesná. Z různých pokusů (na př. z pohybů typu § 23 nebo velmi přesně z pokusů kyvadlových § 57) usuzujeme, že na povrchu zeměkoule každý hmotný bod nabývá vlivem zemské tíže zrychlení $\bar{g}$, které jest velmi přesně stejné pro všechny body na nepříliš veliké části povrchu zemského v téže nadmořské výši. Slovem: pole zemské tíže jest za takovéhoto omezení velmi přesně homogenní. Působí tedy na těleso I vnější síla $\sum_1^n m_\lambda \bar{g} = \bar{g} \sum_1^n m_\lambda = \bar{g} M_I$ a podobně na druhé $\bar{g} M_{II}$. Tuto sílu nazýváme **v a h o u t ě l e s a**. Poměr hmot jest patrně roven poměru vah, který můžeme poměrně jednoduchým strojem — vahami — velice přesně zjistiti. I když na celé zeměkouli zrychlení zemské tíže není stejné (viz § 61, II 1.) správnost a totožnost poměru hmot tím není nijak dotčena.

68. Druhá věta impulsová: Věta o plochách.

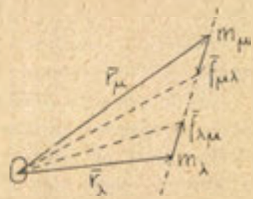
V (53 d) jsme dokázali, že u hmotného, síle podrobeného bodu je moment síly roven časové změně momentu impulsu čili hybnosti. Napíšeme tuto větu pro každý bod m_λ obecné soustavy a sečteme pro všech n bodů. Síla celková jest ovšem zase dána jakožto součet síly vnitřní $\bar{f}_\lambda$ a vnější $\bar{F}_\lambda$. Výsledkem jest

$$\sum_1^n \frac{d}{dt}[\bar{r}_\lambda, m_\lambda \bar{v}_\lambda] = \sum_1^n [\bar{r}_\lambda \bar{f}_\lambda] + \sum_1^n [\bar{r}_\lambda \bar{F}_\lambda]. \qquad (a)$$

Rozepišme na pravé straně $\bar{f}_\lambda$ dle (64 b') a rozřaďme všechny členy na páry příslušné každé možné dvojici hmotných bodů. Obdržíme

$$\sum_1^n [\bar{r}_\lambda \bar{f}_\lambda] = \tfrac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^n \sum_{\mu=1}^n ([\bar{r}_\lambda \bar{f}_{\lambda\mu}] + [\bar{r}_\mu \bar{f}_{\mu\lambda}]), \quad \lambda \neq \mu.$$

Před dvojitým součtovým znamením je faktor $\frac{1}{2}$, ježto se každá dvojice objevuje v součtu dvakrát, na př. m_1 a m_2 při $\lambda = 1$, $\mu = 2$ a $\lambda = 2$, $\mu = 1$. Snadno nahlédneme, že výraz v kulatých závorkách je roven nule, když, jak předpokládáme, je $\bar{f}_{\lambda\mu} = -\bar{f}_{\mu\lambda}$. Oba trojúhelníky na obrazci 64, jež svou plochou dávají poloviční velikost vektorových součinů, mají týž plošný obsah, ale jakožto vektory opačný směr (prvý před, druhý za papír), a tedy se ruší.



Obr. 64.

Početně $[\bar{r}_\lambda \bar{f}_{\lambda\mu}] + [\bar{r}_\mu \bar{f}_{\mu\lambda}] = [\bar{r}_\lambda - \bar{r}_\mu, \bar{f}_{\lambda\mu}] = [\bar{r}_{\mu\lambda}, \bar{f}_{\lambda\mu}] = 0$,

neboť $\bar{r}_{\mu\lambda}$, vektor jdoucí od m_μ k m_λ leží v téže přímce s $\bar{f}_{\lambda\mu}$. Na pravé straně (a) zbývá tedy pouze součet momentů sil vnějších. Při stálých m_λ zajisté

$$\Sigma \frac{d}{dt}[\bar{r}, m\bar{v}] = \frac{d}{dt} \Sigma [\bar{r}, m\bar{v}] = \frac{d}{dt} \Sigma m [\bar{r}, \bar{v}]. \qquad (b)$$

Nazveme-li ještě součet momentů hybností impulsmomentem $\bar{U}$ soustavy, můžeme (a) přepsat na jednoduchý tvar d r u h é v ě t y i m p u l s o v é pro soustavy

$$\frac{d}{dt} \sum^n [\bar{r}_\lambda, m_\lambda \bar{v}_\lambda] = \frac{d\bar{U}}{dt} = \sum^n [\bar{r}_\lambda \bar{F}_\lambda] = \sum^n \bar{M}_\lambda, \qquad (c)$$

téhož tvaru jako v (53 d) pro jediný bod. Praví: Č a s o v ý v z r ů s t i m p u l s m o m e n t u s e r o v n á v ý s l e d n é m u m o m e n t u v n ě j š í c h s i l, n e b o l i v ý s l e d n é m u v n ě j š í m u m o m e n t u o t á č i v é m u. Vztažným bodem O může při tom býti libovolný bod pevného prostoru.

O impulsmomentu nabudeme živější představy dle posledního výrazu v (b). Jest totiž $[\bar{r}_\lambda \bar{v}_\lambda]$ moment rychlosti čili (17 b) dvojnásobná plošná rychlost hmotného bodu m_λ. Impulsmoment jest tedy dvojnásobný vektorový součet všech plošných rychlostí, z nichž každá jest vzata dle své „váhy“, t. j. násobena hmotou částice, jíž přísluší.

Semikartézské rozepsání věty (c)

$$\frac{d}{dt}\sum^{n} m \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix} = \sum^{n} \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix} \qquad (d)$$

dává pro rovinu XY resp. osu Z ($\bar{k}$)

$$\frac{d}{dt}\Sigma m(x\dot{y} - y\dot{x}) = \Sigma[xY - yX) \qquad (e)$$

a podobně pro ostatní. Vztažný bod O jest zde (dle $\bar{r} = \bar{i}x + \bar{j}y + \bar{k}z$) volen v počátku souřadnic. Ježto však je poloha roviny XY naprosto libovolná, platí podobná věta pro každou rovinu, měříme-li průměty plošné rychlosti v ní, a moment otáčivý (pravou stranu) vzhledem k ose na ni kolmé. Proto lze (e) dle § 7 psáti všeobecně pro libovolnou rovinu průmětnou

$$\frac{d}{dt}\Sigma[\bar{r}', m\bar{v}'] = \Sigma[\bar{r}'\bar{F}'], \qquad (f)$$

kde čárkované veličiny značí průměty posičních vektorů, rychlostí i sil, zkrátka celého systému na onu rovinu.

Je-li výsledný moment otáčivý ve zvláštním případě roven nule, zůstává vektorový součet plošných rychlostí, vzatých dle „vah", stálý. Podobné platí pro určitou rovinu na př. v (e) pro XY, jsou-li vnější síly vesměs směru osy Z, tedy $X = 0$, $Y = 0$. Někdy nazývá se tento zvláštní případ větou o plochách.

O soustavě nebylo zase žádných předpokladů, platí tedy druhá věta impulsová jak pro soustavu tuhou, tak i soustavu volných bodů.

Síly nárazové. Druhou větu impulsovou můžeme snadno přepsati pro případ, že na soustavu působí síly nárazové (srv. § 52 a 65). Násobme (c) elementem časovým dt a integrujme přes čas $t_1 - t_0$, i obdržíme

$$\int_{t_0}^{t_1} d\bar{U} = \int_{t_0}^{t_1} \Sigma[\bar{r}_\lambda \bar{F}_\lambda]\,dt = \Sigma\int_{t_0}^{t_1}[\bar{r}_\lambda \bar{F}_\lambda]\,dt. \qquad (g)$$

Ale nyní narážíme na obtíž: Polohové vektory $\bar{r}_\lambda$ jsou funkcemi času a to funkcemi neznámými. Je-li však doba $t_1 - t_0$, po kterou síla působila, nesmírně krátká, v limitě nulová, můžeme předpokládati, že se konečné veličiny $\bar{r}_\lambda$ znatelně nezměnily, takže lze v tomto případě psáti

$$\bar{U}_1 - \bar{U}_0 = \Delta\bar{U} = \Sigma[\bar{r}_\lambda, \int_{t_0}^{t_1}\bar{F}_\lambda dt] = \Sigma[\bar{r}_\lambda \bar{G}_\lambda] = \Sigma\bar{D}_\lambda, \qquad (h)$$

což jest hledaný tvar druhé věty impulsové, dle něhož prostá změna impulsmomentu se rovná výslednému momentu nárazových sil, neboli výslednému nárazovému otáčivému momentu čili konečně krátce výslednému otáčivému nárazu, kterýžto název přikládáme veličinám $\bar{D} = [\bar{r}\bar{G}]$.

Kdežto však (g) platí pro libovolné trvání $t_1 - t_0$, platí (h) pouze pro nesmírně krátké trvání nárazu v opaku proti (65 i).

Připojíme zde dvě důležité poznámky speciálnější:

1. Druhá věta impulsová platí také tehdy, vztahujeme-li polohy bodů soustavy a jejich rychlosti k bodu O', který postupuje rovnoměrně a přímočaře. Budiž $\overline{OO'} = \bar{c} = \bar{c}_0 + \bar{v}_0 t$, tedy $\dot{\bar{c}} = \bar{v}_0$, $\ddot{\bar{c}} = 0$.

Polohový vektor bodu m_λ vzhledem k O' označme $\bar{r}'_\lambda$, takže $\bar{r}_\lambda = \bar{c} + \bar{r}'_\lambda$, $\bar{v}_\lambda = \dot{\bar{r}}_\lambda = \bar{v}_0 + \dot{\bar{r}}'_\lambda$, $\ddot{\bar{r}}_\lambda = \ddot{\bar{r}}'_\lambda$.

Násobíme-li pohybovou rovnici každého bodu vektoriálně vektorem $\bar{r}_\lambda$ a sečteme, obdržíme

$$\Sigma m\,[\bar{r}, \ddot{\bar{r}}] = \Sigma\,[\bar{r}\bar{F}], \tag{i}$$

neboť víme, že $\Sigma\,[\bar{r}_\lambda f_\lambda] = 0$. Dosazením za $\bar{r}$

$$\Sigma m\,[\bar{c} + \bar{r}', \ddot{\bar{r}}'] = \Sigma\,[\bar{c} + \bar{r}', \bar{F}].$$

Na obou stranách po roznásobení můžeme zkrátiti

$$[\bar{c}, \Sigma m \ddot{\bar{r}}'] = [\bar{c}, \Sigma \bar{F}],$$

neboť vzhledem k $\ddot{\bar{r}}' = \ddot{\bar{r}}$ to není než pro všechny body m týmž $\bar{c}$ násobený součet pohybových rovnic (65a). Zbude

$$\Sigma m\,[\bar{r}', \ddot{\bar{r}}'] = \frac{d}{dt}\Sigma m\,[\bar{r}', \dot{\bar{r}}'] = \Sigma\,[\bar{r}'\bar{F}], \tag{j}$$

což jest impulsová věta pro bod O' postupující stálou rychlostí $\bar{v}_0$ v přímce, nebo pro bod O' pevný a bodovou soustavu nadanou postupným pohybem přímočarým rovnoměrným rychlostí $-\bar{v}_0$. Při rozkladu v osy pravoúhlé musí tyto si zůstati neustále rovnoběžnými.

2. Druhá věta impulsová jest však splněna vždy, když za bod vztažný zvolíme těžiště. Píšeme-li totiž za polohové vektory bodu m vzhledem k těžišti $\bar{s}$ a nahoře za $\bar{c} = \bar{r}^*$, je $\bar{r} = \bar{r}^* + \bar{s}$, $\ddot{\bar{r}} = \ddot{\bar{r}}^* + \ddot{\bar{s}}$ a vzhledem k (63d) $\Sigma m\bar{s} = 0$, $\Sigma m\ddot{\bar{s}} = 0$.

Dosazením do (g)

$$\Sigma m\,[\bar{r}^* + \bar{s}, \ddot{\bar{r}}^* + \ddot{\bar{s}}] = \Sigma\,[\bar{r}^* + \bar{s}, \bar{F}].$$

Po roznásobení na levé straně, máme-li na paměti, že $\bar{r}^*$, $\dot{\bar{r}}^*$ i $\ddot{\bar{r}}^*$ jsou všem bodům společny, vzniknou členy

$$[\bar{r}^*, \ddot{\bar{r}}^*]\,\Sigma m = \left[\bar{r}^*, \frac{\Sigma \bar{F}}{\Sigma m}\right]\Sigma m = [\bar{r}^*, \Sigma \bar{F}],$$

$$[\bar{r}^*, \Sigma m\ddot{\bar{s}}] = 0, \qquad -[\ddot{\bar{r}}^*, \Sigma m\bar{s}] = 0, \qquad \Sigma m\,[\bar{s}, \ddot{\bar{s}}].$$

Člen prvý zkrátí se s totožným na pravé straně, a zbývá

$$\Sigma m\,[\bar{s}, \ddot{\bar{s}}] = \frac{d}{dt}\Sigma m\,[\bar{s}, \dot{\bar{s}}] = \Sigma\,[\bar{s}, \bar{F}], \tag{k}$$

což bylo dokázati. Platí ovšem zase pro každou těžištěm procházející osu. Jest zajímavo a velmi důležito, že ani zrychlení těžiště nevstupuje do rovnic.

*69. Diskuse druhé věty. Nepromĕnná rovina.

Aby se ozřejmil význam druhé věty impulsové, provedeme dle Föppla její diskusi v některých zvláště jednoduchých případech.

1. Isolovaná soustava, která byla v klidu.

Původní impulsmoment $U_0 = 0$ a nulou zůstane, ježto $\Sigma\,[r\bar{F}] = 0$. Těžiště bylo v klidu a v klidu zůstane, třeba by vnitřní síly způsobily změnu konfigurace soustavy. Počne-li následkem jejich působení část částic obíhati

kolem jakési osy ve směru ručiček hodinových, musí se jiné dostati do oběhu opačného, aby $\overline{U}=0$ pro libovolný momentový bod nebo vzhledem k libovolné ose.

2. Soustava isolovaná, těžiště z počátku v klidu, $\overline{U}_0 > 0$. Těžiště zůstane ovšem trvale v klidu. Ježto $\Sigma\,[\overline{r}\,\overline{F}]=0$, má impulsmoment trvale hodnotu U_0. Konstanta U_0 je nezávislá na volbě vztažného bodu. Volíme-li místo O nyní O', kde $\overline{OO'}=\overline{c}$, bude $\overline{r}=\overline{r}'+\overline{c}$ a

$$\overline{U}'_0=\Sigma\,[\overline{r}',m\overline{v}]=\Sigma\,[\overline{r}-\overline{c},m\overline{v}]=\Sigma\,[\overline{r},m\overline{v}]-[\overline{c},\Sigma m\overline{v}]=\overline{U}_0-[\overline{c},\overline{v}^*\Sigma m]=\overline{U}_0, \quad (a)$$

neboť rychlost těžiště $\overline{v}^*=0$.

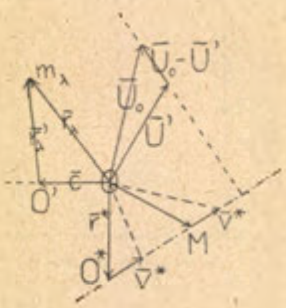
Zanedbáváme-li vliv stálic, jest sluneční soustava isolovanou soustavou hmotných bodů. Kdyby její těžiště bylo v klidu (v absolutním prostoru, t. j. vzhledem k nějaké soustavě, v níž platí zákon setrvačnosti), měl by její impulsmoment $\overline{U}$ hodnotu trvale touž $\overline{U}_0$ pro všechny body momentové (vztažné). Volme za vztažný bod třeba střed slunce. Ježto velké planety obíhají je v témž směru, ve kterém se slunce otáčí, není impulsmoment nulový, nýbrž má konečnou hodnotu. Kdyby se veškeré oběhy planet dály v téže rovině — rovníkové rovině slunce — a veškeré planety se točily kol os na rovině té kolmých, byl by výsledný impulsmoment rovněž na ni kolmý. To sice není splněno, ale odchylky nejsou příliš veliké, takže se lze ptáti, existuje-li v prostoru jakási rovina pro sluneční soustavu charakteristická a vždy přístupná výpočtu, na níž je součet průmětů hybností, nebo-li hmotami násobených plošných rychlostí, největší. To je Laplaceova neproměnná rovina sluneční soustavy, zjevně kolmá na neproměnitelném $\overline{U}=\overline{U}_0$ a obyčejně myšlená vedenou těžištěm soustavy. Směrem $\overline{U}_0$ jest dán neproměnitelný směr.

3. Isolovaná soustava, počáteční $\overline{U}_0 > 0$, počáteční rychlost těžiště $\overline{v}^*$.

Tato rychlost pro $\Sigma\overline{F}=0$ se nezmění, pohyb těžiště je přímočarý rovnoměrný. Impulsmoment $\overline{U}_0$ zůstává stále týž pro týž bod momentový (v absol. prostoru pevný), ale pro ruzné momentové body je různý; dle (a) jest

$$\overline{U}'=\overline{U}_0-[\overline{c},\overline{v}^*\Sigma m], \text{ tedy } \overline{U}_0-\overline{U}'=[\overline{c},\overline{v}^*\Sigma m] \quad (b)$$

je kolmé na $\overline{v}^*$ čili na dráze těžiště, což znamená, že vektory $\overline{U}_0$ a $\overline{U}'$ mají týž průmět na onu dráhu, třebaže by se různily směrem i velikostí (obr. 65).



Obr. 65.

Dále je patrno, že pro všechny vztažné body O', O''..., ležící od O ve směru dráhy těžiště, budou impulsmomenty stejné, neboť pak $\overline{OO'}=\overline{c}$, $\overline{OO''}=\overline{c}'$... budou vektory rovnoběžné s $\overline{v}^*$ a dle (b) $\overline{U}_0-\overline{U}'=0$.

K pojmu nepromĕnné roviny dojdeme takto: K časově neproměnnému $\overline{U}_0$ přičtěme záporný impulsmoment (vztažený k témuž pevnému bodu O) celé hmoty M soustavy soustředěné v jejím těžišti O^*, kterýž jest $\overline{U}^*=[\overline{r}^*, M\overline{v}^*]$ a s časem se i za postupu těžiště nemění. Můžeme však psáti:

$$[\overline{r}^*, M\overline{v}^*]=[M\overline{r}^*,\overline{v}^*]=[\Sigma m_\lambda \overline{r}_\lambda,\overline{v}^*]=\Sigma\,[m_\lambda\overline{r}_\lambda,\overline{v}^*]=\Sigma\,[\overline{r}_\lambda, m_\lambda\overline{v}^*].$$

Pak máme pro časově neproměnný rozdíl

$$\overline{U}_r=\overline{U}_0-\overline{U}^*=\Sigma\,[\overline{r}_\lambda, m_\lambda(\overline{v}_\lambda-\overline{v}^*)]. \quad (c)$$

Jest to tak, jako bychom vzali místo všech rychlostí absolutních $\bar{v}_\lambda$ hmotných bodů. jejich relativní rychlosti $v_\lambda - v^*$ vzhledem k těžišti soustavy. Platí tedy věta o plochách v soustavě, která se rovnoměrně přímočaře pohybuje. Časově neproměnné $\bar{U}_r$ jest neproměnné také místně, nezávisí na poloze momentového bodu, neboť

$$\bar{U}'_r = \Sigma[\bar{r} - \bar{c}, m(\bar{v} - \bar{v}^*)] = \bar{U}_r + [\bar{c}, \Sigma m(\bar{v} - \bar{v}^*)] = \bar{U}_r, \qquad (d)$$

ježto

$$[\bar{c}, \Sigma m v - v^* \Sigma m] = 0.$$

Za neproměnnou rovinu volíme rovinu kolmou k $\bar{U}_r$. Bylo-li $\bar{U}_0$ nulou, tedy jí zůstává. Neproměnné těleso se nemůže dostati do rotace vnitřními silami. Těleso vnitřně proměnné sice ano, ale celkový impulsmoment musí zůstati nulovým. (Kočka dopadá z výše vždy na nohy, což zkoušela 1894 Pařížská akademie. Lze loďku otočiti, aniž bychom se vesly dotkli vody?)

Rovnice (c) spojena s (d) vyjadřuje důležitou obecnou poučku: Impulsmoment $\bar{U}_0$ vztažený k libovolnému absolutně pevnému bodu, jest roven součtu impulsmomentu U^* celé hmoty soustředěné v těžišti a impulsmomentu $\bar{U}'_r$, momentu to relativních rychlostí vzhledem k těžišti.

Průmětem na libovolný směr $\bar{\nu}$ obdržíme dle § 7 momenty vzhledem k ose se směrem $\bar{\nu}$ rovnoběžné, takže lze též říci: Moment hybnosti vzhledem k libovolné absolutně pevné ose se rovná součtu momentu celé hmoty nahromaděné v těžišti vzhledem k této ose a momentu relativních hybností (vzhledem k těžišti) vzhledem k ose s prvou rovnoběžné a těžištěm procházející. Totéž okamžitě je patrno ze semikartézského rozepsání věty naší explicite napsané:

$$\Sigma[\bar{r}, m\bar{v}] = [\bar{r}^*, \bar{v}^* \Sigma m] + \Sigma[\bar{s}, m\dot{\bar{s}}] \qquad (e)$$

kde $\bar{s} = \bar{r} - \bar{r}^*$, $\xi = x - x^*$

$$\Sigma m(x\dot{y} - y\dot{x}) = (x^*\dot{y}^* - y^*\dot{x}^*)\Sigma m + \Sigma m(\xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi}). \qquad (f)$$

4. Všechny vnější síly se protínají v témž bodě.

Volíme-li jej za vztažný bod, je $\Sigma[\bar{r}\bar{F}] = 0$ a impulsmoment je stálý. Rovina k němu kolmá je rovinou neproměnnou, na níž průmět „plošných rychlostí dle váhy“ je největší. Toho lze užíti při setrvačníku, zanedbáváme-li tíži, neboť pak jedinou vnější silou jest tlak od bodu, kolem něhož se otáčí.

5. Vnější síly jsou vesměs rovnoběžné.

Promítněme soustavu na rovinu k silám kolmou a pišme větu ($67f$): Průměty všech sil jsou nulami (body), takže

$$\Sigma[\bar{r}', m\bar{v}'] = \text{stálé} = \bar{U}'. \qquad (g)$$

Složka impulsmomentu ve směru se silami rovnoběžném jest tedy stálá. Vzhledem k jinému vztažnému bodu, píšeme-li za $\bar{r}'$ nyní $\bar{r}' - \bar{c}$, přibude vlevo člen

$$-\Sigma[\bar{c}, m\bar{v}'] = -[\bar{c}, \Sigma m v'] = -[\bar{c}, v^{*\prime}\Sigma m],$$

kde $v^{*\prime}$ jest rychlost těžiště v dané rovině. Tato rychlost se vlivem vnějších sil, na rovině vesměs kolmých, nemůže změniti. Byla-li jednou nulou, t. j. bylo-li těžiště v klidu, nebo pohybovalo-li se rovnoběžně se silami, zůstane jí. V tomto zvláštním případě $\bar{v}^{*\prime} = 0$ nezávisí složka $\bar{U}'$ od polohy vztažného bodu v té rovině, impulsmoment vztažený na kteroukoliv osu se silami rovnoběžnou je trvale týž.

70. Podnmíky rovnováhy soustav.

Statickou rovnováhou*) nebo statickým rovnovážným stavem označujeme takový stav, kde každý hmotný bod soustavy, která v jistém okamžiku byla v klidu, v klidu setrvává. Jeho zrychlení musí tedy býti rovno nule. Podmínkami rovnováhy pak nazýváme takové vztahy, které jsou nutné a postačitelné k tomu, aby hmotný bod nebo soustava se nacházela ve stavu rovnovážném. Z nich buď stanovíme vnější síly, které k daným vazbám a silám nutno připojiti, aby se bod (soustava) v dané poloze (konfiguraci) udržel, nebo jindy stanovíme uskutečnitelné polohy bodu (soustavy), v nichž by se nacházel v rovnováze bez připojení nových sil vnějších, stanovíme polohy rovnovážné v daném poli silovém.

U soustavy volných bodů jest patrně potřebí (44d), aby pro každý bod m_λ zvlášť byla splněna rovnice

$$\bar{f}_\lambda + \bar{F}_\lambda = 0. \qquad (a)$$

Výslednice $\bar{f}_\lambda$ vnitřních sil (64b'), které by vedly k pohybu volného bodu, musí u každého bodu být právě vyvážena výslednicí $\bar{F}_\lambda$ sil vnějších.

U soustavy tuhé nezpůsobují dle definice vnitřní síly vzájemných pohybů částic, musí tedy vždy samo sebou být splněno $\bar{f}_\lambda = 0$. Funkce vzdálenosti $F(r_{\lambda\mu})$ v zákoně o centrálních silách vnitřních (srv. 43, V) $\bar{f}_{\lambda\mu} = m_\lambda m_\mu F(r_{\lambda\mu}) \bar{\varrho}_{\mu\lambda}$ musí tedy při výkladu podstaty hmoty býti tak volena, aby připouštěla alespoň jeden rovnovážný stav každé částice tuhé soustavy. Z (a) zbývá $\bar{F}_\lambda = 0$, což jest jistě rovnovážným stavem, ale případem všedním a lze spíše považovati za definici tuhosti soustavy.

Ukážeme z vět impulsových, že tuhá soustava i za existence vnějších sil může býti v rovnováze. Je-li především

$$\Sigma \bar{F} = 0, \quad \text{čili} \quad \Sigma X = \Sigma Y = \Sigma Z = 0, \qquad (b)$$

tedy: Výslednice všech vnějších sil rovna nule, tu dle (65c) zachovává těžiště svůj pohyb a bylo-li v klidu, setrvá v něm. To však k rovnováze nestačí, neboť soustava mohla by se kolem těžiště otáčeti. Aby všechny body jednou klidné v klidu zůstaly, musí dle (68c, g)

$$\Sigma \bar{M} = \Sigma[\bar{r}\bar{F}] = 0, \quad \text{čili} \quad \begin{aligned} \Sigma(yZ - zY) &= 0, \\ \Sigma(zX - xZ) &= 0, \\ \Sigma(xY - yX) &= 0, \end{aligned} \qquad (c)$$

čili: Výsledný moment vnějších sil musí býti roven nule. Jest tudíž celkem šest podmínek rovnováhy pro obecnou soustavu tuhou

*) Proti rovnováze statické stojí rovnováha kinetická (méně vhodně zvaná též dynamickou), při níž jde o nezměněné trvání některých časových nebo místních středních hodnot (rychlostí, energií, hustot a. p.), ač se uvniti soustavy pohyby dějí. Zvláště se jí zabývá mladý obor vědní, zvaný statistickou mechanikou (Gibbs, Lorentz Ehrenfestové (viz franc. vyd. Mat. Encykl.), P. Hertz ve Weber-Gansově Repertorium der Physik. II).

Rovnováhy tuhého systému obecně vždy docílíme, když k vnějším silám a momentům připojíme sílu a moment otáčivý tak, aby dle (*b*) a (*c*) doplňovaly polygony sil a momentů na uzavřené, jak v nauce o tuhém tělese obšírněji seznáme. V jednom důležitém a velmi častém případě se věc zjednoduší, totiž nachází-li se tuhá soustava v homogenním poli silovém.

Jest to pole, jehož intensita $\bar{g}$, t. j. síla na jedničku hmotnou, jest stálá co do směru i velikosti v celém rozsahu pole. Již jsme se zmínili (§ 67), že hlavním představitelem takového pole jest pole zemské tíže. Nepůsobí-li mimo ni žádné jiné vnější síly, jest $F_\lambda = m_\lambda \bar{g}$ a dle (65*c*)

$$\ddot{r}^* \Sigma m = \Sigma F = \bar{g} \Sigma m, \quad \text{čili} \quad \ddot{r}^* = \bar{g}. \tag{d}$$

Hmotný střed soustavy pohybuje se v poli týmž způsobem jako každý jiný hmotný bod. Celková síla $\bar{g}\Sigma m$, zvaná vahou tuhé soustavy, je vektor působící v hmotném středu jejím. Odtud slovo těžiště, jakožto působiště zemské tíže. Zabráníme-li pohybu těžiště vnější silou $-\bar{g}\Sigma m$ v něm působící, nastává rovnováha.

Dle (68*c*) a dále (63*a*) jest

$$\frac{d}{dt} \Sigma m [\bar{r}, \bar{v}] = \Sigma [\bar{r}, m\bar{g}] = [\Sigma m\bar{r}, \bar{g}] = [r^* \Sigma m, \bar{g}] = [\bar{r}^*, \bar{g}\Sigma m].$$

Výsledný moment sil tíže nalézáme jako moment jediného hmotného bodu v těžišti umístěného, na nějž působí celá síla $\bar{g}\Sigma m$, čili ve kterém jest celá hmota Σm. Přidáním vnější síly $-\bar{g}\Sigma m$ v těžišti ruší se tedy také moment sil tíže, nenastává ani otáčivý pohyb. Hmotná tuhá soustava v těžišti upevněná jest v rovnováze, působí-li na ni pouze síly zemské tíže.

71. Věta o kinetické energii.

Jednej se o systém z n hmotných bodů. Pohybová rovnice λ-tého bodu jest

$$m_\lambda \ddot{r}_\lambda = f_\lambda + F_\lambda,$$

kde f_λ a F_λ je celková vnitřní a vnější síla na bod ten působící. Napišme dle (47*f*) výraz pro elementární práci při posunutí $d\bar{r}_\lambda$, kteráž ovšem nemusí být úplným diferenciálem. Jest

$$dA_\lambda = (\bar{f}_\lambda + \bar{F}_\lambda)\, d\bar{r}_\lambda = m_\lambda \bar{v}_\lambda d\bar{v}_\lambda = d(\tfrac{1}{2} m_\lambda v_\lambda^2) = dT_\lambda. \tag{a}$$

Součtem pro všechny body

$$d\sum_1^n \tfrac{1}{2} m_\lambda v_\lambda^2 = \Sigma \bar{f}_\lambda d\bar{r}_\lambda + \Sigma \bar{F}_\lambda d\bar{r}_\lambda = dA_i + dA_e, \tag{b}$$

označíme-li celkovou práci vnitřních sil dA_i a sil vnějších dA_e. Součet kinetické energie všech bodů nazýváme kinetickou energií T soustavy, takže

$$\sum_1^n \tfrac{1}{2} m_\lambda v_\lambda^2 = \Sigma T_\lambda = T. \tag{b'}$$

Dosadíme-li do (b) a integrujeme od času t_0 do t, kdy kinetická energie má hodnoty T_0 a T, obdržíme

$$T - T_0 = \int_{t_0}^{t} \Sigma \bar{f} d\bar{r} + \int_{t_0}^{t} \Sigma \bar{F} d\bar{r}. \qquad (c)$$

Přírůstek kinetické energie jest roven práci v témž čase silami vnitřními i vnějšími vykonané.

Jest nutno připomenouti, že u obecné soustavy hmotných bodů není práce vnitřních sil nutně rovna nule, ale ovšem vždy u soustavy tuhé, jak se k tomu vrátíme. Práce sil vnějších týká se veškerých těchto sil, jak vtisknutých, tak reakčních nebo od tření. Ovšem, jsou-li vazby nezávislé na čase, jsou síly od nich kolmé na posunutích a jejich práce tedy nulové.

Důležitý případ nastává tehdy, dají-li se jak síly vnitřní tak síly vnější derívovati z potenciálu, můžeme-li tedy dle vývodů § 49 psáti

$$\bar{f} = -\text{grad}\, u_i = -\nabla u_i, \qquad \bar{F} = -\text{grad}\, u_e = -\nabla u_e, \qquad (d)$$

kde u_i a u_e jsou pouhé funkce bodové. Pak je každá elementární práce úplným diferenciálem těchto u_i a u_e a

$$dA_i = \Sigma \bar{f} d\bar{r} = -\Sigma du_i = -d\Sigma u_i = -dU_i$$

a stejně

$$dA_e = \Sigma \bar{F} d\bar{r} = -dU_e \qquad (d')$$

a dle (b)

$$dT = -d(U_i + U_e) = -dU, \quad \text{čili} \quad E = T + U = \text{stálé}. \qquad (e)$$

Funkce $U = U_i + U_e$ se nazývá celková potenciální energie systému*); věta (e) praví, že celková energie E soustavy čili součet její potenciální a kinetické energie jest stálý. Jest obdobou věty $(49\,o)$ dříve dovozené pro jediný hmotný bod.

Vnitřní síly, o nichž předpokládáme, že jsou centrální, jsou ovšem konservativní, mají potenciál (§ 49). Za to vnější jimi býti nemusí, a pak vzniká z (b) obecně platná věta

$$d(T + U_i) = \Sigma \bar{F} d\bar{r}, \qquad (f)$$

dle níž práce vnějších sil se rovná změně kinetické a vnitřní potenciální energie soustavy čili její celkové mechanické energie.

Užijme poučky o kinetické energii na relativní pohyb soustavy vzhledem k těžišti O^*, t. j. vzhledem k osám procházejícím těžištěm, které zachovávají svůj směr, jsouce nadány pohybem postupným. Pak máme (obr. 63), zveme-li rychlost relativně k těžišti $\bar{v}_r$

$$\bar{r} = \bar{r}^* + \bar{s}, \quad \bar{v} = \dot{\bar{r}} = \dot{\bar{r}}^* + \dot{\bar{s}} = \bar{v}^* + \bar{v}_r, \quad v^2 = v^{*2} + v_r^2 + 2\bar{v}^*\bar{v}_r,$$

$$T = \Sigma \tfrac{1}{2} m v^2 = \Sigma \tfrac{1}{2} m v^{*2} + \Sigma \tfrac{1}{2} m v_r^2, \qquad (g)$$

neboť dle $(63\,d)$

$$\Sigma m \bar{v}^* \bar{v}_r = \bar{v}^* \Sigma m \frac{d\bar{s}}{dt} = \bar{v}^* \frac{d}{dt} \Sigma m \bar{s} = 0.$$

*) Není snad potřebí se obávati zmatku v označení U s velikostí impulsmomentu U.

Prvý člen pravé strany v (g) jest kinetická energie celé hmoty soustavy, již myslíme si nahromaděnu v těžišti, druhý člen jest kinetická energie T_r relativních pohybů vzhledem k těžišti.

Větu (g) nazývají Francouzové theorémem Koenigovým.

72. Všeobecná poznámka o integrálních větách mechaniky soustav bodových.

Seznali jsme v § 65, 68 a 71 obě věty impulsové a theorém o kinetické energii („živé síle") v bodové soustavě. Považujeme-li soustavu tu za uzavřenou (isolovanou), na niž tedy nepůsobí vnější síly, praví prvá věta impulsová (65 e), že impuls (celková hybnost) soustavy je konstantní, v čase nepromĕnný vektor

$$\Sigma m\dot{\bar{r}} = \bar{A}, \quad \text{čili} \quad \begin{aligned} \Sigma m\dot{x} &= \frac{d}{dt}\Sigma mx = A_1, \\ \Sigma m\dot{y} &= \frac{d}{dt}\Sigma my = A_2, \\ \Sigma m\dot{z} &= \frac{d}{dt}\Sigma mz = A_3. \end{aligned} \tag{a}$$

Druhá věta impulsová (68 c) praví, že v témž případě jest také impulsmoment (součet momentů hybností) časově stálý

$$\Sigma m[\bar{r}, \dot{\bar{r}}] = \bar{B}, \quad \text{čili} \quad \begin{aligned} \Sigma m(y\dot{z} - z\dot{y}) &= B_1, \\ \Sigma m(z\dot{x} - x\dot{z}) &= B_2, \\ \Sigma m(x\dot{y} - y\dot{x}) &= B_3. \end{aligned} \tag{b}$$

Konečně praví theorém o živé síle $(71 f)$, že celková mechanická energie (kinetická i potenciální) isolované soustavy je nepromĕnná,

$$T + U_i = \text{const.} \tag{c}$$

Tyto tři věty dávají tedy vesměs prvé integrály pohybových rovnic isolované soustavy, obsahujíce vesměs pouze prvé a nikoli druhé diferenciální poměry souřadnic. Prvé dvě, vztahujíce se na vektory, skýtají po třech, poslední pak, skalární, pouze jediný integrál, celkem tedy sedm. Prvé tři (a), vyjadřující rovnoměrný a přímočarý pohyb těžiště, připouštějí integraci další, takže naše tři věty obsahují celkem 10 integračních konstant. Prvé a poslední tři (z rovnic (a)) jsou určeny polohou a rychlostí těžiště, druhé tři (b) velikostí a směrem otáčivého impulsu, sedmá (c) mechanickou energií soustavy v jistém daném okamžiku.

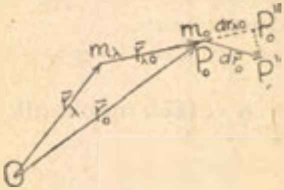
Problém tří těles, daný v kartézských souřadnicích devíti pohybovými rovnicemi, vyžadoval by devíti prvých integrálů, kdežto naše integrální věty dávají jich pouze sedm (srovnej konec § 66).

Mezi větami impulsovými a větou o živé síle jest další podstatný rozdíl: Z integrálů (a) a (b) vymizely úplně síly (ovšem vnitřní, jiných není) soustavy, v integrálu (c) jsou obsaženy ve výrazu pro U_i.

73. Potenciál bodové soustavy na bod vnější.

Mějme soustavu n hmotných bodů $m_1, \dots m_n$ v konfiguraci určené polohovými vektory $\bar{r}_1, \dots \bar{r}_n$, a mimo ně hmotný bod m_0 v místě $\bar{r}_0$.

Může ovšem ležeti kdekoli mimo místa $\bar{r}_1, \dots \bar{r}_n$, tedy prostorově třebas uvnitř soustavy, do níž však m_0 nepočítáme. Veškeré body působí na m_0 silami centrálními, které vyhovují principu akce a reakce, takže je lze dle § 43, V. psáti ve tvaru



Obr. 66.

$$\bar{f}_{0\lambda} = \pm m_0 m_\lambda \psi(r_{0\lambda}) \cdot \bar{\varrho}_{0\lambda}. \qquad (a)$$

Znamení + platí pro síly přitažlivé (za předpokladu čísel m_0 a m_λ vesměs kladných), — pro síly odpudivé; $\psi(r_{0\lambda})$ je skalární funkce vzdálenosti (vždy kladného $r_{0\lambda} = r_{\lambda 0}$) a $\bar{\varrho}_{0\lambda}$ jedničkový vektor směřující od m_0 k m_λ (obr. 66).

Za základ dalších vývodů vezmeme znamení kladné; pro síly odpudivé stačí změna znaménková.

Posune-li se bod m_0 z P_0 do P'_0 o $d\bar{r}_0$, je práce síly od bodu m_λ

$$\bar{f}_{0\lambda} d\bar{r}_0 = m_0 m_\lambda \psi(r_{\lambda 0}) \bar{\varrho}_{0\lambda} d\bar{r}_0 = -m_0 m_\lambda \psi(r_{\lambda 0})\, dr_{\lambda 0}, \qquad (b)$$

neboť patrně jest

$$\bar{\varrho}_{\lambda 0} d\bar{r}_0 = -\bar{\varrho}_{0\lambda} d\bar{r}_0 = P_0 P''_0 = dr_{\lambda 0}$$

velikost průmětu $d\bar{r}_0$ na směr $\bar{\varrho}_{\lambda 0}$ čili zvětšení velikosti $r_{\lambda 0}$. Elementární práce sil od veškerých hmotných bodů soustavy při tomto posunutí z $\bar{r}_0$ do $\bar{r}_0 + d\bar{r}_0$ jest

$$dA = d\bar{r}_0 \sum_{\lambda=1}^{n} \bar{f}_{0\lambda} = -m_0 \sum_{1}^{n} m_\lambda \psi(r_{\lambda 0})\, dr_{\lambda 0} = -m_0 dV. \qquad (c)$$

Můžeme totiž každý výraz za znamením součtovým považovati za úplný diferenciál dV_λ funkce

$$V_\lambda = m_\lambda \int \psi(r_{\lambda 0})\, dr_{\lambda 0}, \qquad (d)$$

jež závisí pouze na hmotě m_λ a vzdálenosti bodu m_0 od m_λ a napsaným integrálem jest až na aditivní konstantu určena.

Funkci týchž vlastností, bodovou, ježto za dané konfigurace $m_1, \dots m_n$ závisí pouze od polohy bodu m_0,

$$V = \sum_{1}^{n} V_\lambda = \sum_{1}^{n} m_\lambda \int \psi(r_{\lambda 0})\, dr_{\lambda 0}, \qquad (e)$$

nazýváme potenciálem hmotné soustavy v místě P_0.

Výslednou sílu na jedničku hmotnou čili intensitu silového pole soustavy v místě P_0 můžeme pak psáti

$$\frac{1}{m_0} \Sigma \bar{f}_{0\lambda} = \frac{1}{m_0} \bar{f} = a = -\frac{dV}{d\bar{r}} = -\operatorname{grad} V = -\nabla V, \qquad (f)$$

usuzujíce z (c) stejně jako v (49 e, f). Rozepsáním plyne

$$\frac{1}{m_0}(\bar{\imath} X + \bar{\jmath} Y + \bar{k} Z) = -\left(\bar{\imath}\frac{\partial V}{\partial x} + \bar{\jmath}\frac{\partial V}{\partial y} + \bar{k}\frac{\partial V}{\partial z}\right),$$

a tedy pro složky výsledné síly v osách

$$X = -m_0 \frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = -m_0 \frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = -m_0 \frac{\partial V}{\partial z}. \qquad (g)$$

Velikost síly výsledné plyne ze skalárního kvadrátu jakožto

$$f = m_0 \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2}. \qquad (h)$$

Síla v libovolném směru $\bar{\sigma}$ je

$$\bar{\sigma}\bar{f} = -m_0(\bar{\sigma}\bar{V})V = -m_0 \frac{dV}{ds}. \qquad (i)$$

Posune-li se bod m_0 o konečnou trať z místa $\bar{r}_0$ do $\bar{r}$, je dle (c) celková práce přitažlivých sil od systému rovna

$$\int_{\bar{r}_0}^{\bar{r}} dA = A_{\bar{r}_0}^{\bar{r}} = -m_0 \int_{\bar{r}_0}^{\bar{r}} dV = m_0(V_0 - V), \qquad (j)$$

kde V_0 a V jsou potenciály v místech $\bar{r}_0$ a $\bar{r}$. Jest tudíž při každém posunutí práce sil soustavy na vnější jedničku hmotnou rovna klesnutí potenciálu.

Byl-li bod m_0 úplně volný, leží $d\bar{r}$ vždy ve směru síly, všechna $\bar{f}d\bar{r}$ a tedy i práce jest kladná, $V_0 > V$, a vidíme tedy, že volný bod se pohybuje z míst vyššího na místa nižšího potenciálu.

Ježto v aplikacích se vždy jedná o rozdíly potenciálové, není neznalost V_0 závadou. Někdy definitoricky stanovíme, že pro jisté, libovolně určené místo $\bar{r}_0$ má potenciál V_0 býti roven nule. Tak na př. v problémech elektrických, kde za hmoty m nastupují elektrické náboje, volíváme tímto místem povrch zemský nebo místo s ním vodivě spojené. Jindy, a to nejčastěji, má-li funkce $\psi(r_{\lambda 0})$ v rovnicích (a) až (e) takový tvar, že pro $\bar{r}_0 = \infty$ se stává nulou, takže v nekonečné vzdálenosti i se silou mizí, volíme $V_0 = 0$ pro $\bar{r}_0 = \infty$. Pak jest dle (j) a (c)

$$V = -\frac{1}{m_0} A_{\infty}^{\bar{r}} = \frac{1}{m_0} A_{\bar{r}}^{\infty} = \sum_1^n m_\lambda \int_{\infty}^{r_{\lambda 0}} \psi(r_{\lambda 0})\, dr_{\lambda 0} \qquad (k)$$

potenciál v libovolném místě definován jakožto práce, kterou síly od systému pochodící musí vykonati, aby jedničková hmota z daného místa byla převedena do nekonečné vzdálenosti.

Kdybychom na pohyblivou hmotu m_0 nazírali jakožto na součást isolované soustavy $m_0, m_1, \ldots m_n$, kde hmoty $m_1, \ldots m_n$ jsou v jisté dané konfiguraci, alespoň pro okamžik myšlené pevnou, pak ovšem, aby se m_0 nedostala do pohybu vlivem výsledné síly $\bar{f} = \Sigma \bar{f}_{0\lambda}$, kterou ovšem nyní musíme považovati za sílu vnitřní, musí na ni působiti stejně veliká síla $\bar{F}$ vnější, směru opačného, t. j. $\bar{F} = -\bar{f}$. Positivní práce této vnější síly při posunutí bodu m_0

$$dA' = \bar{F}d\bar{r} = -\bar{f}d\bar{r} = m_0 dV = -dA$$

se projevuje stoupnutím potenciálu a tím, jak uvidíme, i potenciální energie soustavy, jak tomu musí dle $(71f)$ býti. Nazíráme-li takto na pohyblivý bod, můžeme definovati potenciál jakožto práci vnějších sil k tomu potřebnou, aby se jedničková hmota přenesla z nekonečné vzdálenosti (obecněji z místa, kde po-

tenciál je nulou) do onoho místa, v němž potenciál hledáme. Této definice se obyčejně užívá v elementárních knihách. Vzhledem k tomuto nazírání psali jsme již od začátku tohoto paragrafu síly na bod m_0 jakožto f, ač malé této písmeny užíváme jinak zpravidla pro síly vnitřní.

Není snad od místa, upozorníme-li výslovně na jeden důsledek definice (e). Rozdělme danou soustavu na dvě dílčí, $m_1, \ldots m_h$ a $m_{h+1}, \ldots m_n$. Potenciál v libovolném místě je

$$V = \sum_1^n V_\lambda = \sum_1^h V_\lambda + \sum_{h+1}^n V_\lambda.$$

Potenciál výsledný v každém místě pole obdržíme tedy algebraickým součtem potenciálů od všech soustav dílčích. V tom smyslu mluvíme o superposici potenciálových polí.

74. Potenciální energie bodové soustavy.

Soustava sestávejž z n hmotných bodů $m_1, \ldots m_n$. Jsou-li některé z nich v pohybu, vyznačuje se okamžitý stav soustavy jistou kinetickou energií (71 b') a jistou vnitřní potenciální energií U_i. Zachyťme v myšlenkách konfiguraci soustavy v jistém okamžiku, abstrahujíce od pohybového stavu jednotlivých hmot, jakoby celá soustava byla v daném okamžiku ztuhla. Jaký obnos energie by představovala? Energie kinetická byla by ovšem $T = 0$ a na otázku po obnosu energie potenciální odpovídá nám (71 f)

$$dU_i = \Sigma \bar{F} d\bar{r}, \qquad (a)$$

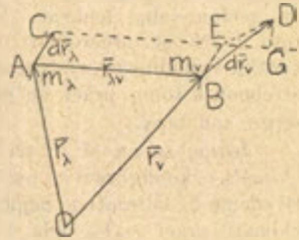
kde F jsou síly vnější.

Dle tohoto vztahu můžeme tedy určiti pouze změnu vnitřní potenciální energie, nikoli její absolutní obnos. Pomáháme si podobným způsobem jako v paragrafu předcházejícím, definujíce si určitou konfiguraci, které přiřkneme vnitřní potenciální energii nulovou. Budiž jí „nekonečné rozptýlení“ soustavy, kdy každý její hmotný bod se nachází v nekonečné vzdálenosti od každého jiného, nemaje pohybu a nepodléhaje žádné síle. Tento stav budeme vyznačovati znamením ∞. Převedeme-li pak body do skutečné konfigurace a, je práce vnějších sil k tomu potřebná rovna vnitřní potenciální energii soustavy, pro kterou v tomto případě zavedeme označení W místo U_i. Ježto $T_a = T_\infty = 0$, jest tato práce dle (71 c) zároveň rovna záporné práci sil vnitřních, čili práci vykonané proti vnitřním silám při přechodu z ∞ do a, nebo také kladné práci vnitřních sil při změně konfigurace a v nekonečné rozptýlení, takže symbolicky

$$U_i = W = \Sigma_\infty^a \bar{F} d\bar{r} = -\Sigma_\infty^a \bar{f} d\bar{r} = \Sigma_a^\infty \bar{f} d\bar{r}. \qquad (b)$$

To ostatně vysvítá bezprostředně bez (71 c), neboť změna konfigurace z ∞ do a musí se díti beze vzniku znatelné rychlosti bodů sledem rovnovážných stavů, kde v každém okamžiku u každé hmoty je $\bar{F}_\lambda = -\bar{f}_\lambda$.

Dle návodu v (b) můžeme nyní vypočísti vnitřní potenciální energii soustavy, která se také nazývá potenciálem soustavy na sama sebe. nebo jejím vlastním potenciálem, či také její pracovní hodnotou. Mějme zase dvě hmotné částice m_λ a m_ν (obr. 67), mezi nimiž působí centrální přitažlivá síla dle (73 a) a to na m_λ síla



Obr. 67.

$$\bar{f}_{\lambda\nu} = m_\lambda m_\nu \psi(r_{\lambda\nu})\,\bar{\varrho}_{\lambda\nu},$$

na m_ν pak $\bar{f}_{\nu\lambda} = -\bar{f}_{\lambda\nu}$.

Prosté vzdálenosti $AB = r_{\lambda\nu} = r_{\nu\lambda}$ přisuzujeme znamení vždy kladné, jako vždy velikosti vektoru, ač ovšem $\bar{r}_{\lambda\nu} = -\bar{r}_{\nu\lambda}$.

Posune-li se m_λ z A do C o $d\bar{r}_\lambda$ a m_ν z B do D o $d\bar{r}_\nu$, jest celková práce vnitřních sil

$$\bar{f}_{\lambda\nu} d\bar{r}_\lambda + \bar{f}_{\nu\lambda} d\bar{r}_\nu = \bar{f}_{\nu\lambda}(d\bar{r}_\nu - d\bar{r}_\lambda) = -m_\lambda m_\nu \psi(r_{\lambda\nu})\,\bar{\varrho}_{\lambda\nu}(d\bar{r}_\nu - d\bar{r}_\lambda).$$

Význam skalárního součinu v posledním výraze jest tento: Vektor $d\bar{r}_\nu - d\bar{r}_\lambda = \overline{ED}$ násobený jedničkovým vektorem $\bar{\varrho}_{\lambda\nu}$ dává průmět do jeho směru, tedy délku EG, čili zvětšení $dr_{\lambda\nu}$ velikosti $r_{\lambda\nu}$, takže elementární práce u obou hmot jest

$$-m_\lambda m_\nu \psi(r_{\lambda\nu})\,dr_{\lambda\nu}. \qquad (c)$$

Abychom obdrželi celkovou práci při elementární změně konfigurace z $\bar{r}$ do $\bar{r} + d\bar{r}$, musíme podobné výrazy, a to pro každou dvojici bodů vždy jeden, sečísti nejprve pro všechny body působící na ν-tý, tedy pro $\lambda = 1$ až n vyjma $\lambda = \nu$, a potom pro všechna ν od 1 do n. Výsledek jest

$$-\tfrac{1}{2}\sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n} m_\lambda m_\nu \psi(r_{\lambda\nu})\,dr_{\lambda\nu}, \quad \lambda \neq \nu. \qquad (d)$$

Před znamení součtová je položen faktor $\tfrac{1}{2}$, ježto provedením součtu bychom obdrželi pro každou dvojici bodů, na př. m_h a m_k, dva totožné výrazy, jednou pro $\lambda = h$, $\nu = k$, podruhé pro $\lambda = k$, $\nu = h$, což se příčí našemu ustanovení.

Všechny členy v (d) jsou úplné diferenciály, takže můžeme dle (b) psáti symbolicky

$$W = -\int_{\infty}^{a} \bar{f}\,d\bar{r} = \tfrac{1}{2}\sum_{\lambda=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n} m_\lambda m_\nu \int_{\infty}^{a} \psi(r_{\lambda\nu})\,dr_{\lambda\nu}, \quad \lambda \neq \nu. \qquad (e)$$

Ale dle (73 k) je součet

$$\sum_{1}^{n} m_\lambda \int_{\infty}^{a} \psi(r_{\lambda\nu})\,dr_{\lambda\nu} = V_\nu, \quad \lambda \neq \nu,$$

potenciálem celé soustavy v místě bodu m_λ za konfigurace a, takže jest

$$W = \tfrac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu V_\nu. \qquad (f)$$

U začátečníka působívá někdy obtíž, má-li přesvědčivě pochopiti, proč vystupuje v (f) faktor $\frac{1}{2}$, a často i v knihách bývá důvod toho podán velmi nejasně. Přes náš, jak doufáme, jasný výklad, jest proto dobře se přesvědčiti o správnosti vzorce (f) tím způsobem, že vskutku vybudujeme systém ze stavu nekonečného rozptýlení, počítajíce potřebnou k tomu práci vnějších sil, jež právě dává vnitřní potenciální energii soustavy.

Jednej se na př. o tři hmotné body. Prvý m_1 je v místě, kam v konečné konfiguraci a patří, druhé dva m_2 a m_3 jsou v nekonečnu. Přivedeme-li odtamtud nejprve druhý do definitivního místa, musíme vykonati práci $m_2 V_2$, kde V_2 je potenciál v místě $\bar{r}_{12}$, pochodící od prvého bodu, tedy dle $(73\,k)$ práci

$$m_2 V_2 = m_2 m_1 \int_{\infty}^{r_{12}} \psi(r)\,dr = m_2 m_1 \varphi_{12}. \qquad (g)$$

Integrál, který jsme zkráceně psali φ_{12}, jest pouhou funkcí vzdálenosti r_{12} a tedy jest $\varphi_{12} = \varphi_{21}$.

Přivedeme-li do místa $\bar{r}_{13}$ (resp. $\bar{r}_{23}$) bod třetí m_3, vykonáme podobně práci

$$m_3 m_1 \varphi_{13} + m_3 m_2 \varphi_{23}. \qquad (g')$$

Potenciály v místech 1, 2, 3 jsou však dle $(73\,k)$ při definitivní konfiguraci

$$\begin{aligned} V_1 &= m_2\varphi_{21} + m_3\varphi_{31}, \\ V_2 &= m_1\varphi_{12} + m_3\varphi_{32}, \\ V_3 &= m_1\varphi_{13} + m_2\varphi_{23}. \end{aligned} \qquad (h)$$

I jest snadno se přesvědčiti, že tři dříve nalezené, práci dávající členy (g) a (g') jsou ve výraze $m_1 V_1 + m_2 V_2 + m_3 V_3$ obsaženy dvakrát. Úplnou indukcí mohli bychom takto, přibravše bod čtvrtý a postupně další, potvrditi správnost vzorce (f).

Konečně jest ještě jedna cesta, kterou též přesvědčivě dojdeme k cíli. Z výrazů (h) jest patrno, že kdyby veškeré hmoty v systému vzrostly k-krát, vzrostly by také potenciály k-kráte.

Vybudujme nyní naši soustavu takto: Místo hmot $m_1, \ldots m_n$ představme si v téže konfiguraci soustavu hmot $km_1, km_2, \ldots km_n$, a dejme faktoru k proběhnouti veškeré hodnoty od 0 do 1. Zachyťme v myšlenkách stav určitého k a přiveďme ke každé hmotě km_λ z nekonečna nekonečně malé množství hmoty $m_\lambda dk$. K tomu potřebujeme práci, jež se rovná potenciálu v místě λ, jenž byl kV_λ, násobenému hmotou $m_\lambda dk$, čili práci $m_\lambda V_\lambda k dk$. Provedeme-li totéž u všech hmot, spotřebovali jsme vnější práci, to jest, zvýšili jsme potenciální energii soustavy o

$$dW = \sum_{\lambda=1}^{n} m_\lambda V_\lambda k dk.$$

Celková potenciální energie soustavy bude tedy dle poznámky dříve uvedené

$$W = \int_{k=0}^{1} dW = \sum_{1}^{n} m_\lambda V_\lambda \int_0^1 k dk = \tfrac{1}{2} \Sigma m_\lambda V_\lambda,$$

jako dříve.

Budiž dovoleno učiniti zde následující poznámku: Jedná-li se, jako v nauce o elektřině velmi často, o derivaci energie W dle hmoty m_ν, musíme míti na zřeteli, že m_ν vystupuje jakožto faktor jednoho členu také ve všech potenciálech V_λ, kde $\lambda \neq \nu$; dosazením výrazů (h) do (f) pak zjistíme, že

$$\frac{dW}{dm_\lambda} = V_\lambda. \tag{i}$$

75. Vzájemná potenciální energie dvou soustav.

Vlastní potenciální energii soustavy můžeme dle (74g, h) psáti

$$W = \tfrac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^{n} m_\lambda \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \varphi_{\lambda\nu}, \quad \lambda \neq \nu. \tag{a}$$

Mysleme si nyní naši soustavu rozdělenou na dvě, při čemž do prvé (I) počítáme body $m_1, \ldots m_h$, do druhé (II) pak $m_{h+1}, \ldots m_n$. Potenciální energie (a) obou soustav dohromady vzatých dá se rozepsati takto:

$$W = \tfrac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^{h} m_\lambda \sum_{\nu=1}^{h} m_\nu \varphi_{\lambda\nu} + \tfrac{1}{2} \sum_{\lambda=h+1}^{n} m_\lambda \sum_{\nu=h+1}^{n} m_\nu \varphi_{\lambda\nu} + \tfrac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^{h} m_\lambda \sum_{\nu=h+1}^{n} m_\nu \varphi_{\lambda\nu} +$$
$$+ \tfrac{1}{2} \sum_{\lambda=h+1}^{n} m_\lambda \sum_{\nu=1}^{h} m_\nu \varphi_{\lambda\nu}.$$

Prvé dva členy, v nichž ovšem $\lambda \neq \nu$, jsou, jak dle definice (a) vysvítá, vlastní potenciální energie obou soustav dílčích I a II. V druhých dvou jest vždy hmota z jedné soustavy násobena potenciálem, který v místě tom vzbuzuje soustava druhá. Vedle toho můžeme se snadno přesvědčiti rozepsáním explicitních výrazů, že oba tyto členy jsou totožné, takže lze psáti v průhledné symbolice

$$W = \tfrac{1}{2} \sum_{I} m_I V_I + \tfrac{1}{2} \sum_{I} m_{II} V_{II} + \tfrac{1}{2} (\sum_{I} m_I V_{II} + \sum_{II} m_{II} V_I),$$

čili
$$W = W_I + W_{II} + W_{I,II}, \tag{b}$$

kde
$$W_{I,II} = \sum_{I} m_I V_{II} = \sum_{II} m_{II} V_I. \tag{c}$$

Člen $W_{I\,II}$ nazýváme vzájemnou potenciální energií obou soustav. Posunují-li se obě soustavy vůči sobě, zachovávajíce každá sama v sobě konfiguraci nezměněnou (na př. dvě soustavy tuhé), nezmění se ani W_I ani W_{II}, a práce vzájemných sil od bodů jedné soustavy na body druhé působících (kteréž byly ovšem v celé soustavě silami vnitřními), jest — nevznikne-li energie kinetická —

$$\sum_{1}^{n} \bar{f}_\lambda d\bar{r}_\lambda = -dW = -dW_{I,II}, \tag{d}$$

tedy rovna klesnutí vzájemné energie.

Kdyby druhá soustava sestávala z jediného bodu m_0, byla by tato práce

$$-dW_{I,II} = -d(m_0 \Sigma V_I) = -m_0 dV$$

ve shodě se (73c).

V. Obecné principy dynamiky soustav.

76. Princip virtuálních posunutí.

Již v § 55 pojednali jsme o principu virtuálních posunutí u jediného hmotného bodu. Zde chceme rozšířiti své úvahy na soustavu bodovou, která se vyznačuje tím, že k souboru sil vnějších (vtisknutých) přistupují síly vnitřní mezi jednotlivými body soustavy. Oba tyto druhy sil shrneme souborným názvem sil výslovně (explicite) daných, nebo kratčeji sil explicitních, čímž se budou odlišovati od sil z vázanosti (od vazeb), jež jsou důsledkem vazeb (podmínek vázanosti). Z § 55 jest nám také znám pojem virtuálního posunutí, možného, s vazbami srovnatelného, ale jinak libovolného a bezčasově myšleného.

Nejobecnější znění principu virtuálních posunutí jest (Fourier): Pohyb v soustavě může nastati pouze tehdy, je-li práce explicitních sil pro některé virtuální posunutí kladná. Je-li pro všechna virtuální posunutí záporná nebo rovna nule, je soustava v rovnováze, pohyb nenastává.

Označíme-li příslušnost vnějších F a vnitřních sil f, jakož i virtuálního posunutí $\delta\bar{r}$ k ν-tému hmotnému bodu m_ν indexem ν, zní náš princip

$$\sum_{\nu=1}^{n}(\bar{F}_\nu+\bar{f}_\nu)\,\delta\bar{r}_\nu \leqq 0. \qquad (a)$$

Kdyby v naší soustavě bylo ke každému virtuálnímu posunutí $\delta\bar{r}_\nu$ možným také posunutí stejné v opačném směru $-\delta\bar{r}_\nu$, kdyby virtuální posunutí byla vesměs zvratná, zněl by speciálněji

$$\sum_{\nu=1}^{n}(\bar{F}_\nu+\bar{f}_\nu)\,\delta\bar{r}_\nu = 0. \qquad (b)$$

V dalším budeme hlavně k takovýmto soustavám přihlížeti.

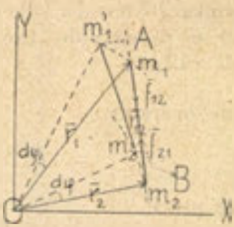
Soustava volných bodů. U soustavy úplně volných bodů jsou veškerá posunutí vůbec virtuální, navzájem nezávislá, a (b) se rozpadá na n vektorových, nebo $3n$ kartézských podmínek rovnováhy

$$F_\nu+\bar{f}_\nu=0. \qquad (c)$$

Součet virtuálních prací vnitřních sil v (b) můžeme dle (71 d') a § 74 nahraditi virtuálním klesnutím vnitřní potenciální energie soustavy. Kdyby tedy šlo o soustavu isolovanou, bez sil vnějších, mohli bychom psáti podmínku rovnováhy

$$\sum_{\nu=1}^{n}\bar{f}_\nu\delta\bar{r}_\nu = -\delta U_i = -\delta W = 0. \qquad (c')$$

Rovnováha nastává při extrémní hodnotě vnitřní potenciální energie a to rovnováha stabilní za energie minimální (Dirichlet). Pro body, které se odpuzují, jest nekonečné rozptýlení rovnovážným stavem stabilním, pro body přitahující se pak labilním.



Obr. 68.

Soustava tuhá. Rovnice (b) se podobně zjednoduší, lze-li klásti virtuální práci vnitřních sil rovnou nule, je-li

$\Sigma \bar{f} \delta \bar{r} = 0$, neboť pak zbývá $\Sigma \bar{F} \delta \bar{r} = 0$. ($d$)

Tomu je tak, jsou-li vnitřní síly centrální, a nemohou-li hmotné body své vzájemné polohy změniti, jsou-li tedy všechny součástí tělesa absolutně tuhého, jakoby každé dva byly spojeny absolutně tuhou, bezváznou tyčí.

Snadno se dokáže, že při libovolném posunutí takovéto dvojice bodu na př. m_1 a m_2 jest práce vnitřních sil $\bar{f}_{12} = -\bar{f}_{21}$ rovna nule. Nejobecnější posunutí takové tuhé soustavy sestává, jak později uvidíme, z pohybu postupného a otočení. Při pohybu postupném jest posunutí všech bodů stejné $\delta \bar{r}$, takže můžeme psáti

$$\Sigma \bar{f}_\nu \delta \bar{r}_\nu = \delta \bar{r} \Sigma \bar{f}_\nu = 0, \qquad (d')$$

neboť dle (64e) jest výslednice všech vnitřních sil soustavy rovna nule.

Posunutí vlivem rotace kolem libovolné osy procházející bodem O (obr. 68) můžeme vyčísliti pomocí (16e), představíme-li si, že se událo za dobu dt rychlostí rotační $\bar{\omega}$. Pak jest posunutí bodu m_1, t. j. $\overline{m_1 m'_1} = \delta \bar{r}_1 = [\bar{\omega} \bar{r}_1]\, dt$ a podobně posunutí $\overline{m_2 m'_2} = \delta \bar{r}_2 = [\bar{\omega} \bar{r}_2]\, dt$. Celková práce vnitřních sil u této dvojice bodu jest pak

$$\bar{f}_{12} [\bar{\omega} \bar{r}_1]\, dt + \bar{f}_{21} [\bar{\omega} \bar{r}_2]\, dt = \bar{f}_{12} [\bar{\omega}, \bar{r}_1 - \bar{r}_2]\, dt = 0,$$

neboť vektor $\bar{r}_1 - \bar{r}_2 = \bar{r}_{21}$ jest opačného směru než síla $\bar{f}_{12}$ a dle (8a)

$$\bar{f}_{12} [\bar{\omega} \bar{r}_{21}] = \bar{\omega} [\bar{r}_{21} \bar{f}_{12}] = 0,$$

ježto vektorový součin se rovná nule.

Bez pomoci vzorce (16e) lze důkaz vésti také takto: Otočení kolem libovolné osy lze nahraditi otočením kolem tří os na sobě navzájem kolmých. Volme je tak, že X a Y leží v téže rovině (papíru) jako body O, m_1 a m_2, osa Z jest na rovině této kolmá. Při nesmírně malé rotaci kolem os X nebo Y vystoupí body m_1 a m_2 kolmo z papíru ven, posunutí jsou kolmá na silách $\bar{f}_{12}$ a $\bar{f}_{21}$, práce jsou nulové. Při otáčení kolem osy Z vznikají posunutí $\delta \bar{r}_1 = \overline{m_1 m'_1}$ a $\delta \bar{r}_2 = \overline{m_2 m'_2}$, která můžeme, je-li úhel otočení $d\varphi$, znázorniti jakožto $[\bar{\varepsilon} \bar{r}_1]\, d\varphi$ a $[\bar{\varepsilon} \bar{r}_2]\, d\varphi$, značí-li $\bar{\varepsilon}$ jedničkový vektor v ose Z na papíru kolmý (srov. začátek § 31). Práce jest pak

$$\bar{f}_{12} [\bar{\varepsilon}, \bar{r}_1 - \bar{r}_2]\, d\varphi = \bar{f}_{12} [\bar{\varepsilon}, \bar{r}_{21}]\, d\varphi = 0$$

z téhož důvodu jako dříve.

Ostatně také důkaz čistě trigonometrický při tomto posunutí nečiní žádných obtíží: Spočívá v tom, že osvědčíme stejnost tratí $m_1 A$ a $m_2 B$ (obr. 68), což lze redukovati na stejnost trojúhelníků $O m_1 m_2$ a $O m'_1 m'_2$.

Ježto tedy se virtuální práce centrálních vnitřních sil u každé dvojice tuze spojených bodů rovná nule, jest tomu tak i u celé soustavy tuhé, jak bylo dokázati.

U soustavy tuhé, na niž působí vnější síly, redukuje se podmínka rovnováhy dle (*d*) na podmínku, že virtuální práce vnějších sil se rovná nule. Lze-li vnější síly derivovati z potenciálu, je-li tedy dle (49*g*)

$$\bar{F}_\nu = -\nabla_\nu U = -\operatorname{grad}_\nu U,$$

kde operátor

$$\nabla_\nu = \operatorname{grad}_\nu = \bar{i}\frac{\partial}{\partial x_\nu} + \bar{j}\frac{\partial}{\partial y_\nu} + \bar{k}\frac{\partial}{\partial z_\nu},$$

lze psáti

$$\sum_\nu \bar{F}_\nu \delta\bar{r}_\nu = -\sum_\nu \nabla_\nu U . \delta\bar{r}_\nu = -\delta U = 0. \qquad (e)$$

Rovnováha je možna v extrémních hodnotách potenciální energie (od vnějšího pole silového), a to, jak Dirichlet ukázal, stabilní rovnováha za minimálního U.

Jakožto jednoduchou aplikaci odvodíme t. zv. Toricelliho princip pro tuhé těleso v zemském poli tížném. Zvolme směr svislý vzhůru za osu Z, obě osy X a Y v některé horizontální rovině. Síla zemské tíže na každý bod m_ν má pak velikost $m_\nu g$ a směr $-\bar{k}$ čili $\bar{F}_\nu = -m_\nu g\bar{k}$. Lze ji patrně derivovati z potenciálu, neboť, je-li C konstanta, je

$$-\left(\bar{i}\frac{\partial}{\partial x_\nu} + \bar{j}\frac{\partial}{\partial y_\nu} + \bar{k}\frac{\partial}{\partial z_\nu}\right)(m_\nu g z_\nu + C) = -m_\nu g\bar{k} = \bar{F}_\nu. \qquad (f)$$

Věta (*e*) praví, vzpomeneme-li (11*h*, *i*),

$$-\Sigma\delta\bar{r} . \nabla_\nu (m_\nu g z_\nu) = -\delta\Sigma m_\nu g z_\nu = 0. \qquad (f')$$

Ale dle (63*c*) jest

$$g\Sigma m_\nu z_\nu = g z^* \Sigma m_\nu,$$

kde z^* jest výška těžiště nad zvolenou základní horizontální rovinou. Princip (*f'*) pak praví, že rovnováha nastává za $\delta z^* = 0$, čili tehdy, když za virtuálního posunutí těžiště nedozná změny ve výši, to jest, nachází-li se v nejvyšší nebo nejnižší z poloh možných. V druhém případě je rovnováha stabilní.

Že jest rovnováha stabilní za minimální hodnoty potenciální energie, můžeme si ozřejmiti takto: Mějž U minimální hodnotu U_0 za jisté polohy soustavy. Přiveďme ji do polohy sousední, velmi blízké, za níž má potenciální energii U_1 a kinetickou T_1; pak je $U_1 - U_0$ malá kladná veličina. Za dalšího průběhu pohybu musí dle principu energie trvale býti $T + U = T_1 + U_1$. Ježto však je $U > U_0$ dle předpokladu, bude stále $T < T_1 + (U_1 - U_0)$, čili kinetická energie nepřestoupí jistou malou hodnotu, závislou na prvopočáteční poruše. Ježto jest T podstatou kladná veličina, plyne podobně z prvé rovnice $U < T_1 + U_1$, čili $U - U_0 < T_1 + (U_1 - U_0)$. To znamená, že také potenciální energie za samovolného dalšího pohybu nestoupne než o veličinu, kterou můžeme volbou velikosti prvé poruchy učiniti libovolně malou. Soustava se tedy nevychýlí z původní polohy U_0 leč málo a nenabude leč malé kinetické energie, t. j. malých rychlostí. Není-li U v rovnovážné poloze minimem, je rovnováha obecně labilní.

Soustava s vazbami. Jsou-li v obecné soustavě všechny nebo některé hmotné body podrobeny vazbám, můžeme postupovati zcela obdobně jako v § 55. Každá vazba je vyjádřena rovnicí nebo nerovnicí (nerovností), a každou nahradíme silami od vazeb Φ_ν. Předpokládáme-li, že veškeré virtuální práce sil od vazeb

j s o u   r o v n y   n u l e — a to je kořen našeho principu — že tedy $\Sigma\Phi_\nu \delta\bar{r}_\nu = 0$ pro posunutí virtuální, zůstane tvar principu nezměněn (a), resp. (b), jsou-li vazby vesměs oboustranné, virtuální posunutí zvratná. Ovšem v obou tvarech značí $\delta\bar{r}_\nu$ posunutí virtuální.

Mají-li $\delta\bar{r}_\nu$ znamenati v e š k e r á libovolná posunutí, musíme podobně jako v (55 f) psáti v e š k e r é síly, tedy i síly od vazeb a bude (při podmínkách oboustranných) jeho tvar

$$\Sigma(\bar{F}_\nu + \bar{f}_\nu + \Sigma\Phi_\nu)\,\delta\bar{r}_\nu = 0. \qquad (g)$$

Sčítanců v $\Sigma\Phi_\nu$ bude tolik, kolik je vazeb. Budiž jich počet k, a buďtež vesměs holonomní tvaru

$$\Phi_\mu(x_1, y_1, z_1, \ldots\ldots x_n, y_n, z_n) = 0. \qquad (h)$$

Ovšem nesmí si navzájem odporovati a musí býti navzájem nezávislé, ježto jinak by se číslo k zmenšilo o počet nezávislých vztahů, které by bylo lze mezi Φ_μ nalézti. Ježto virtuální posunutí musí hověti těmto podmínkám, můžeme napsati k vztahů tvaru*)

$$\frac{\partial\Phi_\mu}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial\Phi_\mu}{\partial y_1}\delta y_1 + \frac{\partial\Phi_\mu}{\partial z_1}\delta z_1 + \ldots\ldots + \frac{\partial\Phi_\mu}{\partial y_n}\delta y_n + \frac{\partial\Phi_\mu}{\partial z_n}\delta z_n = 0, \quad (i)$$

čili kratčeji

$$\delta\bar{r}_1 \,.\, \nabla_1\Phi_\mu + \delta\bar{r}_2 \,.\, \nabla_2\Phi_\mu + \ldots\ldots + \delta\bar{r}_n \,.\, \nabla_n\Phi_\mu = 0, \qquad (j)$$

nebo ve tvaru součtu

$$\sum_{\nu=1}^{n} \delta\bar{r}_\nu \,.\, \nabla_\nu\Phi_\mu = 0. \qquad (k)$$

Snad trochu poslouží myšlení následující obraz: Věc se má stejně, jako by šlo o n bodů v $3n$-rozměrném prostoru, které musí ležeti stále na k daných plochách, takže jejich posunutí musí býti v těchto plochách, na nichž síly od vázanosti jsou kolmé.

Virtuální posunutí musí hověti tedy k napsaným podmínkám tvaru (j), resp. (k). Měli bychom je odtud vypočísti a pak dosaditi do (b). Řešení však učiníme symetrickým, užijeme-li zase Lagrangeových neurčitých součinitelů λ_μ v počtu k, jimiž rovnice (j) znásobíme a pak k (b) přičteme. Výsledkem jest

$$\sum_{\nu=1}^{n}(\bar{F}_\nu + \bar{f}_\nu + \sum_{\mu=1}^{k}\lambda_\mu \,.\, \nabla_\nu\Phi_\mu)\,\delta\bar{r}_\nu = 0, \qquad (l)$$

což jest rovnice totožná s (g) a obdobná s (55 f).

Zde jsou $\delta\bar{r}_\nu$ úplně libovolná a proto se musí každý uzávorkovaný člen o sobě rovnati nule.**) Píšeme-li souřadnicové složky veškerých

*) Kdyby v podmínkách byl také explicitně obsažen čas, nesmí se varirovati a (i) zůstanou nezměněna, skutečná posunutí nejsou totožná s virtuálními (bezčasovými). (Srov. pozn. na konci § 55.)

**) Kdybychom byly závorky kartézsky rozepsali (dle (m)) již v (l), museli bychom usuzovati takto: $\lambda_1 \ldots \lambda_k$ jsou úplně libovolná; mezi $\delta x_1 \ldots \delta z_n$, jichž jest $3n$ je k podmínek (h), a můžeme tedy $3n - k$ z nich považovati za neodvislé, k pak za odvislé. Zvolíme nyní k faktorů λ tak, aby uzávorkované

explicitních (jak vnějších tak vnitřních) sil X_ν, Y_ν, Z_ν, obdržíme $3n$ rovnic tvaru

$$\begin{aligned} X_\nu + \lambda_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_\nu} + \ldots\ldots + \lambda_k \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_\nu} &= 0, \\ Y_\nu + \lambda_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_\nu} + \ldots\ldots + \lambda_k \frac{\partial \Phi_k}{\partial y_\nu} &= 0, \\ Z_\nu + \lambda_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_\nu} + \ldots\ldots + \lambda_k \frac{\partial \Phi_k}{\partial z_\nu} &= 0, \end{aligned} \qquad (m)$$

$$\text{pro } \nu = 1, \ldots\ldots n.$$

Vskutku stačí těchto $3n$ rovnic spolu s k rovnicemi tvaru (h), aby se z nich určilo za daných (vnějších a vnitřních) explicitních sil jednak k neurčitých faktorů $\lambda_1, \ldots \lambda_k$, jednak $3n$ souřadnic $x_1, \ldots z_n$. Stačí tedy k určení polohy rovnovážné.

Z našich vývodů vysvítá, že nutně musí $m < 3n$, neboť kdyby $m = 3n$, pak by podmínkami byla poloha všech n bodů úplně určena. Počet $3n - m$ jest počet stupňů volnosti soustavy bodové.

Jedná-li se o soustavu tuhou, můžeme v (l) vynechati vnitřní síly $\bar{f}_\nu$, o nichž víme, že při žádném posunutí nekonají práce; $X_\nu, \ldots$ by pak byly složky vnějších sil. Ale jest stejně patrno, že jsme mohli soustavu tuhou považovati za zvláštní případ soustavy s vazbami, nahrazujíce síly vnitřní bez přímého důkazu o nich podmínkami tvaru

$$(x_\nu - x_\mu)^2 + (y_\nu - y_\mu)^2 + (z_\nu - z_\mu)^2 = r_{\nu\mu}^2.$$

Kdybychom takovéto podmínky vypsali pro veškeré dvojice hmotných bodů, bylo by jich $\frac{1}{2}(n-1)n$, tedy za $n > 7$ více než $3n$, z čehož je patrno, že nejsou navzájem nezávislé. Jedná se o to, kolik je takových nezávislých podmínek tuhosti soustavy. Zvolme tři body tělesa tuhého, jež neleží na téže přímce a charakterisujme jejich vzájemnou polohu třemi vzdálenostmi $r_{12} = C_1$, $r_{13} = C_2$, $r_{23} = C_3$. Neproměnnou polohu každého dalšího bodu ν vůči těmto třem charakterisujeme pak třemi vzdálenostmi $r_{\nu 1}$, $r_{\nu 2}$, $r_{\nu 3}$ od nich, takže podmínek tuhosti jest $k = (n-3) \cdot 3 + 3 = 3n - 6$. Má tedy tuhá, ale jinak úplně volná soustava šest stupňů volnosti, jak později uvidíme, tři navzájem nezávislé složky translace a tři rotace kol os navzájem kolmých.

77. Princip d'Alembertův.

Pohybová rovnice hmotného bodu m_ν libovolné soustavy zní

$$m\ddot{\bar{r}}_\nu = \bar{F}_\nu + \bar{f}_\nu + \sum_\mu \Phi_{\nu\mu}. \qquad (a)$$

Zrychlení $\ddot{\bar{r}}_\nu$ bude právě následkem vazeb obecně jiné, než by týž bod měl, kdyby byl úplně volný a působily naň explicitní síly $F_\nu + f_\nu$. Nazveme-li sílu, která by způsobila skutečné zrychlení $\ddot{\bar{r}}_\nu$

členy tvaru (m) právě u těch odvislých $\delta x, \ldots$ byly nulami. Pak zůstává v (l) $3n - m$ závorek, z nichž každá je násobena zcela libovolně proměnnou veličinou $\delta x \ldots \delta z$. Musí se tedy také tyto ostatní uzávorkované členy rovnati nule, a obdržíme znovu (m).

u bodu úplně volného $\bar{F}'_\nu$, byla by dle Newtonovy pohybové rovnice

$$F'_\nu = m_\nu \ddot{\bar{r}}_\nu. \qquad (b)$$

Kdybychom tedy k silám působícím přidali fiktivní sílu $-F'_\nu$, nebylo by zrychlení, nová soustava sil $F_\nu + f_\nu + \Phi_\nu - F'_\nu$ by tvořila rovnovážnou soustavu silovou u bodu zcela volného, na níž lze užíti principu virtuálních prací a psáti, dosadíme-li za F'_ν z (b)

$$\sum_\nu (\bar{F}_\nu + \bar{f}_\nu + \sum_\mu \bar{\Phi}_{\nu\mu} - m\ddot{\bar{r}}_\nu)\,\delta\bar{r}_\nu = 0, \qquad (c)$$

kdež jsou $\delta\bar{r}_\nu$ posunutí zcela libovolná.

Považujeme-li $\delta\bar{r}_\nu$ za posunutí virtuální, k jichž určení slouží k rovnic ($78h$) resp. ($76k$), a předpokládáme-li, že také za pohybu je virtuální práce sil z vázanosti rovna nule, čili

$$\sum_\nu (\delta\bar{r}_\nu \,.\, \sum_\mu \bar{\Phi}_{\nu\mu}) = 0, \qquad (d)$$

můžeme psáti D'Alembertův princip ve tvaru Lagrangeově

$$\sum_\nu (\bar{F}_\nu + \bar{f}_\nu - m_\nu\ddot{\bar{r}}_\nu)\,\delta\bar{r}_\nu = 0, \qquad (e)$$

k němuž ovšem přistupují rovnice ($76\,h$, resp. k).

Slovy můžeme jej vyjádřiti podobně jako v § 56: „Při pohybu libovolné hmotné soustavy tvoří síly explicitní spolu se silami od setrvačnosti rovnovážnou soustavu silovou.“ Ve starší terminologii nazývala se záporná výslednice sil z vázanosti $-\Phi_{\nu\mu}$ silou ztracenou. Bylo by tedy výrokem ekvivalentním s (e) a vyjadřujícím (d), jež je kořenem principu D'Alembertova (Hamel jej nazývá principem Lagrangeovým): Virtuální práce ztracených sil je rovna nule. anebo, ztracené síly tvoří rovnovážnou soustavu silovou.

U tělesa tuhého přesně, a nad to přibližně i u soustav, kde vnitřní síly jsou tak nesmírně nepatrné, že je lze vůči vnějším zanedbati, lze v (e) vynechati $\bar{f}_\nu$.

V následujícím pojmeme je v jedno s $\bar{F}_\nu$ souborným názvem sil explicitních. Jsou-li složky těchto sil dle os X, Y, Z, lze rozepsati (e) v kartézský tvar

$$\sum_{\nu=1}^{n} [(X_\nu - m_\nu\ddot{x}_\nu)\,\delta x_\nu + (Y_\nu - m_\nu\ddot{y}_\nu)\,\delta y_\nu + (Z_\nu - m_\nu\ddot{z}_\nu)\,\delta z_\nu] = 0, \qquad (f)$$

kde ovšem δx_ν, δy_ν, δz_ν, stejně jako v (e) $\delta\bar{r}_\nu$ musí býti virtuální, s vazbami ($76h$, i) srovnatelná.

Postupem zcela stejným jako v paragrafu předcházejícím dojdeme z (c) k rovnicím

$$m_\nu\ddot{\bar{r}}_\nu = \bar{F}_\nu + \bar{f}_\nu + \sum_{\mu=1}^{k} \lambda_\mu \,.\, V_\nu\Phi_\mu, \qquad (g)$$

nebo ve tvaru souřadnicovém

$$m_\nu \frac{d^2x_\nu}{dt^2} = X_\nu + \lambda_1 \frac{\partial\Phi_1}{\partial x_\nu} + \ldots + \lambda_k \frac{\partial\Phi_k}{\partial x_\nu}, \qquad (h)$$

a podobně pro y a z.

Rovnice (h), Lagrangeovy rovnice pohybové prvého tvaru, jichž jest $3n$ spolu s k rovnicemi ($76\,h$) řeší daný problém pohybový, dávajíce nám $x_1, \ldots z_n$ a $\lambda_1, \ldots \lambda_k$, ač ovšem rovnicemi diferenciálními.

Síly nárazové. Působí-li v dané bodové soustavě velmi veliká explicitní síla F_ν po velice krátký čas $t_1 - t_0$, nazýváme dle ($52\,a$)

$$\bar{G}_\nu = \int_{t_0}^{t_1} F_\nu dt \tag{i}$$

jejím nárazem. Představme si působení tak krátké, že nezmění znatelně konfiguraci bodů a rovněž ovšem ne virtuální posunutí. Pišme princip D'Alembertův, rozumějíce pod $\bar{F}_\nu$ veškeré síly explicitní, na m_ν působící, ve tvaru

$$\sum_\nu \bar{F}_\nu \delta \bar{r}_\nu = \sum_\nu m_\nu \ddot{\bar{r}}_\nu \delta \bar{r}_\nu = \sum_\nu m_\nu \dot{\bar{v}}_\nu \delta \bar{r}_\nu. \tag{j}$$

Integrací obdržíme za předpokladů výše zmíněných

$$\sum_\nu \delta \bar{r}_\nu \int_{t_0}^{t_1} \bar{F}_\nu dt = \sum_\nu \delta \bar{r}_\nu \,.\, m_\nu \int_{t_0}^{t_1} \dot{\bar{v}}_\nu dt = \sum \delta \bar{r}_\nu (m_\nu \bar{v}_\nu)_{t_0}^{t_1}.$$

Dosadíme-li (i) a za změnu (zvětšení) impulsu

$$m\bar{v}_{t_1} - m\bar{v}_{t_0} = \Delta m\bar{v}, \tag{k}$$

obdržíme tvar d'Alembertova principu

$$\sum_\nu (\bar{G}_\nu - \Delta m_\nu \bar{v}_\nu)\, \delta \bar{r}_\nu = 0, \tag{l}$$

nebo také

$$\sum \bar{G}_\nu \delta \bar{r}_\nu = \sum_\nu \Delta m_\nu \bar{v}_\nu \,.\, \delta \bar{r}_\nu = \Delta \sum_\nu m_\nu \bar{v}_\nu \,.\, \delta \bar{r}_\nu. \tag{m}$$

Že lze znamení Σ a Δ za stálých $\delta \bar{r}$ přemístiti, přesvědčíme se snadno rozepsáním. Marcolongo nazývá uzávorkované členy v (l) obdobně ztraceným silám ztracenými impulsy; dle (l) tvoří soustavu rovnovážnou.

*78. Lagrangeovy rovnice druhého tvaru: Předpoklady.

V prvém tvaru Lagrangeových rovnic bylo k řešení pohybových problémů soustavy o $h = 3n - k$ stupních volnosti potřebí $3n + k$ rovnic. Sama sebou se nabízí otázka, není-li lze vystačiti s počtem menším. Lze totiž dokázati, že lze soustavu o h stupních volnosti úplně určiti h na sobě nezávislými údaji (délkami, úhly a pod.) q_λ, kde $\lambda = 1, \ldots\ldots h$, jež se nazývají obecné (generalisované, nebo Lagrangeovy) souřadnice soustavy.

Okamžitá hodnota polohového vektoru $\bar{r}_\nu$ závisí ovšem jednak na jeho hodnotě $\bar{r}_0$, která mu přísluší v jisté normální konfiguraci soustavy a která tedy jest stálá, na čase nezávislá, jednak na okamžitých, s časem proměnných hodnotách obecných souřadnic.

Jest tedy

$$\bar{r}_\nu = \bar{r}_\nu (\bar{r}_0, q_1, q_2, \ldots q_h, t). \tag{a}$$

Vystupuje-li čas explicite, jak je napsáno, a nikoli jenom v časově proměnlivých q implicite, má to ten význam, že i když q se nezmění, může nastati z vnějška vnucený pohyb soustavy $\frac{\partial \bar{r}_\nu}{\partial t} \gtrless 0$. U takovéto (rheonomní, viz § 55) soustavy jsou skutečné změny polohy bodu dány

$$d\bar{r} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_1} dq_1 + \ldots\ldots + \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_h} dq_h + \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} dt. \qquad (b)$$

Již zde a také v dalším postupu nebudeme psáti indexy ν u veličin $\bar{r}$, m, $\bar{v}$, $\bar{F}$ a indexy λ u q, Q, K, P, abychom nekomplikovali typografickou úpravu. U znamení součtových označíme příslušným indexem, zdali má ν proběhnout hodnoty $1, \ldots n$, nebo λ od 1 do h.

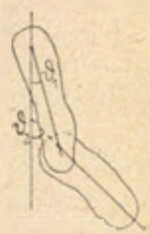
Virtuální změna polohy individuálního bodu m_ν jest naproti (b) taková, že může za každé okamžité konfigurace soustavy býti myšlena bezčasově provedenou; proto δt nemá smyslu a z

$$\bar{r} + \delta\bar{r} = \bar{r}(\bar{r}_0, q_1 + \delta q_1, \ldots\ldots, q_h + \delta q_h, t)$$

plyne rozvojem dle Taylorovy řady a dosazením (a)

$$\delta\bar{r} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_1} \delta q_1 + \ldots\ldots + \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_h} \delta q_h = \sum_\lambda \frac{\partial \bar{r}}{\partial q} \delta q. \qquad (c)$$

U soustav rheonomních jest změna tato různá od skutečné. U soustav skleronomních, kde v (a) nevystupuje explicitně čas, je každá změna skutečná zároveň virtuální — ač ne naopak.



Obr. 69.

Fysické kyvadlo s pevnou osou jest příkladem skleronomní soustavy o jediném stupni volnosti; za obecnou souřadnici můžeme voliti odklon od polohy svislé. Pohybuje-li se stativ, nesoucí osu kyvadla, daným způsobem, jedná se o rheonomní soustavu s jedním stupněm volnosti. Nejznámějším příkladem skleronomní soustavy o dvou stupních volnosti jest dvojkyvadlo (obr. 69), jehož obecnými souřadnicemi volíme úhly ϑ_1 a ϑ_2.

Abychom v dalším postupu nerušili chod důkazu, odvodíme na tomto místě některé matematické vztahy, jichž budeme potřebovati. Z (b) plyne výraz pro rychlost bodu m_ν

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \ldots\ldots + \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_h} \dot{q}_h + \frac{\partial \bar{r}}{\partial t}. \qquad (d)$$

Poslední člen ovšem u skleronomních soustav odpadá. Rychlost jest, jak patrno, lineární (a u skleronomních soustav homogenní) funkce veličin $\dot{q}_\lambda$, které zveme rychlostmi obecnými.

Z (d) plyne částečnou diferenciací, kde $\dot{q}_\lambda$, q_λ i t považujeme za neodvisle proměnné

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial \dot{q}_\lambda} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_\lambda}. \qquad (e)$$

Kinetická energie soustavy (71 b')

$$T = \tfrac{1}{2} \sum_\nu m\bar{v}^2 = T(q_\lambda, \dot{q}_\lambda, t) \qquad (f)$$

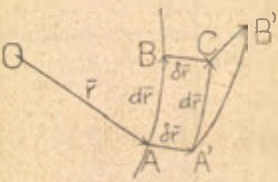
jest, jak patrno, kvadratickou (a u skleronomních soustav homogenní) funkcí obecných rychlostí $\dot{q}_\lambda$ a vedle toho ovšem funkcí obecných souřadnic q_λ, které se v (d) vyskytují jakožto faktory u $\dot{q}_\lambda$. Její virtuální změna jest, píšeme-li zhuštěně,

$$\delta T = \sum_\nu m\bar{v} \cdot \delta\bar{v} = \sum_\lambda \frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q} + \sum_\lambda \frac{\partial T}{\partial q}\delta q. \qquad (g)$$

Patrně můžeme přepsati

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\lambda} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_\lambda}\left(\tfrac{1}{2}\Sigma m\bar{v}^2\right) = \sum_\nu m\bar{v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \dot{q}_\lambda}, \qquad (h)$$

kdež ovšem při diferenciaci kinetické energie v druhém tvaru (f) jest všechna ostatní $\dot{q}$, všechna q a t považovati za veličiny stálé.



Obr. 70.

Jest nutno zmíniti se blíže o rozdílu mezi operacemi d a δ, jež odlišujme jmény diferenciace a variace. Prvou, d, vztahujeme k skutečné v čase nastávající změně, druhou, δ, k změnám, jež můžeme v kterémkoli okamžiku mysliti provedeny a které se srovnávají s podmínkami soustavy. Tak na př. je-li $\overline{AB}$ skutečná dráha hmotného bodu v čase dt, jest vektor $\overline{AB} = d\bar{r}$. Přiřadíme-li skutečné této dráze dráhu změněnou $\overline{A'B'}$, takže bodu A je přiřaděn A', a B podobně B', a označíme-li proces přiřaďování značkou δ, můžeme říci: Stejně jako k $\overline{OA}$ je přiřaděno $\overline{OA'}$, je k $\overline{OB}$ přiřaděno $\overline{OB'}$; to jest

$$\overline{OA} = \bar{r}, \qquad \overline{OA'} = \bar{r} + \delta\bar{r},$$
$$\overline{OB} = \bar{r} + d\bar{r}, \qquad \overline{OB'} = (\bar{r} + d\bar{r}) + \delta(\bar{r} + d\bar{r}) = \bar{r} + d\bar{r} + \delta\bar{r} + \delta d\bar{r}.$$

Ale můžeme též říci takto: Stejně jako $\overline{OA}$ se s časem změnilo na $\overline{OB}$, změnilo se $\overline{OA'}$ na $\overline{OB'}$, čili

$$\overline{OA} = \bar{r}, \qquad \overline{OB} = \bar{r} + d\bar{r},$$
$$\overline{OA'} = \bar{r} + \delta\bar{r}, \qquad \overline{OB'} = (\bar{r} + \delta\bar{r}) + d(\bar{r} + \delta\bar{r}) = \bar{r} + \delta\bar{r} + d\bar{r} + d\delta\bar{r}.$$

Ježto oběma cestami $OABCB'$ i $OAA'CB'$ musíme dojíti do téhož bodu B', přiřaděného bodu B, plyne, že oba výrazy pro vektor $\overline{CB'}$ musí býti totožné, čili že musí

$$d\delta\bar{r} = \delta d\bar{r} \quad \text{a podobně} \quad d\delta q = \delta dq. \qquad (i, j)$$

Jedná-li se o změny bezčasové, přiřaďujeme-li A' k A v témž čase t, a nikoli A' v čase $t + \delta t$ k A v čase t, a podobně B' k B v témž okamžiku $t + dt$ a nikoli v okamžiku $t + dt + \delta t + \delta dt$, musí také

$$\frac{d}{dt}\delta\bar{r} = \delta\frac{d\bar{r}}{dt} \quad \text{a} \quad \frac{d}{dt}\delta q = \delta\frac{dq}{dt}. \qquad (k, l)$$

Jest totiž obecně, ježto varirování se provádí stejně jako diferencování *)

*) Důkaz toho najde se v kterékoliv učebnici vyšší analyse. Tamže důkaz, že integrál variace se rovná variaci integrálu, pokud jsou meze integrálu stálé.

$$\delta \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{dt\,\delta\,d\bar{r} - d\bar{r}\,\delta\,dt}{dt^2} \tag{m}$$

a ježto operace δ se dle našeho ustanovení nemá týkati času, musí $\delta t = 0$, $\delta dt = 0$, a nacházíme, dosadivše (i), vzorec (k). Předchozí (j) obdržíme nejjednoduševji, rozepíšeme-li v (i) $\bar{r} = \bar{\imath}x + \bar{\jmath}y + \bar{k}z$, takže obdržíme

$$d\delta x = \delta dx, \qquad d\delta y = \delta dy, \qquad d\delta z = \delta dz. \tag{n}$$

Ke q přejdeme, obrátíme-li funkcionální závislost rovnic z (a) samozřejmých

$$x_\nu = x_\nu(q_1, q_2, \ldots q_h, t),$$

a podobně pro y a z na

$$q_\lambda = q_\lambda(x_1, y_1, z_1, \ldots x_h, y_h, z_h, t),$$

a provedeme-li pak skutečně operace $d\delta q$ a δdq se zřením na (n).

Přímo mohli bychom zjistiti pomocí (b) a (c), že k platnosti (j) se musí předpokládati platnost (l).

*79. Lagrangeovy rovnice druhého tvaru: Odvození.

Napišme nyní D'Alembertův princip ve tvaru

$$\sum_\nu m \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\delta\bar{r} = \sum_\nu \bar{F}\delta\bar{r}. \tag{a}$$

Dosadíme-li za $\delta\bar{r}$ výraz (78c), přejde tato rovnice v totožnou

$$\sum_\lambda K_\lambda \delta q_\lambda = \sum_\lambda Q_\lambda \delta q_\lambda, \tag{b}$$

kde

$$K_\lambda = \sum_\nu m \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\frac{\partial\bar{r}}{\partial q_\lambda} \quad \text{a} \quad Q_\lambda = \sum_\nu \bar{F}\frac{\partial\bar{r}}{\partial q_\lambda}. \tag{c}$$

Rovnice (b) se pro vzájemnou nezávislost δq rozpadá na h rovnic, které vlastně již řeší problém pohybový žádaným minimálním počtem rovnic. Známe-li totiž soustavu, to jest explicitní síly $\bar{F}_\nu$ a vztahy (78a), můžeme dle (c) určiti všechna Q_λ; K_λ pak nalezneme jakožto explicitní funkce těch $q, \dot{q}, \ddot{q}, t$, vytvoříme-li derivací ze (78d) výrazy $\dot{\bar{v}}_\nu = \ddot{\bar{r}}_\nu$. Lagrange však udal pro vytvoření těchto K_λ daleko elegantnější a velmi často i daleko pohodlnější metodu, uživ výrazu pro kinetickou energii soustavy.

Výrazy Q_λ nazýváme obecnými (generalisovanými, Lagrangeovými) silami, ač vlastně nemají vždy fysikální dimensi sil. Z identity

$$\sum_\lambda Q_\lambda \delta q_\lambda = \sum_\nu \bar{F}_\nu \delta\bar{r}_\nu = \delta A \tag{d}$$

plyne totiž pouze, že výrazy $Q\delta q$ musí míti rozměr práce. Jest tedy Q_λ silou, je-li příslušná obecná souřadnice q_λ délkou; je-li na př. úhlem, jenž dimense nemá, musí Q mít dimensi síla $\times$ délka čili otáčivý moment.

Abychom vypočetli K_λ, napišme rovnici, jejíž správnost jest samozřejmá:

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_\nu m\frac{d\bar{r}}{dt}\delta\bar{r}\right)=\sum_\nu m\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\delta\bar{r}+\sum m\frac{d\bar{r}}{dt}\frac{d}{dt}\delta\bar{r}. \qquad (e)$$

Diskutujme jednotlivé členy: Prvý výraz pravé strany jest dle (*a*) a (*d*) $\sum_\lambda Q\delta q$.

V druhém výraze téže strany dosaďme (78 *k*), takže jej lze přepsati na virtuální změnu kinetické energie δT. Takto psanou rovnici (*e*) nazývá Heun „Lagrangeovou rovnicí centrální".

Nyní přetvoříme stranu levou. Dosaďme do uzávorkovaného výrazu za $\delta\bar{r}$ dle (78 *c*) a obdržíme

$$\sum_\nu m\frac{d\bar{r}}{dt}\delta\bar{r}=\sum_\lambda P_\lambda\delta q_\lambda, \qquad (f)$$

kde

$$P_\lambda=\sum_\nu m\frac{d\bar{r}}{dt}\frac{\partial\bar{r}}{\partial q_\lambda}=\sum_\nu m\bar{v}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\dot{q}_\lambda}\equiv\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_\lambda}. \qquad (g)$$

Při tom jsme užili vztahů (78 *e*) a (78 *h*). Levá strana (*e*) bude dosazením (*f*) zníti

$$\frac{d}{dt}\sum_\lambda P\delta q=\sum_\lambda\frac{dP}{dt}\delta q+\sum_\lambda P\frac{d}{dt}\delta q,$$

čili použijeme-li vztahů (*g*) a (78 *l*),

$$\sum_\lambda\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}}\delta q+\sum_\lambda\frac{\partial T}{\partial\dot{q}}\delta\dot{q}. \qquad (h)$$

Dosadíme-li nyní na obou stranách, rozepsavše δT na straně pravé dle (78 *g*), zruší se členy s faktorem $\delta\dot{q}$ a všude vystupují jen faktory δq. Pro jejich vzájemnou nezávislost rozpadnou se součty na *h* rovnic

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_\lambda}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_\lambda}=Q_\lambda, \qquad (i)$$

jež právě jsou Lagrangeovy rovnice druhého tvaru.

Používáme-li rovnic (*i*), sluší míti na paměti toto: Kinetickou energii T jest vyjádřiti jakožto funkci obecných souřadnic q, obecných rychlostí $\dot{q}$ a po případě času t. Při derivaci dle q_λ (resp. $\dot{q}_\lambda$) jest pokládati všechna ostatní q (resp. $\dot{q}$), všechna $\dot{q}$ (resp. q) i t za stálé, při derivaci dle času však všechna q i $\dot{q}$ za funkce času. Obecnou složku silovou Q_λ zjistíme buď dle (*c*) nebo přímo, stanovíme-li práci $Q_\lambda\,\delta q_\lambda$ při virtuální, nekonečně malé změně δq_λ jediné příslušné souřadnice.

Síly konservativní. Jsou-li síly F_ν vesměs konservativní, t. j. dají-li se derivovati z potenciálu, zjednoduší se tvar rovnic (*i*). Pak jest totiž

$$F_\nu=-\operatorname{grad}_\nu U\equiv-\nabla_\nu U\equiv-\frac{\partial U}{\partial\bar{r}_\nu},$$

kde celková potenciální energie soustavy U závisí sice ode všech $\bar{r}_\nu$ a nejvýše ještě na čase t, nikoli však na rychlostech $\dot{\bar{r}}_\nu$. Pak jest dle (71 *b*, *d'*) virtuální práce

$$\delta A = \sum_\nu \bar{F}\delta\bar{r} = -\sum \frac{\partial U}{\partial \bar{r}}\delta\bar{r} = -\delta U.$$

Dle (*d*) jest

$$\sum_\lambda Q\delta q = -\delta U = -\sum_\lambda \frac{\partial U}{\partial q}\delta q, \quad \text{takže} \quad Q_\lambda = -\frac{\partial U}{\partial q_\lambda}. \qquad (j)$$

Dosazením do (*i*) plyne tudíž

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\lambda}\right) = \frac{\partial (T-U)}{\partial q_\lambda}. \qquad (k)$$

Dle předpokladu však nezávisí U na rychlostech $\dot{q}$, takže $\frac{\partial U}{\partial \dot{q}} = 0$, a můžeme tento člen nezávadně se znamením záporným připojiti k $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}$ na levé straně a psáti místo (*k*)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\lambda}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_\lambda}, \quad \text{kde} \quad L = T - U. \qquad (l)$$

Veličině L se přikládává zvláštní název kinetický potenciál (Helmholtz) nebo Lagrangeova funkce. Jest na místě poukaz na rozdíl mezi ním a celkovou energií soustavy, jež jest rovna $E = T + U$.

Síly nárazové. Lagrangeovy rovnice pro nárazové síly odvodíme velmi snadno, dosadíme-li do rovnice (77 *m*) za virtuální posunutí výrazy (78 *c*). Pro vzájemnou nezávislost všech δq_λ rozpadnou se na h rovnic tvaru

$$\Delta \sum_\nu m\bar{v}\frac{\partial \bar{r}}{\partial q} = \sum_\nu \bar{G}\frac{\partial \bar{r}}{\partial q} = \sum_\nu \int_{t_0}^{t_1} \bar{F}\frac{\partial \bar{r}}{\partial q}dt, \qquad (m)$$

jež pomocí (*g*) a (*c*) můžeme přepsati na

$$\Delta\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\lambda} = H_\lambda, \quad \text{kde} \quad H_\lambda = \int_{t_0}^{t_1} Q_\lambda dt. \qquad (n)$$

Srovnejme analogický tvar impulsu (65 *d*)

$$\bar{I} = \sum_\nu m\bar{v} = \frac{\partial T}{\partial \bar{v}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\bar{r}}} \quad \text{a} \quad P_\lambda = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\lambda}. \qquad (o)$$

Z toho důvodu nazýváme P_λ obecným impulsem v souřadnici q_λ; H_λ můžeme zváti obecným nárazem nebo obecnou silou nárazovou a pak se věta (*n*) vyjádří velmi jednoduše slovy: Prostá změna obecného impulsu rovná se obecné síle nárazové. Jest jak patrno velmi úzce analogická oběma větám impulsovým (65 *i*) a (68 *h*).

*80. Lagrangeovy rovnice druhého tvaru: Dodatky.

Odvození Lagrangeových rovnic, jak jsme je podali, nebylo právě nejkratčí. Chtěli jsme však, aby všechny učiněné předpoklady byly vytčeny co nejzřejměji a dále, aby bylo patrno, že platí také pro soustavy rheonomní. Proto jsme v podstatě sledovali postup Hamelův, jehož kniha ostatně je po našem vědomí jediná z německých (nehledíme-li na velmi obšírné vývody Boltzmannovy), která k této okolnosti přihlíží.

Jinak zpravidla se přihlíží pouze k soustavám skleronomním a parafrazuje se jednoduchý způsob odvození, který udal Sir R. Ball (Proc. Irish Acad. sv. II, 1875—1877). Hned rovnice (79 *c*) se rozdělí na *h* rovnic $Q_\lambda = K_\lambda$ čili

$$Q_\lambda = \sum_\nu m \frac{d\bar{v}}{dt} \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_\lambda} = \sum_\nu m \frac{d}{dt}\left(\bar{v} \frac{\partial \bar{r}}{\partial q_\lambda}\right) - \sum_\nu m\bar{v} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial q_\lambda}\right).$$

O členech pravé strany se snadno dokáže, že jsou rovny v (79 *i*) napsaným derivacím kinetické energie, vyjádřené jakožto funkce souřadnic q a rychlostí $\dot{q}$.

Abychom ukázali na nejjednodušších příkladech užívání rovnic Lagrangeových, aplikujme je na pohyb úplně volného hmotného bodu m v místě $\bar{r} = \imath x + \jmath y + kz$, na nějž působí síla $F = \imath X + \jmath Y + kZ$. Za Lagrangeovy souřadnice zvolme $q_1 = x$, $q_2 = y$, $q_3 = z$. Kinetická energie je $T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$, takže

$$P_1 = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \qquad \frac{dP_1}{dt} = m\ddot{x}, \qquad \frac{\partial T}{\partial q_1} = \frac{\partial T}{\partial x} = 0.$$

Obecná síla Q_1 jest patrně X_1, neboť při posunutí $\delta q_1 = \delta x$ je práce $X\delta x$. Dosazením do (79 *i*) obdržíme

$$m\ddot{x} = X,$$

a stejně pro y a z. Výsledkem jsou, jak nutno, Newtonovy pohybové rovnice v kartézských souřadnicích.

Podruhé odvoďme rovnici pro matematické kyvadlo, kde (obr. 56) je obecnou souřadnicí úhel α, tedy $q = \alpha$. Více stupňů volnosti nebudiž. Vnější síla jest $F = m\bar{g}$. Rychlost hmotného bodu je $l\dot{\alpha}$, tedy $T = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\alpha}^2$. Z toho

$$P = \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} = ml^2\dot{\alpha}, \quad \dot{P} = ml^2\ddot{\alpha}, \quad \frac{\partial T}{\partial \alpha} = 0.$$

Při obecné změně $\delta\alpha$ je posunutí $l\delta\alpha$ a práce $Q\delta\alpha = -mgl \sin\alpha \,.\, \delta\alpha$, takže $Q = -mgl\sin\alpha$. Dosazením zní Lagrangeova rovnice

$$ml^2\ddot{\alpha} = -mgl\sin\alpha, \qquad \text{čili} \qquad \ddot{\alpha} = -\frac{g}{l}\sin\alpha,$$

což není než (57 *h*).

Konečně odvodíme rovnice pohybové pro kyvadlo sférické, kde máme dva stupně volnosti a za obecné souřadnice volíme $q_1 = \alpha$, $q_2 = \beta$ (obr. 59).

Rychlosti v těchto souřadnicích jsou $l\dot{\alpha}$ a $l\sin\alpha.\dot{\beta}$ a stojí navzájem kolmo, takže $T=\frac{1}{2}ml^2\dot{\alpha}^2+\frac{1}{2}ml^2\sin^2\alpha.\dot{\beta}^2$. Máme tedy:

$$P_1=\frac{\partial T}{\partial\dot{\alpha}}=ml^2\dot{\alpha},\quad \dot{P}_1=ml^2\ddot{\alpha},\quad \frac{\partial T}{\partial\alpha}=ml^2\sin\alpha\cos\alpha\,\dot{\beta}^2,$$

$$P_2=\frac{\partial T}{\partial\dot{\beta}}=ml^2\sin^2\alpha\,\dot{\beta},\quad \dot{P}_2=ml^2\sin^2\alpha\ddot{\beta}+2ml^2\sin\alpha\cos\alpha\,\dot{\alpha}\,\dot{\beta}.$$

Obecné síly určíme zase z prací. Síla Q_1 jest patrně táž jako v případě předchozím. Práce při změně $\delta\beta$ jest rovna nule, neboť posunutí $l\sin\alpha.\delta\beta$ stojí kolmo na $\bar{F}=m\bar{g}$. Jest tedy $Q_2=0$ a dosazením do (79i) máme hledané rovnice

$$ml^2\ddot{\alpha}-ml^2\sin\alpha\cos\alpha\,\dot{\beta}^2=-mgl\sin\alpha,$$
$$ml^2\sin^2\alpha\,\ddot{\beta}+2ml^2\sin\alpha\cos\alpha\,\dot{\alpha}\,\dot{\beta}=0. \qquad (a)$$

V § 58 řešili jsme zvláštní případ $\alpha=\alpha_1=\text{const}$, $\dot{\alpha}=0$ (kyvadlo konické), pro nějž přejdou rovnice (d) v

$$\dot{\beta}^2 l\cos\alpha_1=g,\quad \ddot{\beta}=0,\quad \text{čili}\quad \dot{\beta}=\omega_1=\text{const}$$

a tedy
$$\frac{2\pi}{\omega_1}=2\pi\sqrt{\frac{l\cos\alpha_1}{g}},$$

jak jsme nalezli v (58h).

V obou posledních případech mohli jsme sílu Q_1 nalézti derivací z potenciálu, neboť potenciální energie bodu m jest dle (76f) a obr. 59 až na konstantu dána součinem

$$mg\,.\,O_1A=mgl(1-\cos\alpha)=U,$$

a tedy
$$Q_1=-\frac{dU}{d\alpha}=-mgl\sin\alpha.$$

Kdybychom pokládali l za třetí obecnou souřadnici, jednalo by se o bod v prostoru úplně volný, určený souřadnicemi polárními. Ke kinetické energii T přistoupil by člen $\frac{1}{2}m\dot{l}^2$ a velmi snadno bychom obdrželi levé strany rovnic obdobných (a). Strany pravé ovšem závisí od zvláštních daných sil.

Jakožto ukázku výpočtu obecných sil dle vzorce (79c) vyhledejme, jak by vypadaly pravé strany rovnic (a), kdyby hmota m v bodě M (obr. 59) podléhající tíži $m\bar{g}$ byla vedle toho odpuzována od bodu A silou, jež jest jakousi funkcí vzdálenosti $AM=s=2l\sin\frac{\alpha}{2}$. Kdyby to byl obrácený kvadrát, můžeme mysliti na nabité elektrické kyvadélko, zavěšené nad malou, elektrickým nábojem opatřenou kuličkou v A. Pišme obecně sílu na bod m

$$\bar{F}=\psi(s)\,.\,\bar{s}^0-mg\bar{k}=\bar{i}X+\bar{j}Y+\bar{k}Z.$$

Průmětem $\bar{F}$ na osu vertikální plyne $Z=\psi(s)\,.\,\sin\frac{\alpha}{2}-mg$. Pak promítněme sílu $\bar{F}$ na O_1M a odtud na O_1X_1 i O_1Y_1, čímž obdržíme

$$X=\psi(s)\cos\frac{\alpha}{2}\cos\beta,\qquad Y=\psi(s)\cos\frac{\alpha}{2}\sin\beta.$$

Polohový vektor $\bar{r}$ měřme z bodu O, takže $\bar{r} = \bar{\imath}x + \bar{\jmath}y + \bar{k}z$, kde

$$x = l \sin\alpha \cos\beta, \qquad y = l \sin\alpha \sin\beta, \qquad z = -l \cos\alpha.$$

Ve vzorci (79c) potřebujeme

$$\frac{\partial\bar{r}}{\partial q_1} = \frac{\partial\bar{r}}{\partial\alpha} = \frac{\partial\bar{r}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\alpha} + \frac{\partial\bar{r}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\alpha} + \frac{\partial\bar{r}}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial\alpha}$$

$$= \bar{\imath}l \cos\alpha \cos\beta + \bar{\jmath}l \cos\alpha \sin\beta + \bar{k}l \sin\alpha,$$

ježto

$$\frac{\partial\bar{r}}{\partial x} = \bar{\imath}, \qquad \frac{\partial\bar{r}}{\partial y} = \bar{\jmath}, \qquad \frac{\partial\bar{r}}{\partial z} = \bar{k}.$$

Stejně vypočteme $\frac{\partial\bar{r}}{\partial q_2} = \frac{\partial\bar{r}}{\partial\beta}$. Dle předpisu (79c) a pravidla o skalárním součinu je pak

$$Q_1 = Xl \cos\alpha \cos\beta + Yl \cos\alpha \sin\beta + Zl \sin\alpha,$$

kam nutno dosaditi hodnoty za X, Y, Z. Stejně vypočteme hodnotu Q_2 jakožto složitý výraz, který se však rovněž jako Q_1 značně dá zjednodušiti.

Z pojmu virtuálních prací bychom byli nalezli přímo

$$Q_1\delta\alpha = \varphi(s) \,.\, \cos\frac{\alpha}{2} \,.\, l\delta\alpha - mg \,.\, \sin\alpha \,.\, l\delta\alpha$$

$$Q_2\delta\beta = 0.$$

Jest viděti, že k dlouhému výpočtu dle (79c) jest radno se uchylovati jen v případě tom, když výpočet virtuálních prací nám skýtá přílišné obtíže. Zpravidla jest tomu naopak.

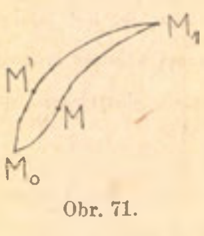
H a m i l t o n ů v k a n o n i c k ý t v a r p o h y b o v ý c h r o v n i c. Jenom krátkou zmínkou odbudeme, že Lagrangeovy rovnice se dají řadou čistě formálních transformací převésti, na tvar

$$\frac{\partial H}{\partial q_\lambda} = -\frac{dP_\lambda}{dt}, \qquad \frac{\partial H}{\partial P_\lambda} = +\frac{dq_\lambda}{dt}, \qquad H = T + U,$$

kde Hamiltonova principální funkce H není než energie soustavy vyjádřená jakožto funkce obecných souřadnic q_λ a obecných impulsů P_λ.

*81. Princip Hamiltonův.

Princip virtuálních posunutí v různých tvarech, které jsme uvedli, používá vedle pojmu variace virtuální, s vazbami srovnatelné, také pojmů síly a zrychlení a obsahuje tedy ve všech tvarech druhé derivace. W. R. H a m i l t o n uveřejnil v r. 1834 (Phil. Trans. Londýn 124) nový princip, který neobsahuje derivace vyšší prvých, a proto jest zvláště výhodný všude tam, kde se jedná o transformace souřadnic. Odvodíme jej cestou, která nám poskytne cenný výsledek vedlejší.



Obr. 71.

Mysleme si určitý stav soustavy v okamžiku t_0, daný polohovými vektory $\bar{r}_\nu$, tedy souřadnicemi $x_1, y_1, z_1, \ldots x_n, y_n, z_n$. Můžeme si jej mysliti charakterisován bodem M o těchto souřadnicích v prostoru $3n$-rozměrném. Všechny časově následující stavy budou pak podobně

dány body dalšími $M_1, M_2, \ldots$, které vzhledem k spojitosti souřadnic budou vyplňovati jistou křivku, jež bude znázorňovati veškeré skutečné časové změny a jejich průběh v soustavě. Mezi časy t_0 a t_1 budiž to křivka M_0M_1 (obr. 71). Tomuto skutečnému sledu stavů soustavy přiřaďme jiný nesmírně málo změněný (varirovaný), ale takový, že stav M_0, od něhož jsme v čase t_0 vyšli, a stav M_1, ku kterému jsme v čase t_1 přišli, jsou totožné. Stavu M v okamžiku t na charakteristice skutečné, který je dán $M(\bar{r}_1, \ldots \bar{r}_n)$, jest přiřaděn stav $M'(\bar{r}_1 + \delta\bar{r}_1, \ldots \bar{r}_n + \delta\bar{r}_n)$ v okamžiku obecně jiném $t + \delta t$. Variace rychlosti jest obecně (jako v (78 *m*)

$$\delta\frac{d\bar{r}_\nu}{dt} = \frac{dt\,d\delta\bar{r}_\nu - d\bar{r}_\nu d\delta t}{dt^2}, \qquad (a)$$

kde již jsme užili vztahu $\delta dt = d\delta t$, $\delta d\bar{r}_\nu = d\delta\bar{r}_\nu$, kdež však zatím nechceme klást δt a $d\delta t$ rovným nule.

Variaci kinetické energie obdržíme tedy obecně jakožto

$$\delta T = \sum_\nu m\frac{d\bar{r}}{dt}\delta\frac{d\bar{r}}{dt} = \sum_\nu m\frac{d\bar{r}}{dt}\frac{d\delta\bar{r}}{dt} - 2T\frac{d\delta t}{dt}. \qquad (b)$$

Z principu D'Alembertova (77 *e*) plyne, píšeme-li veškeré síly explicitní jakožto F a přepíšeme-li identicky pravou stranu

$$\sum_\nu F\delta\bar{r} = \frac{d}{dt}\sum_\nu m\frac{d\bar{r}}{dt}\delta\bar{r} - \sum m\frac{d\bar{r}}{dt}\frac{d\delta\bar{r}}{dt}. \qquad (c)$$

Strana levá je elementární práce virtuální $\delta' A$, která obecně není úplnou variací nějaké funkce, což jsme právě označili δ'. Za druhý člen pravé strany můžeme dosaditi z (*b*). Násobíme-li pak elementem časovým dt a integrujeme mezi konfiguracemi M_0 a M_1, t. j. časy t_0 a t_1, obdržíme

$$\int_{t_0}^{t_1}\delta' A\,dt + \int_{t_0}^{t_1}dt\left(\delta T + 2T\frac{d\delta t}{dt}\right) = 0. \qquad (d)$$

V (*d*) vypadl prvý člen pravé strany (*c*), ježto za obou časů t_0 a t_1 jsou dle předpokladu veškerá $\delta\bar{r} = 0$, takže

$$\Sigma m\frac{d\bar{r}}{dt}\delta\bar{r}\Big|_{t_0}^{t_1} = 0.$$

Výraz (*d*) lze nyní specifikovati dvěma různými způsoby. Především můžeme přiřaditi každému bodu M příslušný bod M' v témž okamžiku t, čili klásti variaci času $\delta t = 0$ a ovšem také $d\delta t = 0$. Pak vznikne z (*d*)

$$\int_{t_0}^{t_1}(\delta' A + \delta T) = 0. \qquad (e)$$

To jest o b e c n é z n ě n í H a m i l t o n o v a p r i n c i p u. Ještě se zjednoduší, jsou-li veškeré síly vtisknuté konservativní, neboť pak

$$\delta' A = -\delta U \quad \text{a} \quad \delta\int_{t_0}^{t_1}(T - U)\,dt = \delta\int_{t_0}^{t_1}L\,dt = 0. \qquad (f)$$

U jest ovšem potenciální energie soustavy. Při užívání (*e*) a (*f*) jest míti na paměti, že se čas nesmí varirovati a že stav skutečný a změněný jsou totožné v časech t_0 a t_1, ve kterých tedy veškeré variace se stanou rovné nulám.

Hamiltonův princip ve tvaru (*f*) praví tedy, že skutečný přechod soustavy z jednoho stavu do jiného děje se tak, že časový integrál kinetického potenciálu má hodnotu extrémní. Kdybychom dělili integrál stálou veličinou $t_1 - t_0$, značil by dle významu omezeného integrálu střední hodnotu rozdílu kinetické a potenciální energie, kteráž jest dle (*f*) minimem pro skutečný přechod z jedné konfigurace do jiné, srovnáváme-li jej s přechody jinými nekonečně blízkými (podobnými), jež by se mohly odehráti (na př. následkem vazeb) v téže době mezi týmiž konfiguracemi. Hodně volné vyjádření by bylo (Webster): Příroda se snaží střední potenciální a kinetickou energii během pohybu vyrovnati.

Nejdůležitější okolnost jest však ta, že v Hamiltonově principu nemáme žádného vztahu k určité soustavě souřadnic. Ježto pak se v něm vyskytují pouze prvé diferenciální poměry, dá se dle něho nejsnáze provésti proměna souřadnic.

Ukázkou odvodíme z něho Lagrangeovy rovnice druhého tvaru: Budiž soustava určena h obecnými souřadnicemi q_λ, λ od 1 do h, navzájem nezávislými. Jak víme ze (78*f*), má kinetická energie tvar $T(q_\lambda, \dot{q}_\lambda, t)$, takže variace její δT, kde $\delta t = 0$, jest dána (78*g*). Práci vnějších sil můžeme psáti $\delta' A = \sum_\lambda Q_\lambda \delta q_\lambda$, kde Q_λ má tvar (79*c*). Dosadíme-li vše to do (*e*), obdržíme

$$\int_{t_0}^{t_1} [\sum_\lambda (Q + \frac{\partial T}{\partial q}) \delta q + \sum_\lambda \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q}]\, dt = 0.$$

V posledním členu dle (78*l*)

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt} \delta q = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \delta q\right) - \delta q \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right).$$

Ale integrál úplného diferenciálu

$$\int_{t_0}^{t_1} d \sum_\lambda \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \delta q = 0,$$

ježto za obou mezí veškerá δq jsou nulami. Zbude tudíž

$$\int_{t_0}^{t_1} [\sum_\lambda (Q + \frac{\partial T}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}}) \delta q]\, dt = 0.$$

Veškerá dt jsou kladná; veškerá δq jsou libovolná, a mohli bychom je volit tak, aby výrazy v hranatých závorkách byly rovněž vesměs kladnými. Byly by tedy všechny elementy integrálu kladné a rovnice by nebyla splněna, kdyby výrazy v kulatých závorkách vesměs pro libovolné λ nebyly nulové. To jsou však Lagrangeovy rovnice (79*i*).

*82. Princip nejmenší akce. Všeobecné poznámky k principům.

Jen proto, že obecný vztah (81 d) dal se téměř stejně snadno odvoditi, jako jeho zvláštní případ, princip Hamiltonův, uvedeme ještě jeden z variačních principů, t. zv. **princip nejmenší akce nebo Maupertuisův.** Ve vzorci (81 d) můžeme totiž docíliti toho, že $\delta T = \delta' A$, takže se rovnice ta změní na

$$\int_{t_0}^{t_1} 2(\delta T dt + T d\delta t) = 0, \quad \text{čili} \quad \delta\int_{t_0}^{t_1} 2T dt = 0. \qquad (a)$$

Jest k tomu pouze potřebí, aby δT, to jest zvětšení kinetické energie při přechodu ze stavu M do varirovaného M' (obr. 71), se rovnalo práci vykonané při tom explicitními silami, jak to žádá princip zachování energie (71 c). Pak ovšem nemůžeme si mysleti oba stavy současnými, nýbrž přechod z jednoho do druhého vyžaduje času δt; také čas podléhá variaci, což jest podstatný rozdíl proti obvyklým posunutím virtuálním.

Princip nejmenší akce jenž jest právě rovnicí (a) vyjádřen, má zajímavou historii. Maupertuis jej r. 1740 vyslovil ve tvaru velmi nejasném, ba nesprávném, dovodiv jej z úvah rázu metafysického. Byl pak předmětem prudké kontroverse (také s Voltairem) a teprve Lagrange postavil jej na pevnou půdu.

Spekulacím Maupertuisovým odpovídá lépe tvar

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} \Sigma m\bar{v}d\bar{r} = 0,$$

který vzniká vhodným rozepsáním kinetické energie.

Píšeme-li v (a)

$$T = \tfrac{1}{2}\frac{\Sigma m d\bar{r}^2}{dt^2}, \quad \text{tedy} \quad 2Tdt = \sqrt{2T}\,.\,\sqrt{\Sigma m d\bar{r}^2}$$

a předpokládáme-li všechny síly konservativní, je dle (71 e) $T = E - U$, kde E je stálé. Pak obdržíme dosazením z (a) tvar Jacobiho

$$\delta\int\sqrt{E-U}\,\sqrt{\Sigma m d\bar{r}^2} = 0, \qquad (b)$$

z něhož explicitní čas vůbec vymizel. Meze integrálu jsou dány počáteční a konečnou konfigurací soustavy. Není-li vůbec explicitních sil, jest také U stálé a z (b) vznikne

$$\delta\int\sqrt{m d\bar{r}^2} = 0, \quad \text{neboli} \quad \delta\int ds = 0, \qquad (c)$$

nazýváme-li s Hertzem (Prinzipien der Mechanik) $M = \Sigma m$ hmotou a ds dané kvadratickým středem $Mds^2 = \Sigma m d\bar{r}^2$ dráhovým elementem soustavy. Pak (c) praví, že délka dráhy soustavy jest za skutečného pohybu minimem. Při tom jest ovšem kinetická energie stálá a tedy dle

$$T = \tfrac{1}{2}M\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \tfrac{1}{2}M\bar{v}^2 = \text{stálé}, \quad \text{kde} \quad \bar{v} = \frac{ds}{dt}$$

i Hertzova rychlost soustavy stálá. Dle těchto koncepcí nahražuje Hertz prvý axiom Newtonův (§ 43) větou: Každý volný (u nás „isolovaný") systém setrvává

ve stavu klidu nebo rovnoměrného pohybu v dráze nejpřímější. (Systema omne liberum perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directissimam.)

Zašli jsme, počínajíc § 78, poněkud hlouběji do látky, která pro elementární knížku, jakou naše býti má, jest snad již příliš odlehlá. Leč přece, než ji opustíme, poohlédněme se zpět po smyslu všeho toho, o čem v tomto V. oddílu bylo jednáno. Na začátku oddílu III. jsme se krátce zmínili o základech mechaniky. Oddíl IV. a V. jednal o formálním vybudování metod mechaniky hmotných soustav. Můžeme zde rozlišiti dvoji stránku tohoto úsilí: Po prvé metody ovládající soustavu isolovanou, na niž vnější síly nepůsobí, soustavu, která zvláště zajímá astronomii s centrálním problémem tří těles. Po druhé vybudování metod, jichž lze užíti na pohyb obecné soustavy, podrobené vazbám, která tvoří hlavní předmět badání pro mechaniku užitou a fysiku.

Vyvrcholením těchto snah jsou obecné principy, z nichž hlavní jsme uvedli. Jich úlohou jest, nalézti vše objímající obecné matematické výrazy a vztahy, v prvé řadě pro zpracování vazbami omezeného pohybu libovolně daných soustav hmotných, a to výrazy a vztahy takové, aby pro řešení daných problémů zaručovaly prakticky upotřebitelnou, theoreticky nezávadnou obecnou metodu (Volkmann).

Konec konců nedávají a nemohou dáti v podstatě více, než základní rovnice Newtonovy a princip virtuálních posunutí. Ba někdy, zvlášť ve fysikální a technické praxi jest s výhodou propočítávati daný problém, který úplně exaktně se řešiti nedá, dlouhou a často málo schůdnou cestou synthetickou, vybudovávati řešení postupně na základě obou vět impulsových a principu energie. Jest to proto, že při takovémto podrobném stopování děje snadněji rozlišujeme podstatné od méně podstatného, snadněji můžeme odvážiti, co v „prvém přiblížení“ lze, a co nelze zanedbati. Souborné vztahy, jako Lagrangeovy rovnice druhého tvaru nebo princip Hamiltonův, podávají obecný návod, jak lze nalézti rovnice diferenciální, které problém řeší, ač ovšem velmi často bývá nesmírně těžko nebo i nemožno, tyto rovnice exaktně integrovati. Ale i tehdy podávají nám alespoň cenné pokyny pro jednodušší příklady zvláštní. Jejich výhodou jest také, že se nevážou na kartézské souřadnice.

Ale jejich nejvlastnější význam spočívá v tom, že vzbuzují v nás oprávněnou naději, že jejich platnost se možná neomezuje pouze na obor čistě mechanických přírodních dějství, že platí i pro děje, jež našim smyslům nejsou přímo přístupny, podaří-li se nám vhodně interpretovati význam kinetické a potenciální energie (po případě kinetického potenciálu), obecných sil a souřadnic, jakož i vazeb. Příkladem velikolepým jest Maxwellova budova elektrodynamiky, nebo Gibbsovy práce thermodynamické.

VI. Kinematika tuhého tělesa.

83. Tuhé těleso. Translace a rotace.

Již v § 62 jsme nastínili, jakým způsobem axiomaticky přecházíme od pojmu bodové soustavy k pojmu tuhého tělesa, které nám jest limitou soustavy složené z nesmírně mnoha hmotných bodů, spojených absolutně tuhými vazbami. Z § 76 pak víme, že úplně volné tuhé těleso má 6 stupňů volnosti. Chceme několik následujících statí věnovati popisu základních a pro fysiku nejdůležitějších tvarů pohybu tuhého tělesa, nehledíce k silám, jež jsou jejich příčinou, jinými slovy, pojednáme o základních poučkách kinematiky tuhého tělesa, odkazujíce toho, kdo hledá bližší poučení o této vědě, jež se stala součástí geometrie, k obšírným spisům na př. Burmesterovu, nebo francouzském Koenigsovu a konečně k obšírnému referátu Schoenflies-Koenigsovu v matematické encyklopedii (něm. i franc.)*).

Nejjednodušším typem pohybu tuhého tělesa jest ten, při němž elementární posunutí každého bodu tělesa jest dáno týmž vektorem, takže dráhy všech bodů jsou stejně dlouhé a shodné. Takovýto pohyb nazývá se postupným, translačním, krátce translací. Postupný pohyb nejjednodušší je přímočarý, ale mění-li translace neustále svůj směr, mohou býti dráhy bodů křivky, ve zvláštním případě i kružnice nebo její části, ale ovšem všechny oblouky téhož poloměru a téže délky. Vektor, který představuje posunutí translační, jest vektor volný, jehož začátek může býti přenesen do libovolného bodu prostoru, tedy vektor téhož druhu, jako jsme o nich jednali, který potřebuje k svému určení tří údajů, na př. tří průmětů na osy souřadnicové, nebo délky a dvou úhlů. Stejně jako v kinematice bodu přicházíme k pojmu rychlosti a zrychlení.

Jest patrno, že výsledek několika po sobě následujících translací lze nahraditi translací jedinou, danou jejich vektorovým součtem. Dvě různé polohy téhož bodu můžeme ztotožniti jedinou translací.

Zůstaly-li během polohové změny tělesa dva jeho body na svých původních místech, zůstaly na svých místech také veškeré body přímky, kterou oběma těma body můžeme proložiti, a kolem této přímky, rotační neboli otáčecí osy se celé těleso otočilo, to jest veškeré jeho body opsaly oblouky kruhové téhož středového úhlu a různých

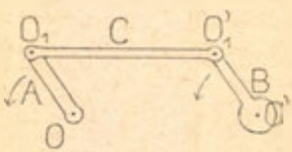
---

*) Krátký přehled hlavních vývodů kinematiky rovinné, které jsou zvláště důležity pro aplikace technické, obsahuje knížečka H. Polster: Kinematik (1912, Samml. Göschen).

poloměrů, rovných vzdálenosti každého bodu od osy. Nastalo otočení či rotace tělesa. Jest úplně určena, známe-li jednak osu, jednak velikost otočení, t. j. středový úhel oblouků dráhových.

Jest evidentní, že dvě různé polohy určité roviny můžeme ztotožniti rotací kolem přímky, v níž se protínají. Jedná-li se ještě o ztotožnění určitého bodu na těchto rovinách, musíme po rotaci připustiti ještě translaci.

Brzy uvidíme, že i nejobecnější posunutí tuhého tělesa můžeme složiti z translací a rotací. Ovšem může se při tom různým způsobem měniti translace, a rotační osa může měniti svou polohu jak v tělese samém, tak v nehybném, absolutním prostoru, takže docházíme k pojmům okamžité translace a okamžité rotační osy i rotace.

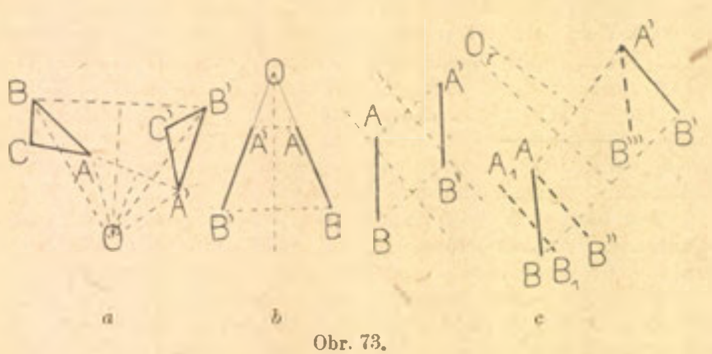


Obr. 72.

Příkladem rotace a zároveň translace, při níž veškeré body tělesa opisují kruhy, je obr. 72, znázorňující dvě kliky A a B o pevných osách O a O', které spojuje spojnice C' otáčivá kol os O_1 a O_1' spojených s klikami. Otáčíme-li jednou z klik, provádí jak A tak B pohyb rotační, kdežto pohyb spojnice C je translační, třeba by veškeré její body opisovaly kruhy.

84. Pohyb rovinný.

Pohybuje-li se těleso tak, že veškeré jeho body, které ležely v jisté v prostoru pevné rovině, v této rovině i za pohybu zůstávají, mluvíme o pohybu rovinném. Nejlépe si jej představíme, myslíme-li na pohyb průsvitného listu papírového na pevné rovinné podložce. Vektor translace patrně musí ležeti v rovině pohybu, rotační osa musí býti na ní kolmá.



Obr. 73.

Snadno nahlédneme, že výsledek zcela libovolných translací a rotací v rovině můžeme nahraditi jedinou rotací. Nechť přešel trojúhelník ABC (obr. 73 *a*) jakýmsi neznámým posouváním do polohy $A'B'C'$. Z obrazce je patrno, že mohli jsme téhož docíliti rotací kolem osy na rovině papíru kolmé, jejíž stopou v rovině jest bod O, zvaný

středem, centrem nebo pólem rotace, a to rotací o úhel $AOA' = BOB'$. Na průsvitném papíře nakreslený trojúhelník ABC překryje shodný trojúhelník $A'B'C'$, nakreslený na podložce, zapíchneme-li v O jehlu vrchním papírem a vhodně jej otočíme. Konstruktivně vyhledáme O vztyčením kolmic uprostřed spojnic AA' a BB', jakožto jejich průsek. Splynou-li obě v jedinou (obr. 73 *b*), jest pólem rotace průsek přímek AB a $A'B'$, po případě prodloužených. Bod O může padnouti do nekonečna (obr. 73 *c*), jedná-li se o translaci, již ovšem lze považovati za rotaci kolem osy nekonečně vzdálené.

Jinak lze všeobecně nahraditi výsledek libovolného posunutí rovinného nekonečně rozmanitými způsoby, translacemi a rotacemi. Tak na př. přejdeme z AB do $A'B'$ v obr. 73 *d* buď rotací A_1B_1 a odtud translací v $A'B'$, nebo rotací v AB'' a translací v $A'B'$, nebo translací v $A'B'''$ a odtud rotací v $A'B'$. Z posledních dvou případů vysvítá, že lze pořádek translace a rotace zaměniti; ale ovšem musela rotační osa (jednou A, po druhé A') zůstati táž vzhledem k tělesu. Všechny tyto způsoby přechodu vedou však k témuž výsledku (analogicky se 73 *a*) jako jediná rotace kolem osy O. Jest tedy translace a rotace kolem osy na rovině translace kolmé, nebo rotace a translace v rovině na rotační ose kolmé ekvivalentní s jedinou rotací kolem osy s původní rovnoběžné.

Nechceme-li přihlížeti pouze k výsledku nějakých libovolných posunutí, nýbrž chceme-li se co nejdokonaleji přimknouti k průběhu pohybu, jak se skutečně udál, zachytíme v myšlenkách nesmírně veliký počet okamžitých poloh tělesa a nahradíme přechod od každé k následující nekonečně malou ekvivalentní rotací, k níž vyhledáme okamžitý pól (střed) rotace (J. Bernoulli). Bude v konečnu, pokud se nejedná o čisté translace. Ovšem mění neustále svoje místo jak v tělese, tak v absolutně pevném prostoru. Sled jeho poloh vyplní při spojitém pohybu tělesa křivku, která se nazývá centroda nebo polhoda (*πολος, όδος*, někdy také polhodie, nebo přesmykem poloida), a to jednak centrodu v tělese (body-centrode) neboli polhodii v užším smyslu, jednak centrodu prostorovou (space-centrode) čili herpolhodii (*ἕρπειν* plaziti se, někdy též serpoloida). Obě jsou v úzkém vztahu jak poznáme z následujícího:



Obr. 74.

Buď bod 1, myšlený v tělese, jako všechny nečárkovanými číslicemi označené, v jistém okamžiku okamžitým pólem rotace (ve směru ručiček hodinových) a spadejž v jedno s bodem 1', pevným v prostoru. Po krátké době spadl bod 2 v jedno s prostorovým bodem 2', vytažený mnohoúhelník přišel do polohy čárkované. Dejme tomu, že se 2 stal okamžitým pólem rotace; po nové krátké době přišel

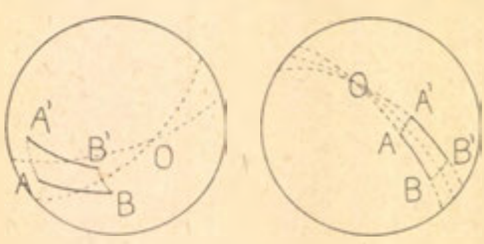
bod 3 tělesa do 3′ prostoru, mnohoúhelník přišel do polohy tečkované. Stal-li se zase bod 3 pólem, pokračuje věc podobně dál, body 4, 5, ... tělesa působily jako póly rotace, když se octly v prostorových bodech 4′, 5′,.. Jest tudíž mnohoúhelník 12345.. (v limitě křivka) centrodou v tělese, křivka proložená body 1′, 2′, 3′, 4′, 5′.... centrodou v prostoru. Průběh pohybu jest dán tím, že centroda tělesa (polhodie) se beze smyku (klouzání) valí po centrodě prostorové (herpolhodii), jež ovšem jest v prostoru pevná (Cauchy). Okamžitý dotykový bod obou jest okamžitým pólem (středem) rotace. Vedeme-li z něho spojnici ku kterémukoliv bodu pohybovaného tělesa, stojí kolmo na jeho okamžitém směru pohybu (nebo také rychlosti).

Kdežto na sledu dvou translací nic nezáleží a také pořádek translace a rotace můžeme zaměniti, aniž by ve výsledném posunutí bylo jakého rozdílu, děla-li se ovšem rotace kolem téhož bodu (osy) v tělese, nesmíme pořádek dvou konečných rotací kolem pólů A a B, v prostoru pevných, zaměniti. Zaměníme-li jej, leží střed výsledné rotace (vyhledaný dle obr. 73 *a*) v místě O', v němž vzniká odrazem na spojnici AB, jakožto rovinném zrcadle, virtuální obraz původního středu rotace O.

Snadný důkaz této věty pořídí si čtenář sám.

85. Pohyb tuhého tělesa kolem pevného bodu. Precese.

Znázorňujž nám tuhé těleso koule, kterou si myslíme z něho vyříznutu tak, že jejím středem jest pevný bod v prostoru, kolem něhož se těleso může otáčeti. Poloha koule jest obecně určena třemi body, za něž zvolme její střed C a dva body A a B na povrchu, které si můžeme mysliti spojeny oblouky největších kruhů.

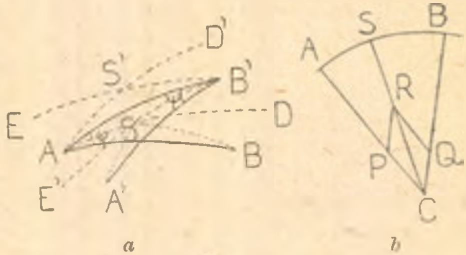


Obr. 75.

Výsledek libovolného posunutí koule (tedy i tělesa), při němž přejde AB v polohu $A'B'$, lze nahraditi jedinou rotací. Snadno to poznáme z obr. 75 *a*. Spojme AA' a BB' oblouky největších kruhů a nakresleme největší kruhy, které tyto oblouky půlí, stojíce na nich kolmo. Protnou se v O (a O' protilehlém na druhé straně koule). Jest evidentní, že AB přejde v $A'B'$ jedinou rotací kolem osy $O'CO$.

Konstrukce nevede k cíli, když oba půlící největší kruhy splynou v jediný. Pak však, jak zřejmo z obr. 75 *b*, jest dána rotační osa středem koule C a bodem O (resp. O'), ve kterém se protínají největší kruhy proložené AB a $A'B'$ samy. Můžeme tedy vysloviti obecně větu: Výsledek libovolných pohybů tuhého tělesa kolem pevného bodu lze vždy nahraditi jedinou rotací (Euler).

Příkladem uvedeme výsledek dvou konečných po sobě následujících rotací kolem **d v o u o s**, s tělesem pevně spojených a **p r o c h á z e j í c í c h t ý m ž b o d e m**, středem C koule o jedničkovém poloměru která nám znázorňuje těleso. Stopa prvé osy na povrchu koule budiž bod A (obr. 76 *a*), stopa druhé bod B, jež spojíme obloukem největšího kruhu $\widehat{AB}$, který zároveň měří středový úhel ACB. Rotací o úhel φ (proti ručičkám hodinovým, je-li C za papírem) kolem osy CA přejde $\widehat{AB}$ v polohu $\widehat{AB'}$. Rozpůlíme-li úhel φ obloukem $\widehat{AD}$, přejde tento rotací v polohu $\widehat{AD'}$, symetrickou vzhledem k $\widehat{AB'}$.



Obr. 76.

Při rotaci o úhel ψ kolem osy CB' (zase proti ručičkám hodinovým) přejde $\widehat{AB'}$ ve výslednou polohu $\widehat{A'B'}$. Do polohy $\widehat{B'E'}$, která půlí úhel ψ, přijde oblouk $\widehat{B'E}$, dříve symetricky vzhledem k $\widehat{AB'}$ položený. Jest patrno, že bod S, průsek oblouků $\widehat{AD}$ a $\widehat{B'E'}$ při prvé rotaci přešel do S', po druhé se vrátil do původní polohy S, takže přímka CS vlivem obou rotací svou polohu nezměnila. Mohli jsme tedy obě rotace nahraditi jedinou kolem osy CS a to zřejmě o úhel $ASA' = BSB' = \chi$. Ježto $\sphericalangle ASB' = 180^0 - \frac{1}{2}\chi$, $\widehat{AB} = \widehat{AB'}$ a $\widehat{SB'} = \widehat{SB}$, můžeme dle sinusové věty ve sférickém trojúhelníku ASB' psáti

$$\frac{\sin \frac{1}{2}\varphi}{\sin \widehat{SB}} = \frac{\sin \frac{1}{2}\psi}{\sin \widehat{SA}} = \frac{\sin \frac{1}{2}\chi}{\sin \widehat{AB}}. \qquad (a)$$

Z konstrukce samé plyne, že změníme-li pořad dvou konečných rotací kolem os protínajících se, obdržíme výslednou polohu jinou. (Srovnejte tento výsledek s koncem § 84. Tam leží C v nekonečnu za papírem.)

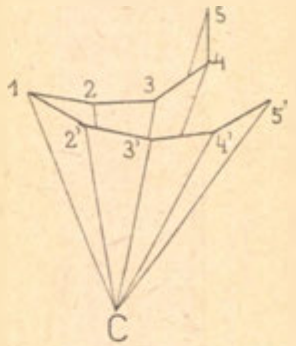
Jen tehdy, jsou-li **o b ě r o t a c e i n f i n i t e s i m á l n ě m a l é**, což naznačíme píšíce za ně $d\varphi$ a $d\psi$, lze pořádek zaměniti. Bod S leží pak na kruhovém oblouku $\widehat{AB}$ (obr. 76 *b*) v místě, jež nalezneme dle vztahu (a), v němž za sinusy píšeme úhly

$$\frac{d\varphi}{\sin \sphericalangle SCB} = \frac{d\psi}{\sin \sphericalangle SCA} = \frac{d\chi}{\sin \sphericalangle ACB}. \qquad (b)$$

Nalezneme je dle tohoto vztahu konstrukcí uhlopříčny CR rovnoběžníka sestrojeného ze stran $CP = d\varphi$, $CQ = d\psi$, nanesených na rotační osy CA a CB dle pravidla pravotočivého šroubu.

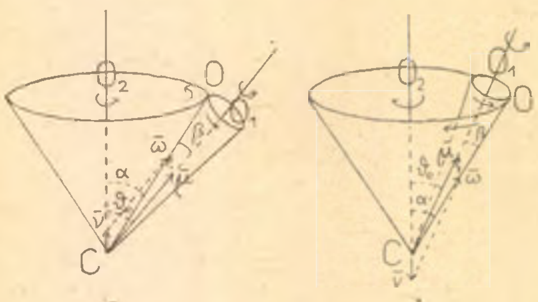
Jedná-li se o to, abychom se pokud možno věrně přimknuli ke skutečnému **p r ů b ě h u** pohybu, můžeme zde opakovati mutatis mutandis totéž, co jsme řekli v § 84. Při skutečném pohybu může se okamžitá osa rotační neustále měniti co do svého směru jak v tělese, tak v prostoru. Jednotlivé její polohy vytvoří kužel (vlastně ovšem dvojkužel s hrotem ve středu koule, z něhož však obvykle kreslíme jedinou část), jakožto limitu mnohobokého jehlanu, jak jest

zakreslen v obr. 77. Zase znamenají spojnice středu koule C s body 1, 2, 3, 4, 5, ... na povrchu koule jednotlivé po sobě následující polohy okamžité rotační osy v tělese, spojnice C s 1′, 2′, 3′, 4′, 5′, ... její postupné polohy pevné v prostoru. Skutečný pohyb tělesa děje se zase tak, že se postupně ztotožní $C2$ s pevným $C2'$, pak $C3$ s $C3'$ atd., tedy kužel C 1, 2, 3, 4, ... zvaný polhodiovým, se valí bezesmyku po herpolhodiovém C 1′, 2′, 3′, 4′, ... v prostoru pevném (Cauchy, Chasles, Poinsot). Místo koule, jako v obr. 75*a* a *b*, může nám tedy znázorňovati těleso kužel polhodiový.



Obr. 77.

Zvlášť důležitý typ pohybu kolem pevného bodu je pohyb precesní, u něhož jsou oba kužele kruhové. Obr. 78 nám ukazuje dva hlavní případy, že totiž valící se kužel polhodiový jest po prvé vně, po druhé uvnitř kužele herpolhodiového v prostoru pevného, jehož osa je kreslena vertikálně. Skutečnou okamžitou osou rotační jest ovšem vždy přímka CO, v níž se oba kužele dotýkají. Tato okamžitá osa se pohybuje podél pevného kužele v případě (*a*) v témž směru (shora proti ručičkám hodinovým), ve kterém se těleso otáčí. Výsledkem pohybu jest, že jakási „střední osa“ CO_1 tělesa — vlastně osa kužele polhodiového, která sama vůbec není osou otáčecí — obíhá kolem osy CO_2 v prostoru pevné, opisujíc kolem ní precesní kužel polovičního otvoru $O_1CO_2 = \vartheta_0$. Pro souhlasnost směru otáčení a oběhu mluvíme o precesi progresivní, postupné. V případě 78*b* děje se obíhání „osy“ CO_1 kolem CO_2 ve smyslu opačném než vlastní otáčení tělesa, precese je retrogradní, zpětná. Kdyby však v témž obr. 78*b* byl CO_1 pevný kužel herpolhodiový a CO_2 valící se kužel polhodiový, dálo by se otáčení i pohyb precesní v témž smyslu ručiček hodinových a precese by byla postupná. (Různé možné případy vzájemné polohy obou kuželů vyčerpány jsou v známé knize „Theorie des Kreisels“, již napsali Klein a Sommerfeld, str. 47 násl.)



Obr. 78.

Velikolepý příklad precesního pohybu poskytuje naše zeměkoule. Je retrogradní obdobný obr. 76*b*. Herpolhodiový kužel má poloviční otvor O_1CO_2, rovný přibližně $23^1/_2{}^0$ (přesněji $23^0 27' 32''$; jest to sklon roviny rovníkové k ekliptice), pevná osa CO_2 je osa ekliptiky. Kužel polhodiový má poloviční

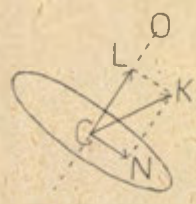
otvor 0·0087″, takže jeho stopa na zeměkouli jest kruh poloměru asi 27 *cm*. Ježto jednou denně se otočí, t. j. vystřídají se všechny polohy otáčecí osy, tedy to trvá asi 26.000 let, než se vykoná úplný oběh precesní. Precese, jak známo, způsobuje změnu polárky a zpětný pohyb jarního bodu.

Již na tomto místě připojíme ještě následující poznámky: Otvor kužele polhodiového u zeměkoule jest podroben malým periodickým změnám. Osa zemského elipsoidu neopisuje tedy v prostoru přesný kruhový kužel, nýbrž vybočuje periodicky z jeho pláště o malé obnosy na obě strany ven. To je nutace zemské osy, jež jest způsobeno tím, že dráha měsíce neleží v ekliptice, nýbrž jest k ní asi o 5° 9′ skloněna, kterýžto sklon se periodicky mění. Uzlová přímka otočí se asi za 18·7 let jednou dokola kolem osy ekliptiky. Lze říci, že pól zemského rovníka probíhá asi v 18·7 letech relativně k čisté precesi elipsu o poloosách 9″2 a 6″9.

86. Pohyb tuhého tělesa úplně volného.

Zcela libovolné posunutí tuhého tělesa v prostoru, jehož výsledkem jest změna polohy z Σ do Σ', můžeme nahraditi jedinou translací a jedinou rotací. Zaujímejtež body ABC původní polohy Σ místa $A'B'C'$ v nové poloze Σ'. Patrně můžeme translací celého tělesa přivésti C do C', při čemž A, B přišly do míst A_1B_1, a potom vhodnou jedinou rotací A_1B_1 do $A'B'$.

Chceme-li se přimknouti co nejlépe k průběhu skutečného pohybu, rozdělíme celý postup na nesmírně mnoho nesmírně malých změn, z nichž však každá sestává z translace a rotace, a nedá se nahradit jedinou rotací, jako při pohybu rovinném. Leč přece můžeme zde docíliti jakéhosi zjednodušení, zavedeme-li pojem pohybu šroubového, jímž nazýváme otočení kolem nějaké osy, spojené se současným postupem ve směru osy. Tvrdíme, že všechny elementární změny můžeme provésti pohyby šroubovými. Vskutku, sestává-li taková změna z otočení kolem osy CO, již najdeme dle předpisu § 85, a postupu CK (obr. 79), jenž jest ovšem jako každá translace totožný pro všechny body tělesa, můžeme $\overline{CK}$ nahraditi translacemi $\overline{CL}$ ve směru osy otáčecí a $\overline{CN}$ kolmo k ní. Ale dle § 84 dá se translace $\overline{CN}$ a rotace kolem CO nahraditi jedinou rotací kolem jiné osy s CO rovnoběžné, takže celkem zbývá tato nová rotace a rovnoběžný s ní pohyb postupný $\overline{CL}$ — tedy pohyb šroubový, jenž jest nejobecnějším okamžitým pohybem tuhého tělesa (Giulio Mozzi 1763, Cauchy, Chasles).



Obr. 79.

Při obecném pohybu tělesa vyplňují postupné polohy okamžitých šroubových os v tělese jakousi plochu přímkovou a současně v prostoru jinou přímkovou plochu. Při pohybu kolem pevného bodu se obě tyto přímkové plochy redukovaly na kužel polhodiový a herpolhodiový se společným vrcholem. Ale podobně, jako tam, i v případě obecném mají obě tyto plochy, zvané

osovými plochami pohybu, v každém okamžiku jednu společnou přímku okamžitou to osu šroubovou, v níž se dotýkají a podél níž se těleso současně posouvá. V okamžiku následujícím děje se tak podél sousedních přímek obou ploch, které se nyní ztotožnily. Průběh obecného pohybu lze tedy znázorniti valením a současným podélným klouzáním obou ploch osových podél okamžité osy. (Cauchy, Poncelet.)

87. Skládání rychlostí tuhého tělesa.

Dosavadní úvahy byly rázu synthetického. Budeme nyní hledati analytické výrazy pro jednotlivé veličiny, o které se při pohybu tuhého tělesa zajímáme.

Při postupném pohybu tělesa má každý jeho bod touž rychlost v. Můžeme ji tedy znázorniti vektorem v vedeným v libovolném bodě prostoru neb tělesa, vektorem volným (srov. § 83). Současné translační rychlosti v_1, $\bar{v}_2$, .., ovšem zase všem bodům tělesa společné, skládají se v rychlost výslednou $\bar{v}$ dle pravidla vektorového součtu

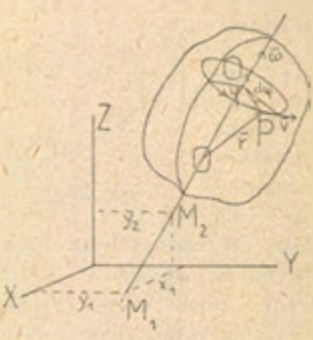
$$\bar{v} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \ldots \qquad (a)$$

Ptejme se nyní po okamžité rychlosti, již má libovolný bod P tělesa, které jakožto celek se otáčí okamžitou rotační rychlostí ω kolem osy v tělese pevné a bodem O procházející.

Odpověď dána jest vzorcem (16 e), dle něhož (obr. 80) jest

$$\bar{v} = \dot{\bar{r}} = [\bar{\omega}\bar{r}]. \qquad (b)$$

Při tom jest rotační rychlost ω vektor nanesený na rotační ose z bodu O týmž směrem, jako postup obyčejného pravotočivého šroubu za dané rotace; $\bar{r}$ jest posiční vektor uvažovaného bodu P, vedený z bodu O rotační osy. Již v § 16 se stala zmínka, že počátek O může býti volen kdekoli na ose rotační. Vektor $\bar{\omega}$ jest tedy vektorem vázaným na přímku, nebo kratčeji vektorem klouzavým (sliding vector, vecteur glissant, linienflüchtiger V.), který k svému určení potřebuje pěti údajů, na př.: velikost, směr, daný dvěma úhly s osami souřadnic a souřadnice y_1, x_1 bodu M_1, v němž protíná jednu z rovin souřadnicových (zde rovinu XY). Místo úhlů směrových lze udati dvě souřadnice bodu M_2, v němž protíná osa jinou rovinu souřadnicovou (na př. y_2, z_2).



Obr. 80.

Velikost vektoru $\bar{\omega}$ jest $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$, určujeme-li okamžitou polohu tělesa úhlem φ (obr. 78.), měřeným od jisté polohy základní.

Patrně tedy

$$\bar{\omega} = \omega \cdot \bar{\omega}^0 = \frac{d\varphi}{dt}\,\bar{\omega}^0.$$

Chceme-li psáti kratčeji

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}, \quad \text{čili} \quad d\varphi = \omega dt, \qquad (c)$$

musíme infinitesimální otočení $d\varphi$ chápati jakožto vektor nanesený na osu rotační, směru $\bar{\omega}^0$ a velikosti $d\varphi$.

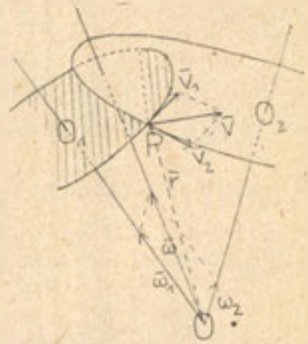
I. Skládání rotačních rychlostí kolem dvou os, které se protínají.

Podléhá-li těleso současně dvěma rotacím $\bar{\omega}_1$ a $\bar{\omega}_2$ kolem os, které se protínají, můžeme průsek O (obr. 81) zvoliti za začátek posičních vektorů. Okamžité rychlosti libovolného bodu tělesa P budou dle (b)

$$\bar{v}_1 = [\bar{\omega}_1 \bar{r}], \quad \bar{v}_2 = [\bar{\omega}_2 \bar{r}],$$

a jeho rychlost výsledná

$$\bar{v} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 = [\bar{\omega}_1 \bar{r}] + [\bar{\omega}_2 \bar{r}] = \\ = [\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2, \bar{r}] = [\bar{\omega} \bar{r}]. \qquad (d)$$



Obr. 81.

Jest též, jakoby těleso mělo jedinou rotační rychlost

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 \qquad (e)$$

kolem osy, která prochází průsekem O. Ježto je bod P zcela libovolný bod tělesa, dává (e) pravidlo o skládání rotačních rychlostí kolem os týmž bodem procházejících.

Pravidlo (e) jest ostatně předpokladem pro možnost znázorňovati rotační rychlost vektorem $\bar{\omega}$. Klademeť v semikartézském rozepsání

$$\bar{\omega} = \omega_x \bar{i} + \omega_y \bar{j} + \omega_z \bar{k}, \qquad (f)$$

kde $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ jsou průměty vektoru $\bar{\omega}$ na osy souřadnicové, tedy rotaci kolem libovolné, ale počátkem souřadnic procházející osy ekvivalentní rotacím kolem tří os souřadnicových. Z rozepsání vzorce (b)

$$\frac{dx}{dt}\bar{i} + \frac{dy}{dt}\bar{j} + \frac{dz}{dt}\bar{k} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

dostáváme pro okamžité rychlosti bodu P podél os

$$\dot{x} = \omega_y z - \omega_z y, \quad \dot{y} = \omega_z x - \omega_x z, \quad \dot{z} = \omega_x y - \omega_y x, \qquad (g)$$

což ostatně velmi snadno můžeme odvoditi nebo verifikovati z geometrického znázornění.

Důležitý příklad na skládání takovýchto rotačních rychlostí jest pohyb precesní, o němž bylo jednáno v § 85. Každý bod tělesa má současně rotační rychlost $\bar{\omega}_1 = \bar{\mu}$ kolem osy CO_1 (obr. 78, a, b) a spolu s touto osou rotační rychlost $\bar{\omega}_2 = \bar{\nu}$ kolem osy CO_2 v prostoru pevné. Výsledek obou pohybů jest rotace kolem okamžité osy CO, jež se děje rychlostí $\bar{\omega}$, kteráž jest dle (e)

$$\bar{\omega} = \bar{\mu} + \bar{\nu}. \qquad (h)$$

Nazveme-li poloviční úhel kužele herpolhodiového $\sphericalangle OCO_2 = \alpha$, polhodiového $\sphericalangle OCO_1 = \beta$ a kužele precesního $\sphericalangle O_1CO_2 = \vartheta_0$, plynou z trojúhelníka rotačních rychlostí rovnice

$$\omega^2 = \mu^2 + \nu^2 \pm 2\mu\nu \cos\vartheta_0, \quad \frac{\mu}{\sin\alpha} = \frac{\nu}{\sin\beta} = \frac{\omega}{\sin\vartheta_0}. \qquad (i)$$

Znamení $+$ platí pro ostrý úhel mezi kladnými směry vektorů $\bar{\mu}$ a $\bar{\nu}$ (obr. 78 *a*), znamení — pro úhel tupý (obr. 78 *b*).

Při precesním pohybu zeměkoule jsou

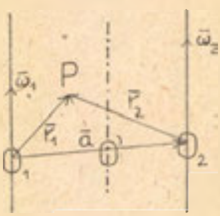
$$\nu = \frac{2\pi}{26000 . 365} \frac{1}{den}, \quad \omega = \frac{2\pi}{1\, den}, \quad \vartheta_0 = 23{\cdot}5^0,$$

a tedy
$$\sin\beta = \frac{\sin 23{\cdot}5^0}{26000 . 365} = \sin 0{\cdot}0087'',$$

jak již bylo v § 85 uvedeno.

II. Skládání rotačních rychlostí kolem dvou os rovnoběžných.

Tento případ redukuje se na předcházející, dáme-li průseku os O odejíti do nekonečna. Ježto osa výsledné rotace bude jím též procházeti, bude patrně s danými osami rovnoběžná. Posiční vektor $\bar{r}$ libovolného bodu P tělesa ve vzorci (*d*) jest veden z průseku O v nekonečnu. Abychom se zbavili nejistoty v tomto ustanovení ležící, přiřkneme bodu P posiční vektory $\bar{r}_1$ a $\bar{r}_2$, vedené z libovolných bodů O_1 a O_2 obou os (obr. 82). Dle (*b*) a pravidla o skládání rychlostí jest pak



Obr. 82.

$$\bar{v} = [\bar{\omega}_1\bar{r}_1] + [\bar{\omega}_2\bar{r}_2]. \qquad (j)$$

Ježto směr os jest týž a jen velikost rotačních rychlostí ω_1 a ω_2 různá, můžeme psáti

$$\bar{\omega}_1 = \omega_1\bar{\omega}^0, \quad \bar{\omega}_2 = \omega_2\bar{\omega}^0,$$

kde $\bar{\omega}^0$ je společný jedničkový vektor, ω_1 a ω_2 prostá čísla, a to téhož znamení u os stejnoměrných, opačného u os protisměrných.

Dosazením do (*j*)

$$\bar{v} = [\omega_1\bar{\omega}^0, \bar{r}_1] + [\omega_2\bar{\omega}^0, \bar{r}_2] = [\bar{\omega}^0, \omega_1\bar{r}_1 + \omega_2\bar{r}_2]. \qquad (k)$$

Bod, pro který

$$\omega_1\bar{r}_1 + \omega_2\bar{r}_2 = 0, \qquad (l)$$

zůstane v klidu, leží na nové výsledné ose rotační, o níž již víme, že jest rovnoběžná se směrem $\bar{\omega}^0$. Leží na spojnici O_1O_2, neboť (*l*) vyžaduje, aby $\bar{r}_1$ a $\bar{r}_2$ byly vektory opačného směru, jsou-li ω_1 a ω_2 téhož znamení, resp. vektory téhož směru, jsou-li znaménka ω_1 a ω_2 různá. Rozdělíme-li O_1O_2 bodem O' v poměru

$$O_1O' : O'O_2 = \omega_2 : \omega_1, \qquad (m)$$

jest O' bodem výsledné osy, která jest takto jednoznačně určena. Že

jest rovnoběžna s osami danými, jest patrno také z toho, že body O', určené vztahem (m) při libovolných O_1 a O_2 vyplňují přímku rovnoběžnou s $\bar{\omega}^0$. Jsou-li ω_1 a ω_2 téhož znamení, tedy dané rotace téhož směru, leží O' mezi O_1 a O_2, v druhém možném případě pak vně na straně rotace absolutně větší.

Zvlášť zajímavý případ nastává, jedná-li se o dvě rotace protisměrné, jichž rychlost však má touž absolutní velikost. Pak $\bar{\omega}_2 = -\bar{\omega}_1$ a z (j) vznikne

$$\bar{v} = [\bar{\omega}_1, \bar{r}_1 - \bar{r}_2] = [\bar{\omega}_1 \bar{a}], \tag{n}$$

kde jsme psali za vektor $\overline{O_1 O_2} = \bar{r}_1 - \bar{r}_2 = \bar{a}$.

Postupná rychlost všech bodů tělesa jest pak stejná co do směru i velikosti, čili ze dvou stejně velikých rotací opačného směru kol os rovnoběžných vzniká postupný pohyb tělesa.

Soustavu takovýchto dvou současných rotací, které jsou ekvivalentní jediné translaci, nazýváme dvojicí rotací a výraz $[\bar{\omega}\bar{a}]$ jejím momentem. Jest pro všechny body tělesa týž, tedy vektor volný.

III. Skládání rotačních rychlostí kolem dvou os libovolných.

Jsou-li podobně jako na obr. 82 O_1 a O_2 dva libovolné počáteční body na osách, platí vztah (j). Zavedením vektoru $\overline{O_1 O_2} = \bar{a}$ je $\bar{r}_2 = \bar{r}_1 - \bar{a}$ a tedy po dosazení do (j)

$$\bar{v} = [\bar{\omega}_1 \bar{r}_1] + [\bar{\omega}_2 \bar{r}_1] - [\bar{\omega}_2 \bar{a}] = [\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2, \bar{r}_1] - [\bar{\omega}_2 \bar{a}]. \tag{o}$$

Výsledný pohyb se skládá z rotace $\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2$ kolem osy procházející bodem O_1 a z translace rychlosti $-[\bar{\omega}_2 \bar{a}]$ všem bodům tělesa společné.

U os, jež se protínaly, mohli jsme volbou průseku O za bod počáteční, t. j. $O_1 = O_2 = O$, tedy $\bar{a} = 0$, docíliti, že $\bar{r}_1 = \bar{r}_2 = \bar{r}$, že tedy translace vymizela. U os mimoběžných toho docíliti nelze. Nebudeme se tímto fysikálně méně důležitým případem blíže zanášeti, odkazujíce na př. na Heunovu „Kinematik“.

Jen tolik budiž poznamenáno: Kdyby vedle obou rotací byla existovala ještě translace, byla by se rychlost její spojila se členem $-[\bar{\omega}_2 \bar{a}]$ v jediný člen společný.

Ze snadného zevšeobecnění připojením dalších rotací a translací, event. rozložených na dvojice rotací plyne, že libovolný počet současných rotací a translací tuhého tělesa dá se nahraditi jedinou translací a jedinou rotací kolem určité osy, které dohromady tvoří nejobecnější pohyb tuhého tělesa.

88. Analytické zkoumání obecného pohybu tuhého tělesa v prostoru.

Z §§ 86 a 88 víme, že se můžeme přimknouti libovolně přesně k obecnému pohybu tělesa, převedeme-li je z jedné dané polohy do druhé nekonečně blízké tak, že celé těleso podrobíme translaci $\bar{v}_0 dt$,

aby na př. bod O přešel ze staré do nové polohy a současně je vhodně otočíme kolem osy, která prochází bodem O. Posunutí libovolného bodu P, určeného polohovým vektorem $OP = \bar r$, dané okamžitou rychlostí násobenou časem, bude

$$\bar v dt = \bar v_0 dt + [\bar\omega \bar r]\, dt.$$

čili jeho rychlost

$$\bar v = \bar v_0 + [\bar\omega \bar r]. \qquad (a)$$

V tomto výrazu budou různým bodům P odpovídati různá $\bar r$, ale ovšem tytéž $\bar v_0$ a $\bar\omega$. Ovšem volba bodu O byla úplně libovolná. Kdybychom místo O byli zvolili bod jiný O_1, určený vzhledem k O polohovým vektorem $OO_1 = \bar a_1$, vzhledem k němuž polohový vektor bodu P je $O_1P = \bar r_1$, takže $\bar r = \bar a_1 + \bar r_1$, musela by býti analogicky s (a) rychlost bodu P

$$\bar v = \bar v_0' + [\bar\omega' \bar r_1]. \qquad (b)$$

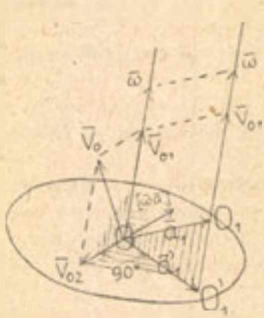
kde ovšem $\bar v_0'$ a $\bar\omega'$ jsou jiné hodnoty než $\bar v_0$ a $\bar\omega$, závislé právě na volbě bodu O_1. Při prvém způsobu přechodu byla by rychlost bodu O_1 dle (a)

$$\bar v_1 = \bar v_0 + [\bar\omega \bar a_1]. \qquad (c)$$

Dosadíme-li odtud za $\bar v_0$ do (a), máme pro rychlost bodu P (která je skutečným pohybem jeho ze staré do nové polohy a časem dt dána!)

$$\bar v = \bar v_1 + [\bar\omega, \bar r - \bar a_1] = \bar v_1 + [\bar\omega \bar r_1]. \qquad (d)$$

Tento vzorec vyjadřuje totéž jako (b) a lze jej tedy vykládati tak, že přechod nový, vedoucí u každého libovolného bodu P k témuž výsledku jako dříve, se stal translací $\bar v_1 dt$ celého tělesa, která přivedla bod O_1 do nové polohy a současně rotací tělesa kolem osy bodem O_1 procházející. Volíme-li tedy body $O, O_1, \ldots$ různé, vidíme, že sice musíme k docílení předepsaného přechodu voliti translaci různou, $\bar v_0, \bar v_0' = \bar v_1, \ldots$, že však rotace $\bar\omega$, $\bar\omega' = \bar\omega, \ldots$ zůstává nezávisle na volbě bodu $O, O_1, \ldots$ táž co do směru i velikosti. Jenom tehdy, kdyby na př. $\bar a_2$ měl týž směr jako $\bar\omega$, kdyby tedy nově volený bod základní O_2 ležel od O ve směru rotační osy, zůstala by také translace odpovídající volbě O či O_2 táž, neboť by v (d) součin $[\bar\omega \bar a_2] = 0$, vymizel, a ze srovnání (d) a (a) by pak plynulo $\bar v_2 = \bar v_0$.



Obr. 83.

Můžeme si položiti otázku: Lze voliti nějaký význačný bod za O_1 tak, aby popis obecného pohybu byl co nejjednodušší?

Postupnou rychlost $\bar v_0$ původního bodu O můžeme vždy rozložiti na dvě složky, z nichž jedna $\bar v_{01}$ je rovnoběžna se směrem $\bar\omega$, druhá $\bar v_{02}'$ pak na tomto směru kolma, takže dle (c)

$$\bar v_1 = \bar v_{01} + \bar v_{02} + [\bar\omega \bar a_1]. \qquad (e)$$

Zvolme nyní bod O_1, tedy $\bar a_1$, tak, aby $\bar v_{02} + [\bar\omega \bar a_1] = 0$. To je vždy možno: $\bar v_{02}$ stojí kolmo na $\bar\omega$, vektor $[\bar\omega \bar a_1]$ stojí kolmo na rovině

vektorů $\bar{\omega}$ a $\bar{a}_1$ a stačí tedy voliti $\bar{a}_1$ tak, aby jeho průmět $\bar{a}'$ na rovině kolmé k $\bar{\omega}$ sám stál kolmo na $\bar{v}_{02}$ a měl vhodnou velikost. Ostatně lépe než slova vyjadřuje to obr. 83. Pak zbude z (e) $\bar{v}_1 = \bar{v}_{01}$, a obecně je pro libovolný bod P tělesa dle (d)

$$\bar{v} = \bar{v}_{01} + [\bar{\omega}\bar{r}_1], \tag{f}$$

pohyb složený z postupu celého tělesa ve směru osy $\bar{\omega}$ a z otáčení kolem ní čili pohyb šroubový, který za vhodné volby bodu O_1 jest nejobecnějším pohybem tuhého tělesa. To jest analytický důkaz známého nám již theorému Chaslesova.

Takovýto elementární šroubový či helikoidální pohyb nazývá Sir R. Ball (v Theory of screws, něm. překlad pořídil Gravelius) twist (krut, Windung), nebo okamžitý šroub.

Bodů O_1 najdeme ovšem nekonečné množství, neboť nechť je bodem O_1 kterýkoli bod přímky $O_1 O'_1$ rovnoběžné s $\bar{\omega}$, zůstává vektor $[\bar{\omega}\bar{a}_1]$ nezměněn co do směru i velikosti. V obr. 83. jsou zakresleny výsledné $\bar{v}_{01}$ a $\bar{\omega}$ od bodu O_1 jakožto počátku. Máme-li nalézti početně bod O_1 resp. vektor $\bar{a}_1$, všimněme si, že O_1 je bod, jehož celkový pohyb v obrazci a vývodech označený $\bar{v}_{01}$, ale obecně daný vzorcem (c), jest v daném okamžiku rovnoběžný s $\bar{\omega}$. Musí tedy dle definice vektorového součinu

$$[\bar{\omega}\bar{v}] = [\bar{\omega}\bar{v}_0] + [\bar{\omega}[\bar{\omega}\bar{a}_1]] = 0. \tag{g}$$

Dle (8 d) jest

$$[\bar{\omega}[\bar{\omega}\bar{a}_1]] = \bar{\omega}(\bar{\omega}\bar{a}_1) - \bar{a}_1\omega^2.$$

Úlohu zjednodušíme, hledajíce bod O'_1 (obr. 83), který leží v rovině proložené bodem O kolmo na $\bar{\omega}$. Dosazením $\bar{a}'_1$ za $\bar{a}_1$ plyne $(\bar{\omega}\bar{a}'_1) = 0$, neboť $\bar{\omega}$ a $\bar{a}'_1$ jsou vektory na sobě kolmé. Z (g) zbývá

$$[\bar{\omega}\bar{v}_0] = \bar{a}'_1\omega^2, \quad \text{čili} \quad \bar{a}'_1 = \frac{[\bar{\omega}\bar{v}_0]}{\omega^2}. \tag{h}$$

Vektor výsledný je kolmý na rovině $\bar{\omega}\bar{v}_0$ a jeho velikost jest

$$|\bar{a}'_1| = \frac{v_0 \sin(\widehat{\omega v_0})}{\omega}. \tag{i}$$

Označíme-li souřadnice bodu O vzhledem k časově pevné soustavě souřadnicové x_0, y_0, z_0, takže

$$\bar{v}_0 = \dot{x}_0\bar{i} + \dot{y}_0\bar{j} + \dot{z}_0\bar{k},$$

souřadnice libovolného bodu P pak x, y, z a složky rotace $\omega_x, \omega_y, \omega_z$, takže

$$\bar{r} = (x - x_0)\bar{i} + (y - y_0)\bar{j} + (z - z_0)\bar{k}, \quad \bar{\omega} = \omega_x\bar{i} + \omega_y\bar{j} + \omega_z\bar{k},$$

jest všeobecným výrazem pro rychlost $\bar{v} = \dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j} + \dot{z}\bar{k}$ libovolného bodu P tělesa, jež postupuje a zároveň se otáčí kolem bodu O dle semikartézského rozepsání (a) v ose X

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx_0}{dt} + \omega_y(z - z_0) - \omega_z(y - y_0). \tag{j}$$

Podobně pro druhé dvě osy. Jest patrno, že obecný pohyb úplně volného tuhého tělesa jest určen vektory v_0 a $\bar{\omega}$, resp. v soustavě kartézských souřadnic šesti veličinami, které odpovídají šesti stupňům vol-

nosti. Lidská ruka (od lokte) má šest stupňů volnosti, ježto ji lze uvésti (i bez pohybu trupu) do každé nekonečně blízké sousední polohy z polohy dané.

Jedná se ještě o to, jak nalezneme rotační rychlost $\bar{\omega}$ tělesa, jsou-li dány v jistém okamžiku rychlosti $\bar{v}$ všech jeho bodů. Z (a) plyne

$$\operatorname{rot} \bar{v} = [\nabla \bar{v}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix} = \operatorname{rot} \bar{v}_0 + \operatorname{rot} [\bar{\omega} \bar{r}].$$

Poněvadž, jak z rozepsání je patrno, se jedná v Hamiltonově operátoru ∇ o diferenciace dle souřadnic, je $\operatorname{rot} \bar{v}_0 = 0$, neboť $\bar{v}_0$ je v celém tělese stejné, na souřadnicích nezávislé. Rozepišme

$$\operatorname{rot} [\bar{\omega} \bar{r}] = \left[\left(\bar{i} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{j} \frac{\partial}{\partial y} + \bar{k} \frac{\partial}{\partial z} \right), \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \end{vmatrix} \right]$$

a napišme dle známých pravidel pouze $\bar{i}$-komponentu tohoto vektorového součinu. Její velikost jest

$$\frac{\partial}{\partial y} \left((\omega_x (y - y_0) - \omega_y (x - x_0) \right) - \frac{\partial}{\partial z} (\omega_z (x - x_0) - \omega_x (z - z_0)) = \omega_x + \omega_x = 2\omega_x,$$

neboť jak víme, je také $\bar{\omega}$ pro celé těleso stálé, tedy ω_x, ω_y, ω_z a ovšem stejně i x_0, y_0, z_0 nezávisí na x, y, z.

Jest tedy celkem

$$\operatorname{rot} \bar{v} = 2 (\omega_x \bar{i} + \omega_y \bar{j} + \omega_z \bar{k}) = 2\bar{\omega}. \tag{k}$$

Operace „rot“, působíc na rychlost libovolného bodu, dává nám tedy dvojnásobnou rotační rychlost tělesa co do směru i velikosti. Odtud též její jméno. Zpětným dosazením (k) do (a) plyne

$$\bar{v} = \bar{v}_0 + [\tfrac{1}{2} \operatorname{rot} \bar{v}, \bar{r}], \tag{l}$$

rovnice obecně platná, je-li $\bar{r}$ vektor polohový a $\bar{v}_0$ na x, y, z nezávislé.

VII. Dynamika tuhého tělesa.

89. Podmínky rovnováhy tuhého tělesa.

Mějme úplně volné tuhé těleso. Na jeho různé body ať vnitřní, ať vnější, působtež síly F_ν. Tyto síly budou u skutečného tělesa mimo pohyb způsobovati v něm různá napětí a deformace. Od obojích chceme abstrahovati, používajíce fikce tělesa absolutně tuhého. Každá tuhá tyč bude nám neprodlužitelnou, nestlačitelnou i neprohnutelnou. O napětích bychom mohli nejvýše připustiti, že vznikají podvojně dle principu akce a reakce opačně stejná. Užívajíce fikce absolutně tuhého tělesa při popisování zjevů přírodních, obdržíme ovšem pouze prvé přiblížení ke skutečnosti, pouze přibližný obraz přírodního dění, leč přece cenný, poněvadž v přírodě nacházíme vskutku mnoho těles, u nichž deformace a pod. zůstávají velmi nepatrné, nepřekročí-li síly jisté mezní hodnoty. Slovem, obdržíme dle názvosloví Hamelova „podstatný výsek“ ze skutečna.

Nejobecnějším principem rovnováhy je princip virtuálních posunutí (76d)

$$\sum_\nu F_\nu \delta r_\nu = 0, \qquad (a)$$

kde ν vyčerpává ty body tělesa, v nichž působí síla a kteréž si myslíme číslovány; $\delta \bar{r}_\nu$ jsou jejich virtuálná posunutí. Můžeme je psáti $\delta \bar{r}_\nu = \bar{v}_\nu . \delta t$, myslíme-li si je provedena všechna v témž sice, ale jinak zcela libovolném čase δt; $\bar{v}_\nu$ jsou příslušné rychlosti jednotlivých bodů, ovšem srovnatelné s tuhostí tělesa. Tyto rychlosti mají nejobecnější tvar (88a)

$$\bar{v}_\nu = \bar{v}_0 + [\bar{\omega} \bar{r}_\nu], \qquad (b)$$

kde postupná rychlost $\bar{v}_0$ a rotační $\bar{\omega}$ jsou všem bodům společné. Dosadíme-li do (a) dělíce libovolným, a tedy nenulovým δt, vznikne

$$\sum_\nu \bar{F}_\nu \bar{v}_\nu = \bar{v}_0 \sum_\nu \bar{F}_\nu + \sum_\nu \bar{F}_\nu [\bar{\omega} \bar{r}_\nu] = \bar{v}_0 \sum_\nu \bar{F}_\nu + \bar{\omega} \sum_\nu [\bar{r}_\nu \bar{F}_\nu] = 0. \qquad (c)$$

Druhý člen součtu byl přepsán dle (8a). Ježto u zcela volného tělesa jsou $\bar{v}_0$ a $\bar{\omega}$ úplně libovolné, rozpadá se (c) na

$$\sum_\nu \bar{F}_\nu = 0 \quad \text{a} \quad \sum_\nu [\bar{r}_\nu \bar{F}_\nu] = 0. \qquad (d)$$

V obou součtech sčítáme síly $\bar{F}_\nu$ i jejich momenty $[\bar{r}_\nu \bar{F}_\nu]$ dle obecného pravidla o sčítání volných vektorů. To jsou obecné pod-

mínky rovnováhy tuhého tělesa. Rozepsány zní ve tvaru kartézském

$$\sum_\nu X_\nu = \sum_\nu Y_\nu = \sum_\nu Z_\nu = 0,$$

$$\sum_\nu (y_\nu Z_\nu - z_\nu Y_\nu) = \sum_\nu (z_\nu X_\nu - x_\nu Z_\nu) = \sum_\nu (x_\nu Y_\nu - y_\nu X_\nu) = 0. \quad (e)$$

Těchto šest podmínek rovnováhy úplně volného tělesa stačí, ježto zachycují šest možných stupňů volnosti. Praví: Má-li soustava sil na tuhém tělese působících býti v rovnováze, musí nejen výslednice vnějších sil, ale také výsledný moment, t. j. geometrický součet jejich momentů, býti roven nule a to momentů vztažených k libovolnému bodu prostoru, neboť jsme ničeho nepředpokládali o poloze bodu O, od něhož měříme $\bar{r}$.

90. O ekvivalenci sil.

Nejsou-li splněny podmínky (89 d), nebude úplně volné těleso tuhé v rovnováze, nýbrž bude se pohybovati. Jeho pohyb bude ovládán d'Alembertovým principem (§ 77)

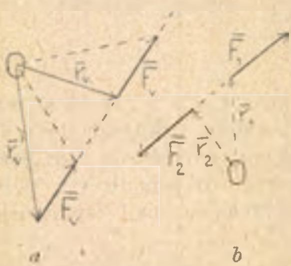
$$\sum_\nu m_\nu \ddot{\bar{r}}_\nu \delta\bar{r}_\nu = \sum_\nu \bar{F}_\nu \delta\bar{r}_\nu,$$

nebo dosazením $\delta\bar{r}_\nu = \bar{v}_\nu \delta t$, jako v paragrafu předchozím,

$$\Sigma m_\nu \ddot{\bar{r}}_\nu \bar{v}_\nu = \bar{v}_0 \Sigma \bar{F}_\nu + \bar{\omega} \Sigma [\bar{r}_\nu \bar{F}_\nu]. \quad (a)$$

m_ν jsou všechny jednotlivé částice tělesa (po smyslu představy molekulárné) nebo jinak psáno dm_ν t. j. objemové elementy, na něž působí síly $\bar{F}_\nu$.

Všimněme si, že, jak zde, tak v (88 d) a v obou větách impulsových, které jsme získali bez d'Alembertova principu, síly vystupují pouze v kombinacích $\Sigma\bar{F}$ a $\Sigma[\bar{r}\bar{F}]$, které, jak je patrno z vektorového tvaru, jsou invariantní vzhledem k užité soustavě souřadnic.



Obr. 84.

Úlohou dynamiky tuhého tělesa jest vyhledati k dané soustavě sil jinou soustavu co nejjednodušší, jež by byla s danou ekvivalentní, to jest takovou, že způsobuje tytéž pohyby tuhého tělesa, a může tudíž danou složitější soustavu v ohledu dynamickém úplně zastupovati.

Všimněme si nejprve, že ani $\Sigma\bar{F}$ ani $\Sigma[\bar{r}\bar{F}]$ se nezmění, posuneme-li kteroukoli sílu $\bar{F}_\nu$ v jejím vlastním směru čili v přímce, v níž působí, a to v libovolném smyslu do libovolného místa, slovem, chápeme-li sílu jakožto vektor na přímku vázaný. Jediný pohled na obr. 84 a nás o tom poučuje, vzpomeneme-li geometrického významu vektorového součinu; patrně je

$$[\bar{r}_\nu \bar{F}_\nu] = [\bar{r}'_\nu \bar{F}_\nu].$$

To ovšem není vlastnost síly, nýbrž vlastnost naší fikce tuhého tělesa. Ba mohli bychom si myslet tuhé těleso definováno předpisem: „Síla je vektor na přímku vázaný."

Z tohoto axiomatu plyne, že síly $\bar{F}_1 = \bar{F}$ a $\bar{F}_2 = -\bar{F}$ (obr. 84 *b*), působící v téže přímce, jsou navzájem v rovnováze, dávajíce výslednou sílu $\bar{F}_1 + \bar{F}_2 = 0$ a výsledný moment $[\bar{r}_1\bar{F}_1] + [\bar{r}_2\bar{F}_2] = 0$. Rovněž je patrno, že v libovolném bodě tuhého tělesa můžeme si mysliti dvě libovolné síly $\bar{F}$ a $-\bar{F}$, téže velikosti ale opačného směru, aniž se rovnováha poruší.

Přejděme nyní k našemu obecnému úkolu a ptejme se především, dá-li se libovolná soustava sil $\bar{F}_\nu$ nahraditi silou jedinou $\bar{F}$, působící v kterémsi zatím neznámém místě, jež budiž určeno polohovým vektorem $\bar{r}$. Kdyby tomu tak bylo, muselo by býti

$$\bar{F} = \Sigma\bar{F}_\nu, \quad [\bar{r}\bar{F}] = \Sigma[\bar{r}_\nu\bar{F}_\nu]. \qquad (b)$$

Násobme druhou rovnici skalárně prvou: nutná podmínka přejde ve tvar

$$\bar{F}[\bar{r}\bar{F}] = \Sigma\bar{F}_\nu . \Sigma[\bar{r}_\nu\bar{F}_\nu] = 0. \qquad (c)$$

Že levá strana rovnice je nulou, je patrno z přepsání na $\bar{r}[\bar{F}\bar{F}] = 0$. Pravá strana však obecně nulou *není*, jak se přesvědčíme velmi snadno na př. rozepsáním součtů a provedením násobení. Tedy:

Libovolná soustava sil na tuhém tělese se obecně jedinou silou nahraditi nedá.

Ale ovšem známe některé zvláštní případy, kdy se soustava sil jedinou silou nahraditi dá. Jsou to tyto:

I. Je-li

$$\Sigma\bar{F}_\nu = 0 = \bar{F} \quad \text{a tedy i} \quad [\bar{r}\bar{F}] = 0 = \Sigma[\bar{r}_\nu\bar{F}_\nu]. \qquad (d)$$

To jsou však podmínky rovnováhy a nastává nezajímavý případ nulové výslednice.

II. Je-li

$$\Sigma[\bar{r}_\nu\bar{F}_\nu] = 0. \qquad (e)$$

Pak je podmínka (*c*) splněna pro libovolné $\Sigma\bar{F}_\nu$. Vztahu (*e*) se vyhoví, je-li buď 1. každé $\bar{F}_\nu = 0$, nebo 2. každé $\bar{r}_\nu = 0$, nebo konečně 3. každé $\bar{F}_\nu \,||\, \bar{r}_\nu$. Prvý případ je triviální: na těleso nepůsobí síly vůbec žádné. V druhém případě musí veškeré síly působiti v témž bodě. Konečně případ třetí jest realisován, směřují-li všechny síly k témuž bodu O (obr. 85).



Obr. 85.

Redukuje se ovšem na případ druhý, posuneme-li všechny síly do tohoto průseku O.

III. Je-li

$$\Sigma\bar{F}_\nu \perp \Sigma[\bar{r}_\nu\bar{F}_\nu], \qquad (f)$$

čili stojí-li výsledná síla kolmo na výsledném momentu, jest podmínka (*c*) rovněž splněna a systém sil se dá nahraditi silou jedinou.

Jest to analogie k větě § 84, že posunutí v rovině a otočení kolem osy na rovině té kolmé se dají nahraditi jediným otočením.

91. Skládání sil rovnoběžných. Těžiště.

Podmínka (f) předchozího paragrafu je vždy splněna, jsou-li všechny síly F_ν rovnoběžné a téhož smyslu. Pak lze psáti $\bar{F}_\nu = k_\nu \bar{F}_0$, kde k_ν je skalární faktor a

$$\bar{F} = \Sigma \bar{F}_\nu = \bar{F}_0 \Sigma k_\nu = k\bar{F}_0, \quad \text{kde} \quad k = \Sigma k_\nu, \tag{a}$$

$$[\bar{r}\bar{F}] = \Sigma[\bar{r}_\nu \bar{F}_\nu] = \Sigma[\bar{r}_\nu, k_\nu \bar{F}_0] = [\Sigma k_\nu \bar{r}_\nu, \bar{F}_0] = [\bar{r}', \bar{F}_0] = [\frac{\bar{r}'}{k}, k\bar{F}_0], \tag{b}$$

kde jsme psali za $\Sigma k_\nu \bar{r}_\nu = \bar{r}'$. Z (b) vidíme, že

$$\bar{r} = \frac{\bar{r}'}{k} = \frac{\Sigma k_\nu \bar{r}_\nu}{\Sigma k_\nu}. \tag{c}$$

Bod charakterisovaný polohovým vektorem $\bar{r}$, v němž působí výsledná síla $\bar{F}$, nahrazující soustavu danýoh sil a s nimi rovnoběžná, nazýváme **středem rovnoběžných sil.**

Užijme svých výsledků na soustavu hmotných bodů, podrobených zemské tíži, soustavu v určité okamžité konfiguraci, kteráž ovšem u tuhého tělesa je stálá. Síly $\bar{F}_\nu$ jsou úměrny hmotám m_ν, jsouce dány jakožto $\bar{F}_\nu = m_\nu \bar{g}$, a zrychlení $\bar{g}$ mají v nepříliš veliké oblasti na povrchu zemském týž směr svislý či vertikální a touž velikost. Lze tedy všechny síly od zemské síly nahradit dle (a) jedinou

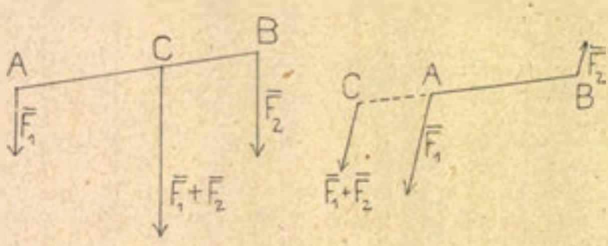
$$\bar{F} = \bar{g}\Sigma m_\nu = M\bar{g}, \tag{d}$$

úměrnou celkové hmotě M. Působiště výsledné síly, které se nazývá **těžištěm**, je dáno průvodičem

$$\bar{r} = \frac{\Sigma m_\nu \bar{r}_\nu}{\Sigma m_\nu} = \bar{r}^*. \tag{e}$$

Leží tedy ve **hmotném středu** těžké soustavy (§ 63), kterýžto jest určitý bod vzhledem k tělesu, nezávisle na poloze počátku O. Ovšem také nezávisí na směru zrychlení $\bar{g}$, t. j. nemění své místo vzhledem k tělesu, nechť je pošineme nebo otočíme jakkoli.

Kdyby síly $\bar{F}_\nu$ byly sice vesměs rovnoběžné, ale některé směru $+\bar{F}_0$, jiné $-\bar{F}_0$, nemění se na našich vývodech nic podstatného. Zna-



Obr. 86.

mení — lze přidati k skalárnímu (a dříve podstatně kladnému) faktoru k_ν a v součtech Σk_ν a $\Sigma k_\nu \bar{r}_\nu$ budou někteří sčítanci kladní, jiní zá-

porní. Ale ovšem musí $\Sigma k_\nu \neq 0$, neboť kdyby $\Sigma k_\nu = 0$, byla by výsledná síla $\Sigma F_\nu = 0$ a naše základní podmínka (90 *f*) by ztrácela smysl.

Užijme vzorců, k nimž jsme došli, na dvě síly rovnoběžné, které působí v bodech A a B tuhého tělesa (obr. 86 *a*). Zvolme bod A za počátek polohových vektorů, ač tím ztrácíme na souměrnosti vzorců; za to zjednodušujeme poněkud diskusi. Vektor $\overline{AB}$ nazveme $\bar{p}$. Máme celkem $\bar{F}_1 = k_1\bar{F}_0$, $\bar{F}_2 = k_2\bar{F}_0$, $\bar{r}_1 = 0$, $\bar{r}_2 = \bar{p}$.

Výslednice jest dle (*a*)

$$\bar{F} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 = (k_1 + k_2)\bar{F}_0$$

a její působiště C dle (*c*) je v

$$\bar{r} = \frac{k_2}{k_1 + k_2}\bar{p}.$$

Bod C dělí vzdálenost AB v poměru $k_2 : k_1$. Vzhledem k němu jsou momenty obou daných sil opačně stejné, neboť

$$[\overline{CA}, \bar{F}_1] = -\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}[\bar{p}\bar{F}_0] = -[\overline{CB}, \bar{F}_2].$$

Ovšem, že můžeme přenésti působiště výslednice v tuhém tělese kamkoli podél přímky procházející bodem C a rovnoběžné s $\bar{F}_0$, aniž se stejnost momentů poruší. Obě síly dané, $\bar{F}_1$ a $\bar{F}_2$, jsou rovnomocny výslednici $\bar{F}$, takže, dáme-li ve zmíněné přímce působiti síle $-\bar{F}$, jsou $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$ a $-\bar{F}$ soustavou rovnovážnou.

Jsou-li $\bar{F}_1$ a $\bar{F}_2$ síly antiparalelní (obr. 86 *b*), stačí ve výsledcích klásti k_2 se znamením záporným. Výslednice zase se rovná součtu (ovšem „algebraickému") daných sil, a její působiště je v

$$\bar{r} = -\frac{k_2}{k_1 - k_2}\bar{p}.$$

Je-li síla $\bar{F}_1$, absolutně vzata, větší než $\bar{F}_1$ (případ obr. 86 *b*), je $|k_1| > |k_2|$, a bod C leží v záporném prodloužení přímky AB, vně na straně síly větší. Je-li však $|k_1| < |k_2|$, je

$$\bar{r} = \frac{k_2}{k_2 - k_1}\bar{p} > \bar{p},$$

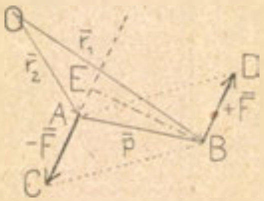
bod C leží v kladném prodloužení přímky AB, tedy zase vně na straně síly větší. Momenty obou daných sil $\bar{F}_1$ a $\bar{F}_2$ vzhledem k C zůstávají i v tomto případě opačně stejné.

92. Silová dvojice.

Ze svých úvah jsme zatím vyloučili případ, že výslednice antiparalelních sil se rovná nule a jest nám tedy k němu se vrátiti. Nejjednodušeji jej lze realisovati dvěma antiparalelními silami $-\bar{F}$ a $+\bar{F}$, působícími v bodech A a B (obr. 87), jichž spojnice je vektor $\overline{AB} = \bar{p}$. Jejich výslednice jest ovšem rovna nule a jejich výsledný moment — počítáme-li $\bar{p}$ kladně od síly $-\bar{F}$ k $+\bar{F}$ — je

$$[\bar{r}_1\bar{F}] + [\bar{r}_2, -\bar{F}] = [\bar{r}_1 - \bar{r}_2, \bar{F}] = [\bar{p}\bar{F}]. \qquad (a)$$

neboť $\bar{r}_1 - \bar{r}_2 = \bar{p}$, nechť O leží kdekoli. Výsledný moment tedy nezávisí na poloze vztažného bodu O, který může ležeti v rovině obou sil, na spojnici AB, na př. v bodě A či B, nebo i kdekoli v prostoru mimo rovinu sil.



Obr. 87.

Kdybychom byli k tomuto zvláštnímu případu přešli od dvou nestejných antiparalelních sil (§ 91), z nichž větší se zmenšuje, byli bychom názorně viděli, jak výslednice se zmenšuje až na nulu, unikajíc současně do nekonečna.

Útvar, jejž jsme popsali, zavedl **Poinsot** (Statique 1803) do dynamiky jakožto útvar elementární, nový dynamický prvek, a nazval jej **dvojice sil** nebo **silová** (couple des forces, force-couple, Kräftepaar). Jest, jak patrno, úplně charakterisován svým **momentem**, jenž jest ovšem dán jakožto vektor, velikostí i směrem. Jeho velikost jest

$$|\overline{pF}| = p \cdot F \cdot \sin(\widehat{pF}), \qquad (b)$$

t. j. numericky rovna ploše rovnoběžníka $ACBD$ (obr. 87), jeho směr takový, aby $\bar{p}$, $\bar{F}$ a $[\bar{p}\bar{F}]$ tvořily pravotočivý systém, čili aby dvojice způsobovala otáčení proti ručičkám hodinovým, díváme-li se na ni stojíce na její rovině, hlavou ve směru jejího momentu. Kolmou vzdálenost sil $+\bar{F}$ a $-\bar{F}$, tedy veličinu $p \sin(\widehat{pF}) = EB$, nazýváme někdy **ramenem dvojice**.

Dvojice nemění svůj moment, nechť je bod vztažný kdekoli. Můžeme tedy vektor $[\bar{p}\bar{F}]$ přenésti do libovolného místa v tělese tuhém, zachováme-li jen jeho velikost a směr. **Moment dvojice je vektor volný.**

Z toho plyne, že můžeme dvojici nahraditi jinou, jen má-li týž moment. Můžeme ji tedy v její rovině kamkoli posunouti nebo jakkoli otočiti, nahraditi síly $\bar{F}$ a $\bar{p}$ silami jinými $\bar{F}_1$ a $\bar{p}_1$, je-li $[\bar{p}\bar{F}] = [\bar{p}_1\bar{F}_1]$, můžeme ji přenésti do jiné roviny s danou rovnoběžné. Všechny tyto věty dají se dokázati grafickým skládáním sil, připojíme-li k danému útvaru (obr. 87) vhodnou soustavu sil, která sama pro sebe je, působíc na tuhém tělese, v rovnováze. Stejně dokazujeme větu o skládání dvojic, jichž momenty přeneseme do téhož bodu prostoru a vektoriálně sečteme. Že jest to dovoleno, vidíme bezprostředně, neboť $\Sigma\bar{F}_\nu$ zůstává při tom rovno nule a $\Sigma[\bar{r}_\nu\bar{F}_\nu]$ se, jak víme, změnou vztažného bodu nemění.

Obrácením téhož pravidla můžeme jedinou dvojici nahraditi několika jinými.

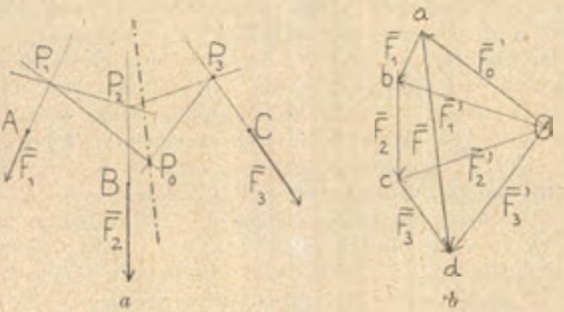
*93. Grafické skládání sil v rovině.

Grafické skládání sil v rovině, jehož technikové často používají, nepůsobí obtíží, pokud směry daných sil se ve výkrese protínají. Výslednice, daná vektorovým součtem, prochází tímto průsekem. U sil rovnoběžných uběhne však průsek do nekonečné vzdálenosti a nedá se konstruktivně nalézti. Jest známo z elementárních knih, že se vy-

hneme této obtíži, když k daným silám $\bar{F}$, přidáme dvě vhodně volené, $+\bar{F}'_0$ a $-\bar{F}'_0$, působící v téže přímce, jichž účinek se ovšem vzájemně ruší. Totéž lze ovšem učiniti, je-li průsek dvou nerovnoběžných sil prakticky (kreslířsky) nedostižný.

Dospělo se k poznání, že tento obrat je výhodný při mnohých úkolech technické mechaniky, a tak vzniklo systematickým propracováním a rozšířením této myšlenky nové odvětví vědní, zvané grafická statika.

Základní princip osvětlíme na jednoduchém příkladě, že jest skládati tři dané síly $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$ a $\bar{F}_3$ (obr. 88*a*). Rozšíření na větší počet



Obr. 88.

leží úplně na snadě. Zkonstruujme si v obr. 88*b* především výslednici $\bar{F}$ pomocí mnohoúhelníka sil. Obdržíme tak její směr i velikost, ale neznáme přímku, v níž působí, či jak chceme krátce říkati její přímku vůdčí. Přidejme tedy k působícím silám dvě nové $+\bar{F}'_0 = \overline{oa}$ a $-\bar{F}'_0 = \overline{ao}$, jimiž jest určen v obraze 88*b* čili v mnohoúhelníku silovém bod *o*, který se nazývá pól. Silám $+\bar{F}'_0$ dejme působiti v libovolném bodě P_1 vůdčí přímky síly $\bar{F}_1$. Složme $+\bar{F}'_0$ a $\bar{F}_1$ ve výslednici; jest co do směru a velikosti dána tratí $\overline{ob} = \bar{F}'_1$ a její vůdčí přímka bude procházeti bodem P_1, jenž je průsekem sil $\bar{F}_1$ a $\bar{F}'_0$. Zakresleme tuto vůdčí přímku do obr. 88*a* jakožto $P_1P_2 \parallel ob$. Nyní složme $\bar{F}'_1 + \bar{F}_2$ na $\bar{F}'_2 = \overline{oc}$ a zakresleme do obr. 88*a* zase její vůdčí přímku $P_2P_3 \parallel oc$, jež ovšem nutně prochází průsekem P_2 sil $\bar{F}'_1$ a $\bar{F}_2$. A tak postupujme i dále až dojdeme k poslední síle $\bar{F}'_n$, kterou v našem případě jest již síla $\bar{F}'_3 = \bar{F}'_2 + \bar{F}_3$. V její vůdčí přímce $P_3P_0 \parallel od$ působí patrně výslednice sil $\bar{F}'_0 + \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3 = \bar{F}'_0 + \bar{F}$. Vyhledáme-li průsek P_0 této síly a zbývající síly $-\bar{F}'_0$, jejíž vůdčí přímkou jest ovšem $P_1P_0 \parallel ao$, obdržíme jím bod, jímž prochází čárko-tečkovaná vůdčí přímka výslednice daných sil $\bar{F} = \bar{F} - \bar{F}'_0 - \bar{F}'_0$, jejíž směr a velikost jest tratí ad dán.

Konstrukce daná body $P_0P_1 \ldots P_n$ nazývá se mnohoúhelník vláknový. Jeho strany jsou rovnoběžny s pólovými paprsky mnohoúhelníka silového.

Kdyby výslednice daných sil $\bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \ldots = \bar{F} = 0$, spadly by konečné body silového mnohoúhelníka (*a* a *d* v obr. 88*b*) a tedy i první a

poslední paprsek pólový v jediný $F'_n = F'_0$. Prvý a poslední paprsek vláknový P_1P_0 a P_nP_{n+1} nespadají však nutně v jediný, ale byly by obecně rovnoběžny. To pak znamená: Výsledná síla F jest sice rovna nule, ale soustava sil dává výslednou dvojici sil $-F'_0$ a $F'_n = F'_0$ působících v t. zv. volných paprscích P_1P_0 a P_nP_{n+1}.

Jen spadají-li tyto v jediný, je-li tedy nejen mnohoúhelník sil, ale také mnohoúhelník vláknový uzavřený, jest daná soustava sil $F_1, \ldots F_n$ v rovnováze, není ani výsledné síly ani výsledné dvojice. V tomto případě jest výsledný obrazec tvaru 88a, kdež ovšem si musíme mysliti výslednici F nahrazenu čtvrtou danou silou $F_4 = -F$.

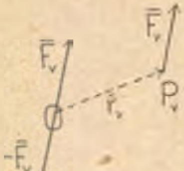
Název mnohoúhelník vláknový má tento význam: Mysleme si na př. případ rovnovážné soustavy $(F_1, \ldots F_4)$ sil, které by působily v rozích mnohoúhelníka $P_1P_2P_3P_0$, vytvořeného z ideálních vláken (neprodlužitelných, bez váhy). Aby síly byly v rovnováze, musí síla F_ν v bodě P_ν a napětí obou vláken v tomto bodě tvořiti soustavu rovnovážnou, t. j. v obr. 88b uzavřený trojúhelník. I jest patrno, že v bodě P_ν (na př. P_2) tato napětí jsou $F'_{\nu-1}$ (zde F'_1) a $-F'_\nu$ (zde $-F'_2$).

Kdyby nebylo vláken P_1P_0 a P_nP_0, kdyby byl mnohoúhelník vláknový otevřený, musely by k silám $F_1, \ldots F_n$ přistoupiti v koncových bodech P_1 a P_n působící síly F'_0 a $-F'_n$, aby byla rovnováha; tak u mnohoúhelníka $P_1P_2P_3$ musely by působiti F'_0 v P_1 a $-F'_3$ v P_3. Pro obecný případ jest nutno připustiti nejen napětí, ale i tlaky ve vláknech, takže lépe než „vláknový“ přiléhá název „tyčový mnohoúhelník“.

Úvahy našim podobné pocházejí v podstatě již od Varignona. Do jejich aplikací na theorii nosičů a vazeb nemůžeme se zde pouštěti; obšírně je vypisují učebnice a knihy o grafické statice a theorii vazeb, jichž autory jsou Culmann, Föppl, Müller (Vratislav), Henneberg a j. Z našich knih sluší uvésti Zd. Bažanta Stavební mechaniku (zvl. I. díl, Praha 1918).

94. Všeobecné skládání sil na tuhém tělese.

Viděli jsme, že všeobecnou soustavu sil F_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$, působících na tuhé těleso, lze jen ve zvláštních případech nahraditi jedinou silou výslednou F. Vždy však lze síly F_ν nahraditi jedinou dvojicí a jedinou silou, jejíž působiště O můžeme voliti libovolně.

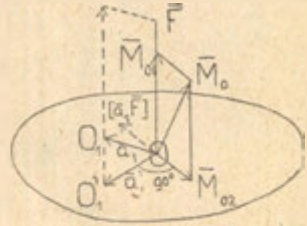


Obr. 89.

Důkaz je velmi snadný: Každou sílu F_ν, působící v bodě P_ν tuhého tělesa (obr. 89), můžeme nahraditi silou F_ν působící v bodě O tělesa a dvojicí momentu $[r_\nu F_\nu]$, jenž jest kolmý na rovině proložené r_ν a F_ν. Neučinili jsme nic jiného, než že jsme přidali síly $+F_\nu$ a $-F_\nu$, působící v témž bodě O, což, jak víme, jest dovoleno. Ostatně jest náš výsledek pouze obrácením věty III, § 90, že lze sílu a moment, stojí-li navzájem kolmo, nahraditi silou jedinou. Složíme-li veškeré síly F_ν, jež nyní působí v témž bodě O, a rovněž veškeré momenty, obdržíme výslednou sílu ΣF_ν působící v bodě O a výsledný moment $\Sigma[r_\nu F_\nu]$.

Tento výsledný moment bude ovšem různý dle volby bodu O, neboť jí se řídí veličiny $\bar{r}_\nu$. A tu se naskýtá otázka, zdali lze bod O voliti vhodně tak, aby výsledný systém byl pokud možno jednoduchý, takový, aby výsledná síla a moment výsledné dvojice měly týž směr. Odpověď je kladná, podobně jako v § 88 při obecném pohybu tělesa a také postup je týž, neboť v obou případech se jedná o týž problém: Jest dán volný vektor (tam $\bar{v}_0$; zde $\Sigma[\bar{r}_\nu \bar{F}_\nu] = \bar{M}_0$) a vektor (tam $\bar{\omega}$, zde $\bar{F} = \Sigma \bar{F}_\nu$) vázaný na přímku, procházející bodem O. Jest najíti jinou, s ní rovnoběžnou přímku, procházející bodem O_1 (resp. O'_1) tak, aby ekvivalentní vektor volný a vázaný spadaly do přímky téže.

Dejme tomu, že jsme došli obecným skládáním sil k výslednici $\bar{F} = \Sigma \bar{F}_\nu$ v bodě O (obr. 90) a k dvojici momentu $\bar{M}_0 = \Sigma[\bar{r}_\nu \bar{F}_\nu]$. Moment $\bar{M}_0$ rozložíme na $\bar{M}_{01} \parallel \bar{F}$ a $\bar{M}_{02} \perp \bar{F}$, takže $\bar{M}_0 = \bar{M}_{01} + \bar{M}_{02}$.



Obr. 90.

Sílu $\bar{F}$ a dvojici $\bar{M}_{02}$, na ni kolmou, můžeme dle obr. 88 nahraditi jedinou silou $\bar{F}$, která působí v jiném bodě O_1, takže výsledkem zbývá tato síla a dvojice momentu $\bar{M}_{01}$ s ní rovnoběžného. Hledání bodu O_1 je jednoduché. Zvolme jej zatím libovolně, charakterisujíce jej polohovým vektorem $\bar{a}_1$. Síla $\bar{F}$ v O a dvojice $\bar{M}_0$ budou ekvivalentní se silou $\bar{F}$ v O_1 a momentem $\bar{M}_0$, k nimž musíme připojiti dvojici $[\bar{a}_1 \bar{F}]$, která vznikla následkem přenesení síly z O do O_1. Bude tedy výsledný moment

$$\bar{M} = \bar{M}_0 + [\bar{a}_1 \bar{F}] = \bar{M}_{01} + \bar{M}_{02} + [\bar{a}_1 \bar{F}].$$

Nyní volme $\bar{a}_1$ tak, aby

$$[\bar{a}_1 \bar{F}] + \bar{M}_{02} = 0.$$

Jest patrno z obrazce, že je to možno. Jeť jak $\bar{M}_{02}$ tak $[\bar{a}_1 \bar{F}]$ kolmé na $\bar{F}$, takže můžeme $\bar{a}_1$ zvoliti v rovině kolmé na $\bar{M}_{02}$ a vhodného smyslu i velikosti. Analyticky obdržíme vhodné $\bar{a}_1$ z podmínky, že má výsledné $\bar{M}$ být rovnoběžné s $\bar{F}$, k čemuž stačí, aby

$$[\bar{F}\bar{M}] = 0, \quad \text{čili} \quad [\bar{F}\bar{M}_0] + [\bar{F}[\bar{a}_1 \bar{F}]] = 0,$$

nebo po rozepsání trojnásobného součinu dle (8 d)

$$[\bar{F}\bar{M}_0] + \bar{a}_1 F^2 - \bar{F}(\bar{F}\bar{a}_1) = 0.$$

Hledáme-li místo $\bar{a}_1$ zvláště $\bar{a}'_1$, které leží v rovině kolmo k $\bar{F}$ bodem O proložené, takže $\bar{a}'_1 \perp \bar{F}$ a tedy $(\bar{F}\bar{a}'_1) = 0$, zbývá

$$\overline{OO'_1} = \bar{a}'_1 = -\frac{[\bar{F}\bar{M}_0]}{F^2} = \frac{[\bar{M}_0 \bar{F}]}{F^2}$$

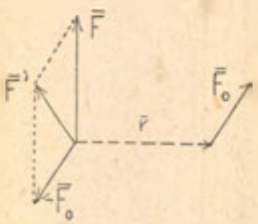
a jeho velikost

$$|\bar{a}'_1| = \frac{M_0 \sin(\widehat{\bar{M}_0 \bar{F}})}{F}$$

a ovšem směr kolmý na $\bar{F}$ a $\bar{M}_0$ v bodě O.

Ostatně je viděti přímo z obr. 89: Má-li $[\bar{a}'_1 \bar{F}]$ rušiti $\bar{M}_{02}$, musí se velikosti obou rovnati, čili $a'_1 F = M_0 \sin(\widehat{\bar{M}_0 \bar{F}})$.

I vidíme: **Nejobecnější soustava sil působících na tuhé těleso dá se nahraditi silou ΣF_v působící v kterémkoli bodě přímky $O'_1 O_1$ a dvojicí, jejíž moment leží v téže přímce.** Přímka ta se nazývá **centrální osou** (**Poinsot**). Ostatně má výsledná dvojice tu význačnou vlastnost, že její moment je **nejmenší z možných**. Jest totiž roven $\bar{M}_{01}$, kdežto pro všechny jiné body O tělesa jakožto působiště výsledné síly je větší, roven $\bar{M}_{01} + \bar{M}_{02}$.



Obr. 91.

Systém „síla a s ní rovnoběžný moment dvojice", který nahrazuje nejobecnější soustavu sil, spojuje Sir R. **Ball***) v celek jakožto obecný prvek dynamický a nazývá jej „wrench"; **Plücker** dává mu jméno „dynama".

Výslednou sílu F a dvojici $[rF_0]$ lze ovšem nahraditi dvěma mimoběžnými silami F_0 a F', jak je okamžitě patrno z obr. 91.

Vidíme, že z libovolné soustavy sil můžeme učiniti soustavu rovnovážnou, přidáme-li k působícím silám sílu $-\Sigma F_v$ a dvojici momentu $-M_0$, event. síly $-F_0$ a $-F'$.

95. Dualismus v kinematice a kinetice tuhého tělesa.

Shrneme-li všechny dosavadní výsledky, můžeme vyřknouti následující věty:

1. Infinitesimální rotace / Síly u tuhého tělesa jsou vektory, vázané na přímky.

2. Protínají-li se osy infinitesimálních rotací, / směry sil, skládají se jako vektory.

3. Dvě rovnoběžné infinitesimální rotace / síly dávají výslednici, která je s nimi rovnoběžná, co do velikosti rovná algebraickému součtu obou a prochází těžištěm obou komponent.

4. Ve zvláštním případě dvou stejně velikých a antiparalelních inf. rotací / sil vzniká dvojice rotací (translace) / sil; ta jest určena svým momentem (translační rychlostí) / (momentem dvojice), jenž jest volný vektor.

5. Obecné posunutí / Libovolný systém sil u tuhého tělesa lze nahradit rotací / silou a dvojicí rotací / silovou, z nichž jedna či druhá může ve zvláštních případech býti nulou.

---

*) Srv. roztomilou **Ballovu** „Dynamickou pohádku", kterou **Seydler** zčeštil (Čas. pro pěst. math. a fys., roč. 18, str. 149—169, 1889).

96. Kinetická energie tuhého tělesa při obecném pohybu.

Dle (71 *b*) je kinetická energie tuhé soustavy z n bodů

$$T = \Sigma \tfrac{1}{2} m_\nu v_\nu^2 \tag{a}$$

a její změna je rovna práci všech sil, tedy vnitřních $\bar{f}_\nu$ i vnějších $\bar{F}_\nu$. V § 76 jsme však dokázali, že vnitřní síly v tuhé soustavě nekonají práci při žádném posunutí srovnatelném s tuhostí vazeb. Zbývá tudíž u tuhého tělesa pouze práce sil vnějších, a

$$dT = \Sigma \bar{F}_\nu d\bar{r}_\nu. \tag{b}$$

Rychlost bodu m_ν v tuhém tělese má dle (88 *a*) obecný tvar

$$\bar{v}_\nu = \bar{v}_0 + [\bar{\omega}\bar{r}_\nu], \tag{c}$$

kde $\bar{v}_0$, rychlost bodu O, k němuž vztahujeme polohové vektory $\bar{r}_\nu$, a rotační rychlost $\bar{\omega}$ jsou veličiny u všech bodů totožné. Jest tedy

$$v_\nu^2 = v_0^2 + |[\bar{\omega}\bar{r}_\nu]|^2 + 2\bar{v}_0[\bar{\omega}\bar{r}_\nu], \tag{d}$$

a tudíž kinetická energie po dosazení do (*a*)

$$T = \tfrac{1}{2} v_0^2 \Sigma m_\nu + \tfrac{1}{2} \Sigma m_\nu |[\bar{\omega}\bar{r}_\nu]|^2 + \Sigma m_\nu \bar{v}_0 [\bar{\omega}\bar{r}_\nu]. \tag{e}$$

Poslední člen pravé strany lze přepsati na

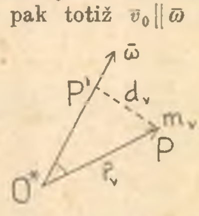
$$[\bar{v}_0\bar{\omega}]\, \Sigma m_\nu \bar{r}_\nu.$$

Jest roven nule a tedy odpadá: 1. je-li $\bar{v}_0 = 0$, t. j. vztažný bod O v prostoru pevný, při čemž zároveň odpadne prvý člen v (*e*); 2. je-li $\bar{\omega} = 0$, jedná-li se tedy o pohyb čistě postupný, při čemž současně odpadne druhý člen (*e*); 3. je-li vztažným bodem O některý bod centrální osy, třeba by těleso mělo postupnou rychlost $\bar{v}_0$; pak totiž $\bar{v}_0 \| \bar{\omega}$ a $[\bar{v}_0\bar{\omega}] = 0$; 4. volíme-li za vztažný bod těžiště O^* tuhé soustavy, neboť pak dle (63 *d*) je $\Sigma m_\nu \bar{r}_\nu = 0$.

Přidržme se této volby. Rovnici (*e*) můžeme vhodně přepsati: Σm_ν jest celková hmota M tělesa; výraz

$$|[\bar{\omega}\bar{r}_\nu]|^2 = \omega^2 r_\nu^2 \sin^2(\widehat{\omega r_\nu}) = \omega^2 d_\nu^2, \tag{f}$$

kde d_ν jest kolmá vzdálenost bodu m_ν od osy rotační (obr. 92). Výraz



Obr. 92.

$$\Sigma m_\nu d_\nu^2 = K_\omega \tag{g}$$

se nazývá **moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose** $\bar{\omega}$ (**Euler**). Z (*e*) pak vzniká

$$T = \tfrac{1}{2} M v_0^2 + \tfrac{1}{2} K_\omega \omega^2. \tag{h}$$

Kinetická energie tělesa se tedy skládá aditivně z **energie pohybu translačního**, kterou obdržíme stejně jako u hmotného bodu jakožto poloviční součin celkové hmoty a čtverce postupné rychlosti, a z **kinetické energie pohybu rotačního**, kterou formálně úplně analogicky obdržíme jakožto poloviční součin momentu setrvačnosti a čtverce rychlosti rotační. Ovšem, kdežto hmota M je pro dané těleso konstantní při všech translacích, závisí moment setrvačnosti K_ω od polohy rotační osy v tělese, jsa obecně pro každou její polohu jiný. Obdobný výraz pro rotaci jediného bodu hmotného známe již z § 54.

Moment setrvačnosti má dle (g) dimensi hmoty násobené čtvercem vzdálenosti. Často pak zavádí se do počtu výraz

$$K_\omega = \Sigma m_\nu d_\nu^2 = \varkappa^2 \Sigma m_\nu, \qquad (i)$$

kde $\varkappa$ je délka vztahem (i) definovaná, jež se nazývá poloměr setrvačnosti čili gyrační radius. Jest to po svém smyslu ta vzdálenost od osy rotační, v níž by v jediném bodě musela býti soustředěna veškerá hmota tělesa, měla-li by tato soustava míti týž moment setrvačnosti jako skutečně dané těleso. Jest ovšem patrno, že poloměr setrvačnosti pro různé polohy rotační osy v tělese jest různý.

97. Práce sil při otáčení tuhého tělesa kolem pevné osy.

Práce síly $\bar{F}$ při otáčení hmotného bodu kolem pevné osy směru $\bar{\omega}^0$ o úhel $d\bar{\varphi} = \bar{\omega} dt$, chápaný jakožto vektor, jest dle ($54\,a, c$) rovna $\bar{M}\bar{\omega} dt$, kde $\bar{M}$ jest statický moment $[\bar{r}\bar{F}]$ síly vzhledem k některému bodu O pevné osy.

Máme-li obecně tuhé těleso, na něž působí vnější síly $\bar{F}_\nu$ a vnitřní $\bar{f}_\nu$, obdržíme celkovou práci jakožto součet prací pouze sil vnějších (§§ 76 a 96), takže se práce ta rovná

$$\Sigma [\bar{r}_\nu \bar{F}_\nu] \bar{\omega} dt = \Sigma \bar{M}_\nu \bar{\omega} dt = \bar{\omega} dt \Sigma \bar{M}_\nu = \bar{M}\bar{\omega} dt. \qquad (a)$$

$\bar{M} = \Sigma \bar{M}_\nu$ jest výsledný moment všech sil vnějších. Napsaná práce jest však dle § 96 rovna zvětšení kinetické energie čili dle ($96\,h$), ježto postupná rychlost $\bar{v}_0 = 0$,

$$\bar{M}\bar{\omega} dt = K_\omega \omega d\omega. \qquad (b)$$

Pišme za

$$\bar{M}\bar{\omega} = M\omega \cos(\widehat{M\omega}) = M_\omega \omega, \qquad (c)$$

kde M_ω jest patrně průmět výsledného momentu na osu otáčecí, neboli dle § 7 součet momentů sil vzhledem k této ose. Z (b) vznikne

$$K_\omega \frac{d\omega}{dt} = K_\omega \frac{d^2\varphi}{dt^2} = M_\omega. \qquad (d)$$

Toto důležité rozšíření věty ($54\,i$) na tuhé těleso se často nazývá pohybovou rovnicí tuhého tělesa pro pohyb otáčivý. Praví, že moment všech vnějších sil vzhledem k ose rotační se rovná momentu setrvačnosti vzhledem k téže ose násobenému úhlovým zrychlením. Její analogický tvar s větou o těžišti (prvou větou impulsovou ($65\,c$) je zřejmý.

Ostatně není věta naše nic jiného, než interpretace druhé věty impulsové napsané ve tvaru ($68\,f$) pro rovinu kolmou na ose otáčecí $\bar{\omega}^0$ jakožto rovinu průmětnou

$$\frac{d}{dt} \Sigma m_\nu [\bar{r}'_\nu \bar{v}'_\nu] = \Sigma [\bar{r}'_\nu \bar{F}'_\nu]. \qquad (e)$$

$\bar{r}'_\nu$ není nic jiného než vzdálenost bodu m_ν od osy otáčecí, měřená vektorem $\bar{d}_\nu = \bar{P'P}$ (obr. 92). Moment $[\bar{r}'_\nu \bar{v}'_\nu]$ složky $\bar{v}'_\nu$ rychlosti ve zmíněné rovině má dle § 17 velikost ωd_ν^2 a směr $\bar{\omega}^0$ čili jest $\bar{\omega} d_\nu^2$. Součet $\Sigma [\bar{r}'_\nu \bar{F}'_\nu]$ je projekce výsledného momentu na svrchu zmíněnou

rovinu čili výsledný moment vzhledem k ose $\bar{\omega}$, ovšem jakožto vektor směru této osy, tedy $\bar{M}_\omega$. Dosazením do (e)

$$\frac{d\bar{\omega}}{dt}\Sigma m_\nu d_\nu^2 = \bar{M}_\omega. \tag{f}$$

To není než rovnice (d). násobená jedničkovým vektorem $\bar{\omega}^0$; naopak obdržíme (d), násobíme-li (f) tímto $\bar{\omega}^0$.

Rovnice (d) podává návod k řešení pohybu fysického kyvadla. Jest to libovolné těleso, zavěšené nad svým těžištěm, takže se může pohybovati ve svislé rovině. Je-li osa O vzdálena od těžiště O^* o délku a, hmota tělesa M a okamžitá výchylka přímky OO^* od rovnovážné polohy vertikální α, je moment tíže kolem osy O $Mga \sin\alpha$ a snaží se úhel α zmenšiti. Úhlová rychlost jest $\omega = \dot{\alpha}$. Označíme-li moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose O písmenem K, dává rovnice (d) pro pohyb kyvadla vztah

$$K\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -Mga.\sin\alpha \quad \text{čili} \quad \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{Mga}{K}\sin\alpha. \tag{g}$$

To jest rovnice totožná s rovnicí pro kyvadlo matematické (57 h) délky

$$l = \frac{K}{Ma}. \tag{h}$$

Tuto délku nazýváme redukovanou délkou kyvadla fysického, pro něž tedy platí veškeré výsledky, k nimž jsme dospěli v § 57, zejména také vzorec pro dobu velmi malých kyvů

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{K}{Mga}}. \tag{i}$$

Výraz Mga, statický moment tíže pro výchylku $\alpha = 90^0$, nazývá se často moment direkční.

98. O momentu setrvačnosti.

Kinetická energie tuhého tělesa, které se otáčí kolem osy proložené libovolným pevným bodem O, jest dle (96 e, f)

$$T = \tfrac{1}{2}\omega^2 K_\omega, \quad \text{kde} \quad T = \tfrac{1}{2}\Sigma m_\nu |[\bar{\omega}\bar{r}_\nu]|^2. \tag{a}$$

Proložme bodem O soustavu souřadnic pevně spojenou s tělesem a hledejme geometrické vlastnosti výrazu K_ω, zvaného moment setrvačnosti. Rotační rychlost $\bar{\omega}$ budiž dána složkami dle tvaru

$$\bar{\omega} = \omega_x\bar{i} + \omega_y\bar{j} + \omega_z\bar{k}\ .$$

a průvodič

$$\bar{r}_\nu = x_\nu\bar{i} + y_\nu\bar{j} + z_\nu\bar{k}. \tag{b}$$

Směrové kosinusy rotační osy jsou pak

$$\cos\alpha = \frac{\omega_x}{\omega}, \quad \cos\beta = \frac{\omega_y}{\omega}, \quad \cos\gamma = \frac{\omega_z}{\omega}. \tag{c}$$

Vytvořme vektorový součin

$$[\bar{\omega}\bar{r}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix}, \qquad (d)$$

kde pro pohodlí jest index u x, y, z vynechán, rozepišme determinant a dosaďme do (a). Tak obdržíme pro dvojnásobnou kinetickou energii

$$2T = \Sigma m \{(\omega_y z - \omega_z y)^2 + (\omega_z x - \omega_x z)^2 + (\omega_x y - \omega_y x)^2\},$$

čili $2T = \omega_x^2 \Sigma m (y^2 + z^2) + \omega_y^2 \Sigma m (z^2 + x^2) + \omega_z^2 \Sigma m (x^2 + y^2)$
$$- 2\omega_x \omega_y \Sigma mxy - 2\omega_y \omega_z \Sigma myz - 2\omega_z \omega_x \Sigma mzx, \qquad (e)$$

nebo zkráceně napsáno

$$2T = \omega_x^2 K_x + \omega_y^2 K_y + \omega_z^2 K_z$$
$$- 2\omega_x \omega_y D_{xy} - 2\omega_y \omega_z D_{yz} - 2\omega_z \omega_x D_{zx}. \qquad (f)$$

Pro součty, jež se vyskytly v (e), zavedli jsme v (f) písmeny K a D s příslušnými indexy. Na prvý pohled jest patrno, že K_x, K_y, K_z nejsou nic jiného než momenty setrvačnosti kolem os X, Y, Z v tělese. Výrazy D_{xy}, D_{yz}, D_{zx} se nazývají momenty deviační (Rankine).

Hned zde můžeme poznamenati toto: Ježto dle definice

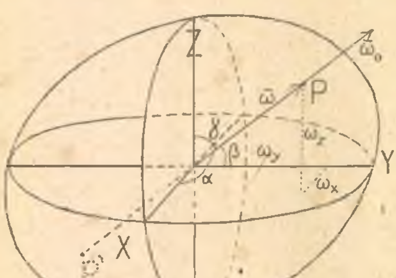
$$K_y + K_z - K_x = 2\Sigma mx^2, \quad \text{tedy} \quad K_y + K_z > K_x. \qquad (g)$$

Jest totiž součtový výraz pravé strany veličina podstatně kladná. Podobně lze psáti pro ostatní osy, takže vidíme, že součet momentů setrvačnosti kolem dvou os navzájem kolmých je vždy větší, než moment setrvačnosti kolem osy třetí.

Dělme obě strany rovnice (f) členem ω^2. Vzpomeneme-li (a) a (c), lze výsledek psáti

$$K_\omega = K_x \cos^2\alpha + K_y \cos^2\beta + K_z \cos^2\gamma$$
$$- 2D_{xy} \cos\alpha \cos\beta - 2D_{yz} \cos\beta \cos\gamma - 2D_{zx} \cos\gamma \cos\alpha. \qquad (h)$$

Dle tohoto vztahu lze počítati moment setrvačnosti pro libovolnou osu (dané α, β, γ) procházející bodem O, známe-li momenty setrvačnosti vzhledem k osám a momenty deviační, čili celkem šest veličin. Ale uvidíme hned, že lze problém tento dále zjednodušiti.



Obr. 93.

Nanesme z bodu O v tělese paprsky ve všech možných směrech a pro každý ten směr, jakožto osu, vypočtěme úhlovou rychlost, kterou by těleso muselo míti, aby kinetická energie otáčení měla danou pevnou hodnotu T_0. Tu úhlovou rychlost nanášejme z O na příslušný směr, t. j. nakresleme si všechny takto nalezené vektory $\bar{\omega}$. Koordináty jejich konců, t. j. bodů P (obr. 93), budou ω_x, ω_y, ω_z a

budou splňovati rovnici (f), kde $2T = 2T_0$. Body P vyplní tedy plochu druhého stupně, centrickou, neboť rovnici (f) hoví jak bod $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$, tak bod $(-\omega_x, -\omega_y, -\omega_z)$. To je patrno též fysikálně, neboť v každém směru musíme z O nanésti jak $+\varpi$, tak $-\varpi$, ježto kinetická energie jest stejná, otáčí-li se těleso kolem téže osy stejně rychle vpravo či vlevo. Známe-li tuto plochu, můžeme snadno určiti moment setrvačnosti pro osu libovolného směru; zjistíme směru tomu příslušný poloměr ω plochy a dělíme dané $2T_0$ čtvercem ω^2. Dle (a) pak jest

$$\frac{2T_0}{\omega^2} = K_\omega. \qquad (i)$$

Zavedeme-li dle (96 i) poloměr setrvačnosti $\varkappa$ vztahem $K_\omega = \varkappa_\omega^2 M$, je $2T_0 = \omega^2 \varkappa^2 M =$ stálé a tedy poloměr setrvačnosti obráceně úměrný poloměru plochy. Ježto K_ω není nikdy nulou, nemůže dle (i) za konečného $2T_0$ býti $\omega = \infty$, naše plocha druhého stupně leží celá v konečnu, je tedy elipsoid. Nazývá se Poinsotův elipsoid setrvačnosti. Pro krátkost budeme jej zváti T-elipsoidem. Často se volí speciálně $2T_0 = 1$ a pak mluvíme o elipsoidu setrvačnosti v pregnantním smyslu nebo Cauchyho či jedničkovém. U toho je dle (i) moment setrvačnosti pro libovolnou osu dán reciprokým kvadrátem příslušného poloměru. Oba elipsoidy ovšem jsou plochy podobné a stejně položené.

Elipsoid setrvačnosti je obecně trojosý. Dosud měla soustava souřadnicová XYZ, proložená bodem O, polohu zcela libovolnou. Můžeme ji však za pevného počátku pootočiti tak, aby nové osy $\Xi H Z$ splynuly s hlavními osami elipsoidu. Pak vypadnou dvojité součiny $\omega_\xi \omega_\eta, \ldots$, ježto jejich koeficienty $D_{\xi\eta}, \ldots$ se stanou rovny nule.

Že tomu jest vskutku tak, přesvědčíme se nejsnáze tímto způsobem: Přejděme od libovolného bodu $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ povrchu T-elipsoidu k sousednímu $\omega_x + \delta\omega_x, \omega_y + \delta\omega_y, \omega_z + \delta\omega_z$.

Diferenciací (f), kde $T = T_0 =$ stálé, máme

$$0 = \omega_x \delta\omega_x K_x + \omega_y \delta\omega_y K_y + \omega_z \delta\omega_z K_z$$
$$- (\omega_x \delta\omega_y + \omega_y \delta\omega_x) D_{xy} - (\omega_y \delta\omega_z + \omega_z \delta\omega_y) D_{yz} - (\omega_z \delta\omega_x + \omega_x \delta\omega_z) D_{zx},$$

což platí pro každý bod elipsoidu. Uvažujme o konečném bodu některé osy, na př. X, kde $\omega_y = 0$ a $\omega_z = 0$. Pak zbude

$$\omega_x (K_x \delta\omega_x - D_{xy} \delta\omega_y - D_{xz} \delta\omega_z) = 0.$$

Kdyby osa X byla osou hlavní Ξ, tu chceme-li zůstati na ploše, která v tom bodě stojí na hlavní ose kolmo, musí $\delta\omega_x = \delta\omega_\xi = 0$, a zbývá podmínka

$$D_{\xi\eta} \delta\omega_\eta + D_{\xi\zeta} \delta\omega_\zeta = 0.$$

Musí ovšem platiti pro každý poměr $\delta\omega_\eta : \delta\omega_\zeta$, který charakterisuje pouze směr infinitesimálního postupu po elipsoidu resp. po tečné jeho rovině. To je splněno pouze tehdy, je-li

$$D_{\xi\eta} = \Sigma m \xi \eta = 0, \qquad D_{\xi\zeta} = \Sigma m \xi \zeta = 0.$$

Stejně dokážeme

$$D_{\eta\zeta} = \Sigma m \zeta \eta = 0$$

u druhých hlavních os. Jsou tedy deviační momenty rovny nule, jsou-li osami souřadnicovými hlavní osy elipsoidu setrvačnosti.

Hlavní osy elipsoidu setrvačnosti se zovou hlavní osy setrvačnosti. Užijeme-li jich, jest kinetická energie dle (f)

$$2T = \omega_\xi^2 A + \omega_\eta^2 B + \omega_\zeta^2 C,$$

kde $$A = K_\xi, \quad B = K_\eta, \quad C = K_\zeta \qquad (j)$$

jsou momenty setrvačnosti vzhledem k hlavním osám setrvačnosti čili t. zv. hlavní momenty setrvačnosti.

Moment setrvačnosti K_ω pro libovolný směr osy, daný nyní úhly α, β, γ vzhledem k hlavním osám setrvačnosti, jest dle (h)

$$K_\omega = \frac{2T}{\omega^2} = A\cos^2\alpha + B\cos^2\beta + C\cos^2\gamma. \qquad (k)$$

Hlavní poloosy setrvačnosti mají dle toho délky

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2T}{A}}, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{2T}{B}}, \qquad \omega_3 = \sqrt{\frac{2T}{C}}, \qquad (l)$$

z čehož u trojosého elipsoidu je patrno, že z hlavních momentů setrvačnosti bude jeden, na př. A, největší, jeden, C, nejmenší a třetí, B, střední, $A > B > C$.

Ve zvláštních případech může ovšem T-elipsoid přejíti v rotační, kde potom lze považovati každou osu kolmou na ose rotační za osu hlavní, nebo dokonce v kouli, kde pak kterákoli osa může býti osou hlavní. Ovšem nemůže elipsoid libovolného tvaru býti T-elipsoidem, neboť víme z (g), že součet kterýchkoli dvou hlavních momentů setrvačnosti musí býti větší než moment třetí, což dle (l) omezuje jinak zcela libovolný poměr mezi délkou poloos elipsoidu. Je-li pevným bodem O, t. j. středem elipsoidu setrvačnosti těžiště O^* tělesa, nazývá se elipsoid centrálním.

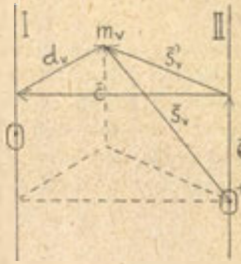
Vidíme z (k), že k určení momentu setrvačnosti vzhledem k libovolné ose rotační, procházející bodem O, nám stačí znáti tři hlavní momenty setrvačnosti. Polohu hlavních os setrvačnosti můžeme často dle geometrického tvaru homogenních těles uhodnouti. V každé rovině symetrie leží totiž jak těžiště, tak hlavní osa setrvačnosti, takže, protínají-li se dvě roviny symetrie, je průsek hlavní osou setrvačnosti procházející těžištěm. Důkaz plyne z toho, že $\Sigma\xi\eta = 0, \ldots.$ A ihned uvidíme, jak snadno lze přejíti od momentů setrvačnosti vzhledem k osám procházejícím těžištěm, ke všem osám jiným. Není snad potřebí zvláště připomínati, že elipsoid setrvačnosti má pevnou polohu v tělese, takže otáčí-li se těleso, otáčí se elipsoid s sebou. Geometrické znázornění momentů setrvačnosti vede k různým větám, z nichž uvádíme tuto: Součet tří momentů setrvačnosti kolem libovolných, ale navzájem kolmých os je týž jako součet tří hlavních momentů setrvačnosti. Zcela obdobná věta platí i pro reciproké hodnoty momentů setrvačnosti. Tak zvaný polární moment setrvačnosti tělesa kolem bodu O jest

$$\Sigma mr^2 = \Sigma m(x^2 + y^2 + z^2).$$

Dle (e) a (f) lze jej psát

$$\Sigma mr^2 = \tfrac{1}{2}(K_x + K_y + K_z),$$

ale ovšem též $$\Sigma mr^2 = \tfrac{1}{2}(A + B + C),$$



Obr. 94.

ježto je invariantní vzhledem k soustavě souřadnic, za které lze tedy voliti hlavní osy.

V ě t a S t e i n e r o v a. Příspěvek hmoty (hmotného elementu) m_ν k momentu setrvačnosti K_ω vzhledem k libovolné ose rotační I procházející libovolným bodem O jest dle (96 g) $m_\nu d_\nu^2$, kde d_ν jest kolmá vzdálenost m_ν od osy rotační. Charakterisujme ji vektorem $\bar{d}_\nu$ v obr. 94. Veďme těžištěm O^* přímku II, rovnoběžnou s danou osou otáčecí, jež jest od ní vzdálena o délku c. Polohu m_ν vzhledem k těžišti zachytněme polohovým vektorem $\bar{s}_\nu$ a kolmou vzdálenost m_ν od II vektorem $\bar{s}_\nu'$. Z obrazce jest patrno, že

$$\bar{d}_\nu + \bar{c} = \bar{s}'_\nu, \qquad \text{tedy} \qquad d_\nu^2 = c^2 + s'^2_\nu - 2\bar{c}\bar{s}'_\nu.$$

Moment setrvačnosti kolem I bude tedy

$$K_\omega = \Sigma m_\nu d_\nu^2 = c^2 \Sigma m_\nu + \Sigma m_\nu s'^2_\nu - 2\bar{c}\Sigma m_\nu \bar{s}'_\nu. \qquad (m)$$

Snadno však dokážeme, že poslední sčítanec je roven nule. Dosadíme-li v něm totiž $\bar{s}'_\nu = \bar{s}_\nu - \bar{\varrho}_\nu$, změní se na

$$-2\bar{c}\Sigma m_\nu \bar{s}_\nu + 2\bar{c}\Sigma m_\nu \bar{\varrho}_\nu.$$

Součet v prvém členu vztažený k těžišti je nulový dle (63 d); součet v druhém členu je jakýsi vektor, ležící na přímce II, takže jeho skalární součin s kolmým na něm $\bar{c}$ je nula. Nyní můžeme interpretovati vztah (m), kde ovšem Σm_ν je celková hmota tělesa M, a druhý součet momentem setrvačnosti K^*_ω vzhledem k přímce II jakožto rotační ose, takto:

M o m e n t s e t r v a č n o s t i t ě l e s a v z h l e d e m k l i b o v o l n é o s e j e s t r o v e n m o m e n t u s e t r v a č n o s t i v z h l e d e m k o s e s d a n o u r o v n o b ě ž n é a t ě ž i š t ě m p r o c h á z e j í c í, k n ě m u ž p ř i č t e m e m o m e n t s e t r v a č n o s t i c e l é h m o t y t ě l e s a s o u s t ř e d ě n é v t ě ž i š t i čili symbolicky

$$K_\omega = K^*_\omega + Mc^2. \qquad (n)$$

Ze všech možných os téhož směru přísluší tedy nejmenší moment setrvačnosti ose procházející těžištěm. Centrální elipsoid jest tedy ze všech elipsoidů setrvačnosti největší. Momenty setrvačnosti tělesa pro všechny osy známe, známe-li je pro všechny osy procházející těžištěm, t. j. známe-li tři hlavní momenty setrvačnosti a směry hlavních os.

Vztah (n) se ještě zjednoduší, zavedeme-li místo momentů poloměry setrvačnosti, neboť je-li

$$K_\omega = M\varkappa_\omega^2, \qquad K^*_\omega = M\varkappa^{*2}_\omega, \qquad \text{platí} \qquad \varkappa_\omega^2 = \varkappa^{*2}_\omega + c^2, \qquad (o)$$

z čehož plyne jednoduchá konstrukce $\varkappa_\omega$ dle Pythagorovy věty.

Věta Steinerova je zvláště důležita pro theorii k y v a d l a p ř e v r a t n é h o nebo r e v e r s n í h o. Doba kyvu kyvadla fysického jest dle (97 i) táž, jako doba kyvu kyvadla matematického délky $l = K/Ma$. Nanesme tuto délku od O přes O^*; dojdeme k bodu O' kyvadla

fysického, který leží na druhé straně těžiště O^* ve vzdálenosti $O^*O' = b = l - a$. Tento bod zve se **středem kyvu** a má tu zvláštní vlastnost, že kývá jakožto součást fysického kyvadla ve stejném tempu, jakoby byl k bodu O připoután bezvážnou nití, kdežto všechny body bližší k O kývají rychleji a vzdálenější od O pomaleji, než by kývaly, kdyby podobným způsobem byla jejich tuhá vazba v tělese uvolněna. Co se stane, zavěsíme-li kyvadlo, obrátivše je, nyní v bodě O'? Nový moment setrvačnosti K' a nový moment direkční budou nyní

$$K' = K^* + M(l-a)^2 \quad \text{a} \quad Mg(l-a),$$

kdežto staré byly

$$K = K^* + Ma^2 \quad \text{a} \quad Mga.$$

Dosadíme-li do výrazu pro novou délku redukovaného kyvadla

$$l' = \frac{K'}{M(l-a)} = \frac{K^*}{M(l-a)} + l - a$$

za starou délku

$$l = \frac{K}{Ma} = \frac{K^*}{Ma} + a, \qquad (o)$$

ihned najdeme, že $l = l'$, kyvadlo obrácením nezměnilo svou dobu kyvu. Naopak můžeme říci: Najdeme-li pokusně na přímce procházející těžištěm O^* po obou jeho stranách takovou dvojici bodů O a O', že kyvadlo v nich zavěšené má touž délku kyvu, jest vzdálenost OO' rovna redukované délce kyvadla pro tuto dobu kyvu. Toho lze použíti k stanovení zrychlení zemské tíže kyvadlem fysickým dle vzorce (57 *h*). Dosadíme-li do (*o*) za K^*/M čtverec poloměru setrvačnosti $\varkappa^2$ kyvadla pro osu procházející těžištěm a $l - a = b$, přejde v symetrickou rovnici pro vzdálenosti OO^* a $O'O^*$

$$ab = \varkappa^2.$$

Její diskusi nebudeme dále prováděti, poznamenávajíce jen, že doba kyvu fysického kyvadla je nejmenší, je-li $a = b$, jsou-li tedy oba body závěsné položeny symetricky vzhledem k těžišti.

Výpočet momentů setrvačnosti i deviačních, jakož i poloměrů setrvačnosti skutečných těles jest úlohou počtu integrálního, neboť za m_ν nastoupí elementy hmotné, vyplňující elementy objemové, $dm = \varrho\, dx\, dy\, dz$, kde zase ještě u tělesa nehomogenního může specifická hmota ϱ býti funkcí souřadnic x, y, z, takže obecně jest

$$K_x = \iiint (y^2 + z^2) f(xyz)\, dx\, dy\, dz, \ldots\ldots$$

$$D_{yz} = \iiint yz f(xyz)\, dx\, dy\, dz, \ldots\ldots$$

$$\varkappa_x^2 = K_x : \iiint f(xyz)\, dx\, dy\, dz \ldots\ldots$$

Výpočet se často velice zjednoduší vhodnou volbou objemových elementů. Příklady nebudeme zde počítati, najde se jich hojnost v učebnicích vyšší analyse. Nejpotřebnější obsahují i J. **Vojtěchovy** „Základy matematiky“. Uvedeme zde pouze mnemotechnické pravidlo z obšírné **Routhovy** knihy o dynamice, které platí pro symetrická, homogenní tělesa:

Čtverec poloměru setrvačnosti pro osu symetrie = $(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5})$ součtu čtverců poloos na ní kolmých. (r)

Faktor $\frac{1}{3}$ platí pro tělesa pravoúhelníková, $\frac{1}{4}$ pro desky eliptického (kruhového) tvaru, $\frac{1}{5}$ pro tělesa elipsoidická. Tak jest moment setrvačnosti kruhu poloměru a pro jeden z jeho průměrů $\frac{1}{4}Ma^2$, moment setrvačnosti pravoúhelníku o stranách a a b kolem osy kolmé na jeho rovině a středem procházející $\frac{1}{3}M(a^2+b^2)$, moment setrvačnosti elipsoidu o poloosách a, b, c kolem prvé osy $\frac{1}{5}M(b^2+c^2)$; koule o poloměru a kolem průměru $\frac{2}{5}Ma^2$.

99. O impulsmomentu. Lineární funkce vektorová. Tensory.

Impulsmomentem neboli otáčecím impulsem jsme zvali v (68 c) výraz

$$\bar{U} = \Sigma[\bar{r}_\nu, m_\nu \bar{v}_\nu], \qquad (a)$$

jejž nutno vypočísti z daných hmot a rychlostí pro určitý bod vztažný O. Je-li to pevný bod v tuhém tělese, který má rychlost $\bar{v}_0 = 0$, takže $\bar{v}_\nu = [\bar{\omega}\bar{r}_\nu]$, je impulsmoment

$$\bar{U} = \Sigma m_\nu [\bar{r}_\nu [\bar{\omega}\bar{r}_\nu]] = \Sigma m_\nu \{\bar{\omega} r_\nu^2 - \bar{r}_\nu (\bar{\omega}\bar{r}_\nu)\}. \qquad (b)$$

Prvý součet pravé strany je vektor směru $\bar{\omega}$, druhý pak vektor směru obecně jiného. Rozepišme (b) na složky dle souřadnic, z nichž však napíšeme pouze složku v ose X, kde ještě zase u x, y, z a m indexy ν vynecháváme. I bude

$$U_x = \Sigma m \{\omega_x (x^2 + y^2 + z^2) - x(\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z)\}$$

čili

$$U_x = \omega_x \Sigma m (y^2 + z^2) - \omega_y \Sigma mxy - \omega_z \Sigma mxz. \qquad (c)$$

Kdybychom ve zvláštním případě položili osy X, Y, Z do hlavních os setrvačnosti, bylo by $U_\xi = \omega_\xi A$ atd., a tedy

$$\bar{U} = \omega_\xi A\bar{\imath} + \omega_\eta B\bar{\jmath} + \omega_\zeta C\bar{k}. \qquad (d)$$

Obecně jsou však dle (c) a podobných druhých dvou rovnic vektory $\bar{U}$ a $\bar{\omega}$ spojeny relacemi

$$\begin{aligned} U_x &= k_{11}\omega_x + k_{12}\omega_y + k_{13}\omega_z, \\ U_y &= k_{21}\omega_x + k_{22}\omega_y + k_{23}\omega_z, \\ U_z &= k_{31}\omega_x + k_{32}\omega_y + k_{33}\omega_z. \end{aligned} \qquad (e)$$

V takovémto případě říkáme, že vektor $\bar{U}$ je lineární vektorovou funkcí vektoru $\bar{\omega}$ a to symetrickou, je-li jako zde $k_{12} = k_{21}$ a pod.

Krátce se psává $\bar{U} = (k)\bar{\omega}$.

Přepočítáním z rovnic (e) plyne ovšem, že současně též $\bar{\omega}$ je lineární vektorovou funkcí vektoru $\bar{U}$. Psává se dle symboliky obvyklé v theorii lineárních substitucí $\bar{\omega} = (k)^{-1}\bar{U}$.

Srovnáním (e) a (c) plyne, že

$$\begin{aligned} k_{11} &= \Sigma m(y^2+z^2) = K_x, & k_{12} = k_{21} &= -\Sigma mxy = -D_{xy}, \\ k_{22} &= \Sigma m(z^2+x^2) = K_y, & k_{23} = k_{32} &= -\Sigma myz = -D_{yz}, \\ k_{33} &= \Sigma m(x^2+y^2) = K_z, & k_{31} = k_{13} &= -\Sigma mzx = -Dzx, \end{aligned} \qquad (f)$$

že tedy koeficienty k v diagonále schematu (e) jsou momenty setrvačnosti dle os, a ostatní záporné momenty deviační.

Vzorci (e) přiřaďuje se každému vektoru $\bar{\omega}$ jiný $\bar{U}$ jednoznačně a lineárně. To přihází se ve fysikálních úvahách velmi často. Schema koeficientů k, které je zde dle diagonály symetrické, se nazývá dyada (Gibbs: dyadic), zde symetrická. Platí ovšem pro určitý vztažný bod.

Zavedeme-li do počtu skalár L, rovný polovičnímu skalárnímu součinu vektorů $\bar{U}$ a $\bar{\omega}$, nalezneme snadno výpočtem u symetrické vektorové funkce

$$\begin{aligned} 2L = \bar{U}\bar{\omega} = k_{11}\,\omega_x^2 + k_{22}\omega_y^2 + k_{33}\omega_z^2 \\ + 2\,k_{12}\omega_x\omega_y + 2\,k_{23}\omega_y\omega_z + 2\,k_{31}\omega_z\omega_x, \end{aligned} \tag{g}$$

a lehce potvrdíme, že

$$U_x = \frac{\partial L}{\partial \omega_x}, \quad U_y = \frac{\partial L}{\partial \omega_y}, \quad U_z = \frac{\partial L}{\partial \omega_z}. \tag{h}$$

Význam skaláru L v našem zvláštním případě jest velmi jednoduchý — srovnáme-li (g) a (98f), vidíme ihned, že $L \neq T =$ kinetické energii při otáčení tuhého tělesa kolem osy procházející bodem O. Ježto jest to podstatně kladná veličina, jest patrno, že vektory $\bar{U}$ a $\bar{\omega}$ mohou svírati pouze úhly od 0^0 až blízce 90^0, nikoli však úhel tupý.

Koeficienty $k_{11}, \ldots$ ve vztazích (e) jsou momenty setrvačnosti. Jsou to zvláštní veličiny, jež nejsou ani skaláry, ani vektory. Mají určitou velikost pro určitý směr, ale směr oboustranný, neboť určité přímce jakožto ose rotační odpovídá týž moment, nechť jest postup vektoru $\bar{\omega}$ v ní ten či onen, $+\bar{\omega}$ či $-\bar{\omega}$, nechť se děje otáčení vpravo či vlevo.

Znázorňujeme-li vektory šipkou, mohli bychom tyto veličiny znázornit šipkou opeřenou na obou koncích ——> nebo >——<. Ježto tohoto rázu jsou tahy a tlaky v nauce o pružnosti, nazývá Voigt podobné veličiny tensory. Velmi často vystupují podobně jako zde, kde jejich soubor pro určitý bod vztažný lze konstrukcí reciprokých odmocnin znázorniti centrickou plochou druhého stupně, zde elipsoidem, ježto momenty setrvačnosti jsou vždy kladné. Obecně mohl by to býti též hyperboloid. Pak mluví Voigt o tensortriplu, jenž jest dán šesti tensorkomponentami k_{11}, $k_{12} = k_{21}$, ... k_{33}, anebo údajem tří hlavních momentu setrvačnosti a třemi údaji určujícími směry hlavních os, tedy zase šesti veličinami. To jest velmi časté ve fysice látek krystalinických. Jsou-li tři hlavní osy příslušné plochy druhého stupně stejné, zvrhne se tensortripl na skalár. Příkladem je moment setrvačnosti homogenní koule pro její střed nebo tlak v homogenní kapalině bez tření.

Jaké je analytické kriterion, abychom rozeznali komponenty tensorové od vektorových? Máme-li dva libovolné vektory $\bar{q}$ a $\bar{s}$, a jejich skalární součin

$$S = \bar{q}\bar{s} = q_x s_x + q_y s_y + q_z s_z,$$

jest

$$q_x = \frac{\partial S}{\partial s_x}, \quad q_y = \frac{\partial S}{\partial s_y}, \quad q_z = \frac{\partial S}{\partial s_z}, \tag{i}$$

čili vektorové komponenty lze znázorniti jakožto diferenciální kvocienty skaláru dle komponent vektoru, na př. kdyby $\bar{s}$ byl posiční vektor, tedy dle koordinát. Komponenty tensorové takto znázorniti nelze. Za to z (g), (h), (e) plyne, že

$$\begin{aligned} k_{11} = \frac{\partial^2 L}{\partial \omega_x^2}, \quad k_{22} = \frac{\partial^2 L}{\partial \omega_y^2}, \quad k_{33} = \frac{\partial^2 L}{\partial \omega_z^2}, \\ k_{12} = k_{21} = \frac{\partial^2 L}{\partial \omega_x \partial \omega_y}, \quad k_{23} = \frac{\partial^2 L}{\partial \omega_y \partial \omega_z}, \quad k_{31} = \frac{\partial^2 L}{\partial \omega_z \partial \omega_x} \end{aligned} \tag{j}$$

že tedy lze tensorové komponenty znázorniti druhými diferenciálními kvocienty skaláru, na př. kdyby ω byl vektor polohový $ix + jy + kz$, druhými diferenciálními kvocienty dle souřadnic. Na to lze navázati transformaci tensorových složek při transformaci souřadnic.

100. Další o impulsmomentu.

Pro složky impulsmomentu

$$\bar{U} = iU_x + jU_y + kU_z = \Sigma[r_\nu, m_\nu v_\nu] \tag{a}$$

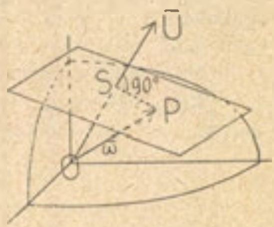
platí dle (99 *h*), nahradíme-li L kinetickou energií T

$$U_x = \frac{\partial T}{\partial \omega_x}, \quad U_y = \frac{\partial T}{\partial \omega_y}, \quad U_z = \frac{\partial T}{\partial \omega_z}. \tag{b}$$

Můžeme tedy psáti dle symboliky operátoru Hamiltonova (§ 11)

$$\bar{U} = i\frac{\partial T}{\partial \omega_x} + j\frac{\partial T}{\partial \omega_y} + k\frac{\partial T}{\partial \omega_z} = \left(i\frac{\partial}{\partial \omega_x} + j\frac{\partial}{k\omega_y} + k\frac{\partial}{\partial \omega_z}\right) T = \nabla_\omega T. \tag{c}$$

Považujeme-li v pravoúhlé soustavě ω_x, ω_y, ω_z za souřadnice konečného bodu vektoru ω, vedeného z počátku koordinát jistým směrem, jest plochou stálého $2T$ (totiž $2T = 2T_0$) T-elipsoid. Vektor $\bar{U} = \nabla_\omega T$, přiřaděný určitému poloměru $\bar{\omega}$ plochy té, stojí jakožto gradient kolmo na ploše $2T = 2T_0$ v konečném bodě příslušného poloměru ω, t. j. kolmo na tečné rovině v tom bodě k T-elipsoidu vedené. Z toho plyne jednoduchý předpis, jak získáme směr impulsmomentu $\bar{U}$ příslušného k určitému ω. Nakreslíme T-elipsoid (obr. 95), vedeme $\bar{\omega} = OP$, bodem P položíme tečnou rovinu a spustíme na ni z bodu O kolmici OS. Svým směrem udává nám směr impulsmomentu $\bar{U}$. Jeho velikost se rovněž velmi snadno najde. Jeť



Obr. 95.

$$OS = OP . cos(\widehat{\omega U}) = |\bar{\omega}| cos(\widehat{\omega U}).$$

Dle (99 *g*) jest

$$\bar{\omega}\bar{U} = \omega U cos(\widehat{\omega U}) = U . OS = 2T_0,$$

takže

$$U = |\bar{U}| = \frac{2T_0}{OS}. \tag{d}$$

Velikost impulsmomentu jest tedy obráceně úměrna délce kolmice OS, nebo u jedničkového elipsoidu setrvačnosti rovna reciproké hodnotě této délky.

Z vlastnosti elipsoidu je přímo patrno, že ω a U mají týž směr pouze tehdy, leží-li oba v hlavních osách T-elipsoidu, tedy obecně pro tři zvláštní směry. Ovšem, kdyby byl T-elipsoid ve zvláštním případě elipsoidem rotačním nebo dokonce koulí, je $\bar{U} \| \bar{\omega}$ ve všech bodech rovníku rotační plochy resp. ve všech bodech koule vůbec.

Promítneme-li impulsmoment na libovolnou osu otáčecí, čili jinými slovy, utvoříme-li $U\bar{\omega}^0 = U_\omega$, dostáváme

$$U_\omega = \frac{U\bar{\omega}}{\omega} = \frac{2\,T_0}{\omega} = \omega K_\omega, \quad \text{ježto} \quad \omega^2 K_\omega = 2\,T_0. \tag{e}$$

Průmět U_ω jest moment všech hybností vzhledem k ose $\bar{\omega}$.

Dle rovnic (99 e) lze obrácením funkčního vztahu vyjádřiti veškerá $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ jakožto lineární homogenní funkce složek U_x, U_y, U_z, a tedy i funkci

$$2\,T = \bar{\omega}\bar{U} = \omega_x U_x + \omega_y U_y + \omega_z U_z \tag{f}$$

jakožto kvadratickou homogenní funkci týchž složek*).

$$2\,T = f(U_x, U_y, U_z) = \text{stálé} = 2\,T_0$$

jest zase, chápeme-li nyní U_x, U_y, U_z za souřadnice konečného bodu vektoru $\bar{U}$, plochou druhého stupně a to, ježto U_x, U_y, U_z jsou vesměs konečné, zase trojosý elipsoid, zvaný e l i p s o i d e m i m p u l s m o m e n t ů, čili r e c i p r o k ý m, nebo i U-elipsoidem. Z (d) je patrno, že oba elipsoidy, T- i U-elipsoid mají týž směr os, jenže dřívější osa největší bude nyní nejmenší a naopak. A mohli bychom mutatis mutandis opakovati dřívější vývody, které zde učí pomocí U-elipsoidu najíti ku každému $\bar{U}$ příslušnou rychlost rotační $\bar{\omega}$; je zase kolmá na tečné rovině a obráceně úměrná délce kolmice z O na ní spuštěné.

Reciproký vztah obou elipsoidů snadno najdeme též z úvah vektoranalytických. Jako v (99 b) pišme

$$\bar{U} = \Sigma m[\bar{r}, \bar{\omega}\bar{r}] = \bar{\omega}\Sigma m r^2 - \Sigma m\bar{r}.(\bar{\omega}\bar{r}). \tag{g}$$

Změna impulsmomentu, která nastane, vzroste-li za nezměněných $\bar{r}$ rotační rychlost o malý obnos $\delta\bar{\omega}$, bude

$$\delta\bar{U} = \delta\bar{\omega}\Sigma m r^2 - \Sigma m\bar{r}.\delta(\bar{\omega}\bar{r}).$$

Násobíme-li celou rovnici skalárně rotační rychlostí $\bar{\omega}$, máme

$$\bar{\omega}\delta\bar{U} = \bar{\omega}\delta\bar{\omega}.\Sigma m r^2 - \Sigma m(\bar{\omega}\bar{r})\,\delta(\bar{\omega}\bar{r}) = \delta\bar{\omega}\,(\bar{\omega}\Sigma m r^2 - \Sigma m(\bar{\omega}\bar{r})\,\bar{r}) = \bar{U}\delta\bar{\omega}$$

čili

$$\bar{\omega}\delta\bar{U} = \bar{U}\delta\bar{\omega}. \tag{h}$$

Při konstrukci našich elipsoidů však klademe

$$\bar{\omega}\bar{U} = 2\,T = \text{stálé} = 2\,T_0 \quad \text{čili} \quad \bar{\omega}\delta\bar{U} + \bar{U}\delta\bar{\omega} = 0. \tag{i}$$

Rozumíme-li nyní tím $\delta\bar{\omega}$ a $\delta\bar{U}$ takové změny, při nichž zůstává $\bar{\omega}\bar{U}$ = stálé, t. j. zůstáváme-li stále na povrchu elipsoidu, plyne spojením (h) a (i)

$$\bar{\omega}\delta\bar{U} = \bar{U}\delta\bar{\omega} = 0.$$

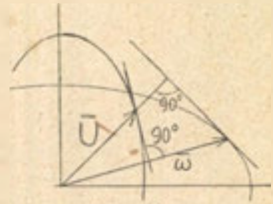
Tyto rovnice praví: $\bar{\omega}$ (resp. $\bar{U}$) jest kolmé na všech nekonečně malých obloučcích $\delta\bar{U}$ (resp. $\delta\bar{\omega}$), které vedeme z konečného bodu vektoru $\bar{U}$ (resp. $\bar{\omega}$), jinými slovy, kolmé na rovině tečné. Tato vlast-

---

*) Přiřaďují totiž vztahy (99 e) kolineární transformací každému bodu prostoru jakožto konečnému bodu vektoru $\bar{\omega}$, vedenému z bodu O, jiný bod prostoru, konečný to bod vektoru $\bar{U}$, vedeného z téhož počátku O.

nost jest znázorněna obr. 96 pro jednoduchost výkresu v meridiánovém řezu elipsoidů rotačních.

Rovnici obecného U-elipsoidu bychom snadno získali z (99e). Omezíme se však na rovnici vztaženou k hlavním osám setrvačnosti. Rovnice T-elipsoidu byla v tomto případě (98j), takže hlavní poloosy setrvačnosti byly (99l).



Obr. 96.

Ježto jsou všechny deviační momenty nulami, mají transformační rovnice (99e) jednoduchý tvar

$$U_\xi = \omega_\xi A,\quad U_\eta = \omega_\eta B,\quad U_\zeta = \omega_\zeta C. \qquad (k)$$

Dosazením do (98j) obdržíme rovnici U-elipsoidu

$$2T = \frac{U_\xi^2}{A} + \frac{U_\eta^2}{B} + \frac{U_\zeta^2}{C}. \qquad (l)$$

Jeho hlavní poloosy jsou

$$U_1 = \sqrt{2TA},\quad U_2 = \sqrt{2TB},\quad U_3 = \sqrt{2TC}. \qquad (m)$$

Jest viděti, že

$$U_1 = \omega_1 A,\quad U_2 = \omega_2 B,\quad U_3 = \omega_3 C$$

a též

$$\omega_1 U_1 = \omega_2 U_2 = \omega_3 U_3 = 2T. \qquad (n)$$

Obecný výraz pro libovolný impulsmoment vztažený k hlavním osám byl již napsán v (99d) a jest

$$\bar U = \bar\imath U_\xi + \bar\jmath U_\eta + \bar k U_\zeta = \bar\imath \omega_\xi A + \bar\jmath \omega_\eta B + \bar k \omega_\eta C. \qquad (o)$$

a jeho velikost jest dána skalárním čtvercem

$$U^2 = \omega_\xi^2 A^2 + \omega_\eta^2 B^2 + \omega_\eta^2 C^2. \qquad (p)$$

101. Otáčení tělesa kolem dané osy. Osa volná.

Mějme libovolné těleso, roztočené vlivem vnějších sil a dvojic kolem libovolné osy procházející těžištěm, jež tedy bylo v klidu a představme si, že všechny vnější síly náhle přestanou působiti. Jaký bude další pohyb tělesa? Zůstane otáčecí osa osou i nadále, neměníc svůj směr v tělese a prostoru? Na prvý pohled by se tak zdálo, ale vskutku obecně tomu tak není.

Dle prvé věty impulsové (65e) bude

$$\frac{d\bar I}{dt} = \Sigma \bar F = 0, \quad \text{tedy} \quad \bar I = \text{stálé}, \qquad (a)$$

a impuls dle (65c)

$$\bar I = \Sigma m\bar v = M\bar v^* = 0, \qquad (b)$$

který dle předpokladu $\bar v^* = 0$ byl nulou, nulou zůstane. Těžiště samo setrvá v témž místě prostoru.

Z druhé věty impulsové (68c)

$$\frac{d\bar{U}}{dt} = \frac{d}{dt}\Sigma[\bar{r}, m\bar{v}] = \Sigma[\bar{r}, \bar{F}] = 0 \qquad (c)$$

vidíme, že také impulsmoment zůstane stálý co do směru i velikosti.

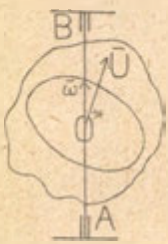
Konečně z věty o kinetické energii § 71

$$dT = \Sigma\bar{F}d\bar{r} = 0 \qquad (d)$$

plyne, že také tato zůstane neproměnnou.

Ale o vlastní rotaci $\bar{\omega}$ nevíme ničeho, leč že rotační osa bude procházeti těžištěm, v prostoru pevným.

Donuťme těleso, aby zachovávalo co do směru i velikosti rotační rychlost $\bar{\omega}$, tím, že je opatříme hmotnou vertikální osou AB, která prochází těžištěm a pohybuje se v ložiskách (obr. 97), v nichž tedy mohou působiti vnější síly. Sestrojme v něm centrální elipsoid setrvačnosti, který se ovšem otáčí spolu s tělesem, takže můžeme jak zde, tak často i při jiných problémech abstrahovati od tvaru tělesa a mysliti si je nahraženo elipsoidem setrvačnosti pro určitý pevný bod.



Obr. 97.

Je patrno, že obecně nemá impulsmoment $\bar{U}$ směr rotační rychlosti $\bar{\omega}$, takže se při otáčení mění, třeba ne co do své velikosti, ale co do svého směru. Musí tedy, aby se rotační pohyb udržoval, působiti vnější síly, resp. dvojice $\Sigma[\bar{r}\bar{F}] = \dot{\bar{U}}$. V našem případě vertikální, těžištěm procházející osy váha tělesa momentem nepřispívá, majíc směr rotační rychlosti a ruší se reakcí spodního ložiska proti vertikálnímu tlaku. Vnější působící dvojice se však projevují reakcí proti postrannímu tlaku v ložiskách; ježto pak, jak je zřejmo, tyto dvojice musí stále rotovati s tělesem v absolutním prostoru, obíhají postranní tlaky v ložiskách stále kol dokola a způsobují t. zv. vytloukání ložisek.

Tlaky na ložiska přestávají pouze tehdy, má-li $\bar{U}$ týž směr s $\bar{\omega}$, tedy; je-li osa rotační jednou z hlavních os setrvačnosti. Takovou osu nazýváme o s o u v o l n o u. Prochází těžištěm a je určena analyticky tím, že deviační momenty na ni vztažené jsou rovny nule.

To vše odečtli jsme z popisu rotace pomocí elipsoidu setrvačnosti a pojmu impulsmomentu. Analyticky mohli jsme postupovati takto: Podmínka je $\bar{U} \parallel \bar{\omega}$ čili $[\bar{U}\bar{\omega}] = 0$. Ježto za rotace je $v = [\bar{\omega}\bar{r}]$, je

$$\bar{U} = \Sigma m[\bar{r}\bar{v}] = \Sigma m[\bar{r}[\bar{\omega}\bar{r}]] = \bar{\omega}\Sigma mr^2 - \Sigma m\bar{r}(\bar{\omega}\bar{r}). \qquad (e)$$

Prvý člen je rovnoběžný s $\bar{\omega}$; má-li také druhý býti rovnoběžný, musí

$$\Sigma m[\bar{r}\bar{\omega}](\bar{r}\bar{\omega}) = 0. \qquad (f)$$

Vezmeme-li za rotační osu Z, je $\omega_x = \omega_y = 0$, $\omega_z = \omega$ a (f) přejde rozepsáním ve tvar obecně

$$\Sigma m(\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z)\begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{vmatrix} = 0, \qquad (g)$$

čili po dosazení našich hodnot

$$\Sigma m\omega z(iy\omega - jx\omega) = 0, \quad \text{z něhož} \quad \Sigma mzy = \Sigma mzx = 0. \qquad (h)$$

Význam deviačních momentů, dle něhož právě Rankine zvolil pro ně toto jméno, jest zle názorně patrný. K zachování neproměnného $\bar{\omega}$ musí působiti moment vnějších sil dle (e)

$$\bar{M} = \frac{d\bar{U}}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{\omega}\Sigma mr^2 - \Sigma m\bar{r}(\bar{\omega}\bar{r})). \qquad (i)$$

Vedle $\bar{\omega}$ má býti neproměnnou s časem také velikost $|\bar{r}|$, která podmiňuje uspořádání hmoty tělesa. Každé $\bar{r}$ (vedené z pevného bodu, na př. z pevného ložiska) se mění jen co do svého směru, jeho konečný bod obíhá v kruhu kolem rotační osy, takže změna $d\bar{r}$ je kolmá jak na $\bar{r}$, tak na $\bar{\omega}$. Z (i) nám tedy zbude pouze

$$\bar{M} = -\Sigma m\frac{d\bar{r}}{dt}(\bar{\omega}\bar{r}), \qquad \text{kde} \qquad \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{v} = [\bar{\omega}\bar{r}],$$

čili

$$\bar{M} = -\Sigma m[\bar{\omega}\bar{r}](\bar{\omega}\bar{r}).$$

Rozepsáním totožným jako u (f) v (g) a dosazením zvláštních hodnot pro rotační osu Z plyne

$$M_x = -\omega^2\Sigma mzy, \qquad M_y = \omega^2\Sigma mzx. \qquad (j)$$

To jsou momenty vnějších sil, pocházejících od ložisek, které udržují rotaci, a jejich záporné hodnoty jsou momenty dvojic, kterými tlačí rotující těleso na ložiska. Síly samy — **tlaky na ložiska** — obdržíme, dělíme-li momenty (j) délkou rotační osy $l = AB$ (obr. 97).

Ovšem jsou tlaky ty u os tvaru válců kolmé na pohyb pláště válcového a kdyby nebylo tření, jež roste s rostoucím tlakem, nekonaly by práce, neměnily by kinetické energie tělesa, které by se tedy otáčelo s nezměněnou rychlostí $\bar{\omega}$ neustále. Následkem tření ovšem rychlost ta klesá, až pohyb přestane vůbec.

Vztahy (h) praví, že osa Z jest hlavní osou setrvačnosti, neboť jsou-li splněny, neobsahuje rovnice T-elipsoidu ($98e$) členů lineárních v ω_z. Ale i tehdy, je-li osa Z osou hlavní pro vztažný bod O (na př. spodní ložisko), nemusí jí býti pro jiný svůj bod O' (na př. horní ložisko) jakožto bod vztažný. Aby jí byla, musí, je-li délka $OO' = l$ (jinak zcela libovolná), býti

$$\Sigma my(z - l) = 0, \qquad \Sigma mx(z - l) = 0,$$

neboť to jsou vztahy (h) přepsané pro bod O' jakožto počátek souřadnic. Právě pomocí h se redukují na

$$\Sigma my = 0, \qquad \Sigma mx = 0,$$

což vyjadřuje, že osa OZ prochází těžištěm. Můžeme tedy říci: Prochází-li hlavní osa těžištěm (čili každá centrální hlavní osa), jest hlavní osou pro všechny své body jakožto body vztažné. Stejně platí naopak: Je li některá osa osou hlavní pro dva ze svých bodů jest jí i pro všechny své body ostatní a prochází těžištěm tělesa, čili spadá v jedno s jednou z hlavních os centrálního elipsoidu.

102. Účinek nárazových sil a momentů na těleso. Střed nárazový.

Mějme úplně volné, silám vnějším nepodrobené těleso v klidu. Náhle na ně počne působiti dvojice a ptáme se, jaký pohyb nastane. Ježto je u dvojice $\Sigma\bar{F} = 0$, nezmění se dle prvé věty impulsové po-

hybový stav těžiště. Bylo a zůstane v klidu. Těleso počne se tedy otáčeti kolem osy, procházející těžištěm. Jde však o to, kolem které osy? Ze srovnání s působením síly by se zdálo samozřejmé, že podobně jako nastává pohyb postupný u volného hmotného bodu ve směru síly, nastane také rotace kolem osy dvojice. Leč tomu obecně tak není. Vše, co víme, shrnuje druhá věta impulsová

$$\frac{d\bar{U}}{dt} = \Sigma[\bar{r}\bar{F}] = \bar{M}, \tag{a}$$

kde moment $\bar{M}$ můžeme přenésti do těžiště. Integrací plyne

$$\bar{U} = \int_{t_0}^{t_1} \bar{M} dt. \tag{b}$$

Měla-li dvojice po celou dobu svého působení týž směr (osu), bude také $\bar{U}$ míti týž směr. Zajisté platí to pro dvojici momentanní. Příslušná rotační rychlost $\bar{\omega}$ má však směr impulsmomentu pouze tehdy, když $\bar{U}$ a tedy též $\bar{M}$ náhodně splývalo s některou z hlavních os, těžištěm procházejících.

Kdyby tomu tak bylo a kdyby tou hlavní osou byla na př. osa Ξ, potom by bylo

$$U_\xi = \omega_\xi K_\xi = \omega_\xi A,$$

takže vektorový vztah (a) by přešel v

$$\frac{dU_\xi}{dt} = \frac{d(\omega_\xi A)}{dt} = M,$$

čili, ježto A je časově stálé, obdrželi bychom vztah obdobný (97 d), jenž platí o pohybu kolem pevné osy

$$A\frac{d\omega_\xi}{dt} = M. \tag{c}$$

V obecném případě, když nespadá $\bar{M}$ v jedno s některou hlavní osou, rozepišme vektorovou rovnici (a) na hlavní osy, píšíce

$$\bar{M} = \bar{\imath} M_\xi + \bar{\jmath} M_\eta + \bar{k} M_\zeta, \qquad \bar{U} = \bar{\imath} U_\xi + \bar{\jmath} U_\eta + \bar{k} U_\zeta,$$

takže se nám rozpadne na tři rovnice skalární

$$\frac{dU_\xi}{dt} = M_\xi, \quad \frac{dU_\eta}{dt} = M_\eta, \quad \frac{dU_\zeta}{dt} = M_\zeta, \tag{d}$$

čili vzhledem k (100 k) pro stálost hlavních momentů setrvačnosti na

$$A\dot{\omega}_\xi = M_\xi, \quad B\dot{\omega}_\eta = M_\eta, \quad C\dot{\omega}_\zeta = M_\zeta,$$

z nichž plyne

$$\frac{d\bar{\omega}}{dt} = \bar{\imath}\dot{\omega}_\xi + \bar{\jmath}\dot{\omega}_\eta + \bar{k}\dot{\omega}_\zeta = \bar{\imath}\frac{M_\xi}{A} + \bar{\jmath}\frac{M_\eta}{B} + \bar{k}\frac{M_\zeta}{C}. \tag{e}$$

Integrací (d) však dostáváme tři rovnice typu

$$U_\xi = \int_{t_0}^{t_1} M_\xi dt, \tag{f}$$

kde U_ξ je složka impulsmomentu v hlavní ose Ξ v čase t_1, která v t_0

byla rovna nule atd. Integrujeme-li tedy (e) mezi časy t_0 a t_1, obdržíme pomocí (f) výslednou rotační rychlost $\bar{\omega}$ co do směru i velikosti jakožto

$$\bar{\omega} = \bar{\imath}\frac{U_\xi}{A} + \bar{\jmath}\frac{U_\eta}{B} + \bar{k}\frac{U_\zeta}{C}, \qquad (g)$$

čímž je úloha řešena, neboť složky impulsmomentu jsou vztahy (f) dány.

Zcela podobný případ nastává, podrobíme-li těleso otáčivé kolem pevného bodu O silám nárazovým $\bar{G}$. Zvolíme pevný bod za bod vztažný. Platí rovnice (68 g) resp. (68 h), čili, bylo-li těleso původně v klidu, obdrží impulsmoment

$$\bar{U} = \Sigma\,[\bar{r}_\lambda\, \bar{G}_\lambda] = \bar{D}, \qquad (h)$$

kde $\bar{D}$ je moment nárazových sil. Ježto jej můžeme psáti ve tvaru $\int_{t_0}^{t_1} \bar{M}dt$, jest rovnice ($h$) identická s ($b$), a veškeré další usuzování jest stejné. Ovšem že se těleso počne otáčeti kolem pevného bodu, ač ne vždy kolem osy s osou nárazového momentu rovnoběžné, kolmé na rovině proložené výslednou nárazovou silou a pevným bodem.

Sem připojíme ještě tento problém: Těleso jest zavěšeno na horizontální ose, která prochází bodem O a má směr jedné z hlavních os setrvačnosti, na př. Ξ. Těleso jest v klidu, jeho těžiště O^* se nachází ve vzdálenosti $\overline{OO^*} = \bar{a} \perp \Xi$ pod O. V jistém okamžiku zapůsobí na těleso to náraz $\bar{G} = \int_{t_0}^{t_1} \bar{F}dt$, a to v bodě O', ležícím v prodloužení přímky OO^* ve vzdálenosti $\overline{O^*O'} = \bar{b}$ pod těžištěm. Náraz budiž kolmý jak na $\overline{OO}$, tak na ose Ξ*). Pak má nárazový moment kolem bodu O, totiž $[\bar{a} + \bar{b}, \bar{G}]$, směr hlavní osy setrvačnosti Ξ, těleso počne se otáčeti kolem osy v O úhlovou rychlostí $\bar{\omega} = \bar{\omega}_\xi$, jejíž velikost jest dle (g)

$$\omega_\xi = \frac{U_\xi}{A} = \frac{U_\xi}{K_\xi}. \qquad (i)$$

Ale dle druhé věty impulsové (68 h) jest

$$\bar{U} = [\bar{a} + \bar{b}, \bar{G}] = \bar{U}_\xi = \bar{\imath}\,\bar{\omega}_\xi\, K_\xi, \qquad (j)$$

takže

$$\omega_\xi = \frac{(a + b)\, G}{K_\xi}. \qquad (k)$$

Na osu nepůsobil dle dřívějších vývodů žádný náraz, jenž by se snažil ji otočiti v rovině vodorovné, takže za daných poměrů by místo ní stačil i pevný bod O. Za to na osu mohla obecně působiti nárazová síla $\bar{G}'$, jež by se snažila ji posunouti ve směru síly $\bar{G}$ nebo opačném. Abychom ji vypočtli, užijme ještě prvé věty impulsové

*) V obrazci, jejž si čtenář snadno sám pořídí, zvolme osu Ξ kolmou na papír, kladnou směrem z papíru ven. Body O^* a O' leží pod O v rovině papíru, v níž leží též $\bar{G}$, směřující z leva v pravo.

ve tvaru (65 c). Z ní plyne, nazveme-li počáteční rychlost těžiště $\bar{v}^*$ a celou hmotu tělesa M

$$M\bar{v}^* = \bar{G} + \bar{G}', \tag{l}$$

kde patrně

$$\bar{v}^* = [\bar{\omega}_\xi \bar{a}].$$

Ježto $\bar{\omega}_\xi$, $\bar{a}$ i $\bar{b}$ a $\bar{G}$ stojí navzájem kolmo, můžeme ze skalárních rovnic, v něž přejdou (j) a (l), totiž

$$M\omega a = G + G' \quad \text{a} \quad (a + b) G = \omega_\xi K_\xi,$$

dovoditi

$$G' = M\omega_\xi a - \frac{\omega_\xi K_\xi}{a + b}. \tag{m}$$

Jest patrno, že náraz na osu v O se rovná nule, je-li

$$a + b = \frac{K_\xi}{Ma} \equiv \frac{K_\xi^* + Ma^2}{Ma}, \tag{n}$$

kdež jsme použili věty Steinerovy. To však praví dle (98 o'), že bod O', v němž působí nárazová síla, musí býti středem kyvu tělesa zavěšeného v bodě O. Proto se nazývá střed kyvu také středem nárazovým (centrum percussionis). Tento název mu udělil Descartes, jenž znal jeho theorii a vypočetl některé příklady. Kladivo má vzhledem k své těžké hlavici lehké a přiměřeně dlouhé držadlo. aby je kovář mohl držeti poblíže bodu O, sdruženého s O' v hlavici, v němž se děje náraz. Podobně musí srdce zvonu narážeti na zvon ve svém středu nárazovém, aby nárazy v ose, kolem níž se srdce otáčí, nevzbuzovaly nepříjemné svištivé zvuky. A podobných užití našeho poznatku v technické praxi je mnoho.

Z nejstarších je balistické kyvadlo Robinsonovo (1742), jehož se užívalo k určování rychlosti projektilů. Narazí-li na ně projektil hmoty m a rychlosti v, tedy impulsu $G = mv$, v hloubce $a + b$ pod závěsem, obdrží úhlovou rychlost, danou vzorcem (k). Ježto však projektil zůstane v něm trčeti, jest moment setrvačnosti K_ξ kolem osy O zvětšiti o moment setrvačnosti projektilu kolem oné osy, t. j. o veličinu $m(a + b)^2$. Ježto však projektil podrží část své původní rychlosti, vychyluje se současně s kyvadlem, bylo by v druhém přiblížení psáti za $G = m(v - (a + b)\omega_\xi)$. Ze vzorce ($k$) určíme pak v, stanovíce počáteční rychlost úhlovou ω_ξ pomocí největšího (prvého) výkyvu kyvadla.

Naše vývody jsou zvláštním případem vzniku otáčení kolem pevné osy nárazem. Z obecného řešení plyne, že popsané podmínky jsou jediné, za nichž nevznikne náraz na osu.

103. Poinsotův popis pohybu obecného bezsilového setrvačníku.

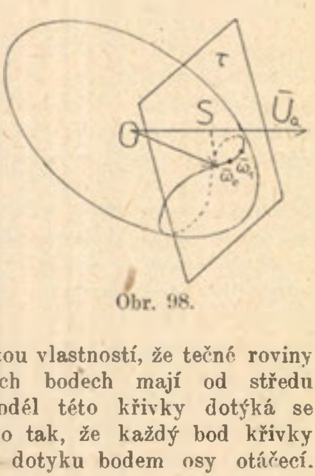
Smluvme se především o následující terminologii (dle Kleina a Sommerfelda): Libovolné těleso, které se může otáčeti kolem pevného bodu, nazýváme „obecný setrvačník“. Je-li hmota tělesa rozložena symetricky kolem nějaké osy, zvané krátce „osou tělesa“ nebo

„osou geometrickou“ a otáčí-li se těleso kolem některého z bodů této osy, mluvíme o „setrvačníku symetrickém“. Takovýmito jsou přístroje k fysikálním demonstracím užívané a pregnantně setrvačníky nazývané. Nepůsobí li na setrvačník vnější síly, čili je-li hmotný setrvačník podepřen ve svém těžišti, kolem něhož se otáčí, mluvíme „o setrvačníku bezsilovém“, proti němuž stojí „setrvačník těžký“.

Představme si roztočené těleso, na něž náhle přestanou všechny vnější síly působiti. Jeden jeho bod O buď pevný, ale ovšem tak, že se těleso může otáčeti kolem libovolné osy bodem tím procházející. Od tření v tom bodě abstrahujeme. Jedním slovem, jednejž se „o obecný bezsilový setrvačník“. Naše úvahy neruší vnější síla, působí-li v bodě O; pak nekoná práce ježto její působiště je v klidu, takže kinetická energie T tělesa zůstává stálá, na př. rovna T_0. Vezmeme-li pevný bod O za bod vztažný, jest také statický moment té vnější síly neustále roven nule, ježto rameno síly je trvale nulové. Ježto jiných sil není, zůstává také impulsmoment $\bar{U}$ stálým co do směru i velikosti, na př. roven $\bar{U}_0$.

Naše řešení bude tedy platné pro libovolné těleso, rotující kolem pevného těžiště, v němž je podepřeno, nebo pro těleso vnějším silám nepodrobené, které bylo roztočeno kolem osy procházející těžištěm, jež, mělo-li jednou rychlost $\bar{v}_0{}^* = 0$, zůstane i nadále v klidu a tedy zastupuje bod pevný. Takovýmto tělesem byla by na př. naše zeměkoule, kdybychom si odmyslili působení slunce, měsíce a oběžnic.

Máme-li popsati pohyb tělesa, jedná se nám o okamžitou osu, kolem níž se otáčí a o rychlost tohoto otáčení, slovem o vektor $\bar{\omega}$. Zatím víme, že trvale $T = T_0$ a $\bar{U} = \bar{U}_0$. Nahraďme těleso jeho T-elipsoidem pro vztažný bod O a $T = T_0$, kterýžto elipsoid se ovšem otáčí spolu s tělesem. Zakresleme do jeho počáteční polohy jeho počáteční rotační rychlost $\bar{\omega}_0$. Známou konstrukcí § 100 obr. 95 nalezneme pak příslušný impulsmoment $\bar{U}_0$, o němž víme, že musí co do směru i velikosti zůstati nadále nezměněn. To však praví, že tečná rovina τ, položená k elipsoidu v konečném bodě $\bar{\omega}_0$, musí zůstati trvale na svém místě, je rovinou neproměnnou, neboť jak její poloha, tak její vzdálenost $|\overline{OS}| = 2T_0 : U_0$ od pevného bodu O nesmí se změniti.



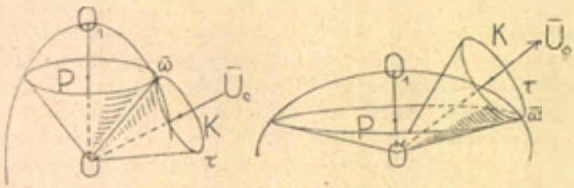
Obr. 98.

T-elipsoid může se tedy otočiti kolem $\bar{\omega}_0$ jen tím způsobem, že průmět kterékoli pozdější otáčecí rychlosti $\bar{\omega}$ na $\bar{U}_0$ zůstává neustále týž. Bude tedy průběh pohybu takový, že následkem otočení kolem $\bar{\omega}_0$ přejde elipsoid za nesmírně malý okamžik do nové polohy, ve které se však zase koncem nového vektoru $\bar{\omega}_1$ dotýká neproměnné roviny a podobně i dále. Sled koncových bodů vektorů $\bar{\omega}_0, \bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \ldots$ vytváří na elipsoidu křivku, která je dána tou vlastností, že tečné roviny k elipsoidu vedené v jednotlivých jejích bodech mají od středu elipsoidu stále touž vzdálenost OS. Podél této křivky dotýká se elipsoid postupně nepromĕnné roviny a to tak, že každý bod křivky je vždy po jistý nekonečně malý okamžik dotyku bodem osy otáčecí.

Jest to tak, jako když se obruč valí po nějaké ploše bez smýkání, neboť i zde je bod dotykový vždy bodem otáčecí osy. Smýkání může nastati pouze tehdy, je-li osa otáčecí mimo bod dotykový, jak nás o tom malý obrazec, jejž si sami můžeme zhotoviti, okamžitě poučí. Výsledkem naší jednoduché úvahy jest tedy věta: *T*-elipsoid se otáčí kolem pevného bodu *O* tak, že se valí po neproměnné rovině.

Křivku koncových bodů $\bar{\omega}$ na elipsoidu nazval Poinsot, od něhož pochází tento jednoduchý popis zjevu, polhodií, kdežto sled dotykových bodů na rovině τ, tedy křivku i za otáčení pevnou v prostoru, herpolhodií (srov. § 84). Jest zřejmo, že si stejně oprávněně můžeme mysliti všechny body polhodie i herpolhodie spojeny přímkami s pevným bodem *O*, čímž se vytvoří dva kužele, z nichž herpolhodiový je v prostoru pevný, kdežto polhodiový se po něm beze smyku valí (srov. § 85). Neproměnný směr $\bar{U}_0$ opisuje v rotujícím setrvačníku kužel, který bychom nalezli z analytického vyjádření konstrukce obr. 98 aneb ještě jednodušeji, kdybychom zkonstruovali pro daný setrvačník *U*-elipsoid. Stopa kužele na jeho povrchu spojuje body, které mají touž vzdálenost od středu elipsoidu, čili je dána průsekem jeho s koulí o poloměru U_0.

Polhodie i herpolhodie nabývají zvláště jednoduchého tvaru, jedná-li se o bezsilový setrvačník symetrický, jehož *T*-elipsoid je elipsoid rotační. Tečné roviny stálé vzdálenosti od jeho středu dotýkají



a Obr. 99. *b*

se ho v kruhu *P* (obr. 99 *a*, *b*, kde OO_1 je rotační osou elipsoidu), polhodiový kužel jest kruhový, rotační rychlost má stále touž velikost ω. Ježto také projekce na stálou rovinu τ (v obr. kruh $\perp$ na $\bar{U}_0$) má mít stálou velikost, je patrno, že také herpolhodie je kruh, herpolhodiový, v prostoru pevný kužel *K* je kruhový. U rotačního *T*-elipsoidu prodlouženého (obr. 99 *a*) leží vně, u *T*-elipsoidu zploštělého (obr. 99 *b*) pak uvnitř kužele polhodiového. Ježto je ω stálé, valí se kužel polhodiový po herpolhodiovém se stálou rychlostí. Z toho však následuje, že také rotační osa *T*-elipsoidu OO_1, která u homogenního rotačního tělesa spadá v jedno s jeho osou geometrickou, t. j. osou (všestranné) symetrie, opisuje v pevném prostoru kruhový kužel, jejž obíhá se stálou rychlostí. Ale to není než čistý pohyb precesní (§ 85), který je nejobecnějším pohybem symetrického bezsilového setrvačníku.

104. O stabilitě rotace.

Vyšetřme tvar polhodií, kteréž jsou dle svého vzniku křivky uzavřené, v blízkosti hlavních os setrvačnosti. Rovnice jedničkového elipsoidu setrvačnosti kolem O jakožto středu buď obecně

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1. \qquad (a)$$

Rovina tečná v libovolném bodě x_1, y_1, z_1 na elipsoidu má rovnici

$$Axx_1 + Byy_1 + Czz_1 = 1, \qquad (b)$$

při čemž ovšem musí x_1, y_1, z_1 vyhovovati rovnici (a) čili

$$Ax_1^2 + By_1^2 + Cz_1^2 = 1. \qquad (c)$$

Vzdálenost tečné roviny (b) od středu $O\,(0, 0, 0)$ jest co do velikosti

$$\frac{1}{\sqrt{(Ax_1)^2 + (By_1)^2 + (Cz_1)^2}},$$

takže, má-li býti konstantní pro všechny body jedné polhodie, musí

$$A^2x_1^2 + B^2y_1^2 + C^2z_1^2 = H = \text{stálé}. \qquad (d)$$

Rovnice (c) a (d) dávají polhodii jakožto křivku čtvrtého řádu, průsek to obou elipsoidů (c) a (d). Násobíme-li (c) tím H a odečteme od (d), obdržíme

$$(A^2 - HA)x_1^2 + (B^2 - HB)y_1^2 + (C^2 - HC)z_1^2 = 0,$$

což jest rovnice polhodiového kužele, jenž je obecně eliptický.

Z (c) a (d) plyne eliminací z_1

$$C - H = x_1^2(AC - A^2) + y_1^2(BC - B^2), \qquad (e)$$

kteroužto rovnici budeme diskutovati:

1. Bud $A < B < C$, t. j. osa Z osou největšího momentu setrvačnosti, nejkratší osou elipsoidu.

Je-li $C = H$, musí v (e) býti $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, průmět polhodie na rovinu XY je bod.

Je-li $C > H$, tedy $C - H > 0$, ježto $AC - A^2 > 0$ a $BC - B^2 > 0$, dává (e) jakožto průmět polhodie v okolí konce osy maximální setrvačnosti na rovinu XY elipsu.

Je-li $C < H$ jsou x_1 a y_1 imaginární.

2. Je-li $A > B > C$, tedy Z osou nejmenšího momentu setrvačnosti, nejdelší osou elipsoidu, dojdeme k obdobným výsledkům; při $C = H$ je průmět polhodie bod, při $C < H$ elipsa, při $C > H$ imaginární.

3. Je-li $A > C > B$ (resp. $A < C < B$), tedy osa Z osou středního momentu setrvačnosti, dává (e) pro $H < C$ (resp. $H > C$) za průmět na XY hyperbolu, která v případě $H = C$ v limitě přejde ve dvě protínající se přímky. Celkem je průběh polhodií na elipsoidu setrvačnosti znázorněn obr. 100.



Obr. 100.

To má značný dosah. Roztočené těleso, přenechané beze sil samo sobě, nebude se otáčeti kolem své původní osy, nýbrž osa mění svou

polohu v tělese podél eliptického kužele, v prostoru podél složitějšího ještě kužele herpolhodiového. Jen v tom případě, že se těleso náhodně otáčelo kolem jedné ze svých hlavních os setrvačnosti, zachovává osa otáčecí touž polohu jak v tělese, tak v prostoru. Je to tedy osa volná (§ 101).

Ale i tu dají se rozeznati dva hlavní případy. Nastane-li malá porucha buď vlivem krátkotrvající vnější (slabé) dvojice, nebo tím, že se nám nepovedlo roztočiti těleso právě přesně kolem hlavní osy setrvačnosti, přejde osa rotační na sousední polhodiový kužel. Bylo-li těleso roztočeno kolem největší nebo nejmenší hlavní osy setrvačnosti, jest ten kužel velmi malého otvoru a okamžitá osa otáčecí, ač se neustále poněkud mění, přece zůstává stále poblíže osy hlavní. Dálo-li se však otáčení kolem střední z hlavních os, vzdálí se otáčecí osa průběhem času do konečné vzdálenosti od ní. Proto nazýváme rotaci kolem největší nebo nejmenší z hlavních os čili krátce osy extrémní, stabilní, kdežto rotaci kolem střední hlavní osy labilní.

Obdoba, ovšem pouze formální, s oběma druhy statické rovnováhy (§ 53) leží nasnadě.

V jednom jediném případě jest rotace kolem každé osy stabilní, totiž v případě „setrvačníku kulového". Název tento nesmí nás uvésti v omyl; přídavné jméno nemá vyznačiti geometrický vnější tvar setrvačníku, nýbrž tvar elipsoidu setrvačnosti, který stejností hlavních os $A = B = C$ degeneruje v kouli. Pak ovšem má impulsmoment U vždy týž směr jako vektor rotační rychlosti $\bar{\omega}$, polhodie se vždy redukuje na bod.

Setrvačník nepodléhající vlivu vnějších sil a prudce roztočený kolem extrémní osy setrvačnosti, která budiž současně jeho osou symetrie, má impulsmoment U_0 rovněž směru oné osy symetrie. U_0 zachovává svůj směr v absolutním prostoru. Když tedy se nachází takovýto setrvačník na zeměkouli, mění se směr U_0 a tedy také osy setrvačníku vzhledem k povrchu zemskému s časem, neboť stále musí směřovati k téže stálici. Tímto způsobem dokázal Foucault rotaci zemskou, uživ symetrického setrvačníku*) v Cardanově závěsu, kde průseky os závěsu i setrvačníku ležely velmi přesně v těžišti setrvačníku, jenž tím byl zbaven působení tíže i jiných vnějších sil (vyjma nepatrná tření v osách) a podržel možnost libovolné orientace v prostoru **). Téhož principu užil

*) L. Foucault nazval gyroskopy aparáty, které prozrazují, že a ve kterém smyslu se otáčí těleso, na němž jsou připevněny. Je tedy v právu P. Stäckel (v Encyklopedii matem. věd) žádá-li aby se nezaměňovaly, jak se často dálo, názvy „symetrický setrvačník" a „gyroskop", z nichž prvý kryje pojem širší.

**) Přednáškový pokus, kterým se stálost osy rotační v prostoru dá pěkně ukázati koná se s přístrojem Bohnenbergerovým, jehož popis i vyobrazení se najde ve Strouhal-Kučerově Mechanice (2. vyd., 1910, str. 408). V textu jednajícím o setrvačnících zpracovaném Strouhalem, jsou některé omyly prejaté z vydání prvého z nichž sem spadá poznámka o stabilitě volné osy (str. 393 l. c.). Presněji a kvantitativně opakoval Foucaultův pokus A. Föppl (viz na př. Föppl: Techn. Mechanik, VI. sv., 1910, str. 276 násl.).

Obry při Whiteheadově torpédu, které, vychýlilo-li se ze své přímé dráhy, uvede se v ni zpět setrvačníkem, jenž, jsa v torpédu skryt, za změny své relativní polohy vzhledem k němu uvádí v činnost kormidelní zařízení. Setrvačník se roztáčí při výstřelu a udržuje i nadále na 18000 otočkách za minutu vzduchem stlačeným na 150 atmosfér.

105. Vliv vnějších dvojic na setrvačník bezsilový.

Rotuje-li symetrický setrvačník velmi rychle kolem geometrické osy — v praxi zpravidla osy maximální setrvačnosti — má velmi veliký impulsmoment $\bar{U} = A\bar{\omega}$. Působí-li potom na něj po velmi krátký čas nárazová dvojice $\bar{M}$, změní se $\bar{U}$ o velmi napatrný obnos v $\bar{U} + \Delta\bar{U}$, kde dle druhé věty impulsové ($\dot{\bar{U}} = \bar{M}$) je

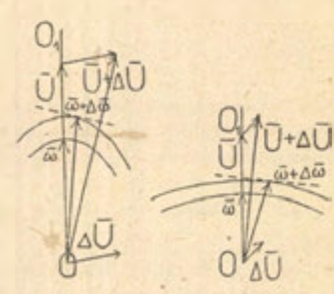
$$\bar{U} + \Delta\bar{U} = \int_t^{t+\tau} \bar{M} dt. \qquad (a)$$

Ovšem, že se také změní kinetická energie $T = \frac{1}{2}\bar{U}\bar{\omega}$ o obnos rovný práci dvojice, t. j. dle (97 a) o

$$\Delta T = \int_t^{t+\tau} \bar{M}\bar{\omega} dt = \int_t^{t+\tau} \bar{M} d\bar{\varphi}, \qquad (b)$$

jež však je proti T velice malé.

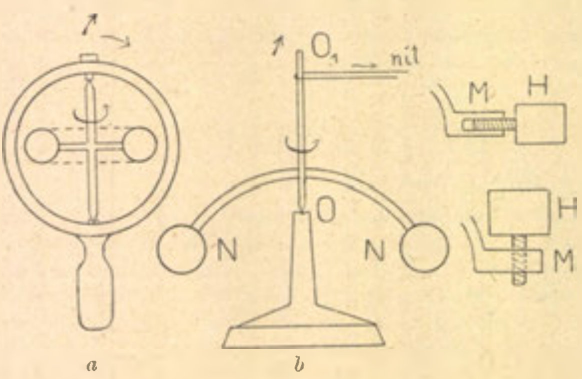
Vše, co se stalo, můžeme si znázorniti obr. 101 a, b. Původní $\bar{U}$ a $\bar{\omega}$ leží v rotační ose T-elipsoidu. Nárazovou dvojicí změnil se $\bar{U}$ v $\bar{U} + \Delta\bar{U}$, T-elipsoid v $(T + \Delta T)$-elipsoid. Změny jsou na obrazci ovšem kresleny velice přehnaně. Ve skutečnosti má být $\bar{U}$ mnohokráte větší než $\Delta\bar{U}$. Pak bude nová poloha rotační osy $\bar{\omega} + \Delta\bar{\omega}$ v tělese ležeti velice blízko staré $\bar{\omega}$, tedy velice blízko osy symetrie setrvačníku. Je pravda, že původní čistá rotace setrvačníku se změní nyní v pohyb precesní, že bude „osa setrvačníku", t. j. jeho osa symetrie OO_1, opisovati precesní kužel kolem v prostoru pevného nového směru $\bar{U} + \Delta\bar{U}$ (srov. obr. 99). Ale tento kužel bude míti otvor tak malý, že můžeme v prvém přiblížení zaměňovati směr impulsmomentu $\bar{U} + \Delta\bar{U}$ s novým středním směrem osy setrvačníku, který při provádění skutečného pokusu jediný přímo vidíme. Podobně zaměňujeme z téhož důvodu i směr impulsmomentu $\bar{U} + \Delta\bar{U}$ a osy otáčecí $\bar{\omega} + \Delta\bar{\omega}$, jejíž jest impulsmoment rovněž pouze střední polohou, kolem níž opisuje velmi málo otevřený kužel. V jediném případě setrvačníku kulového má $\bar{\omega} + \Delta\bar{\omega}$ přesně směr $\bar{U} + \Delta\bar{U}$ a zůstává nepohnuté v prostoru, neboť pak se herpolhodie i polhodie redukují na bod, herpolhodiový i polhodiový kužel na přímku.



Obr. 101.

Z naší úvahy vysvítá nová vlastnost stability rotace kolem extrémní osy setrvačnosti, kteráž mohla by se zváti stabilitou při nárazu.

Působí-li na setrvačník, prudce roztočený kolem extrémní hlavní osy setrvačnosti, jež budiž také jeho osou symetrie, trvalá dvojice momentu $\bar{M}$ stálého směru v prostoru, nastává v každém okamžiku dt změna impulsmomentu $d\bar{U} = \bar{M}dt$. Ježto pak všechny přírůstky $d\bar{U}$ mají týž směr, mění se $\bar{U}$ tak, že se jakožto vektor blíží směru $\bar{M}$ (srov. obr. 101). Není-li moment $\bar{M}$ příliš veliký proti $\bar{U}$, lze považovati pohyb setrvačníku alespoň na krátký čas ještě za bezsilový a stejně jako v předcházejícím zaměniti polohu impulsmomentu, kterou ovšem nevidíme, se střední polohou osy setrvačníku, resp. osy rotační*). Mluvíme pak s Foucaultem o tendenci k paralelismu (homolognímu, v témž smyslu), o snaze po stejnosměrné rovnoběžnosti, kterou jeví osa setrvačníku vzhledem k ose působící dvojice. Tato tendence přesně platí pro impulsmoment. Užívá-li se tohoto Foucaultova pravidla pro



Obr. 102.

osu symetrie setrvačníku, vede sice u mnohých zjevů k správnému kvalitativnímu popsiu, ale nikterak se mu nesmí přičítati váha a význam fysikálního axiomu.

Nyní můžeme přistoupiti k vysvětlení některých na prvý pohled velmi překvapujících pokusů, které nejlépe lze provésti se setrvačníkem

*) V literatuře učebnicové natropilo již mnoho zla, že se přesně nerozeznávají osa setrvačníku OO_1 (kterou zveme také osou symetrie), osa otáčecí $\bar{\omega}$ resp. $\bar{\omega} + \Delta\bar{\omega}$, a osa impulsmomentu $\bar{U}$ resp. $\bar{U} + \Delta\bar{U}$, nýbrž že se ve slovních důkazech názvem „osa“ míní jednou ta, jindy ona. Tato quaternio terminorum vede pak k falešným, ač zdánlivě správným důkazům falešně, t. j. buď pouze v prvém přiblížení nebo jen pro kulový setrvačník správně popisovaných zjevů jak pěkně analysovali Klein a Sommerfeld (Theorie des Kreisels V, § 3, str. 307—316: Populäre Kreiselliteratur). Ostatně se této chybě nedovedli úplně vyhnouti ani Airy Foucault a Helmholtz. Přesným a názorným vodítkem zůstává nám vždy věta o změně impulsmomentu.

Maxwellovým, schematicky v průřezu znázorněným obr. 102 *b*. Zvláštním uspořádáním hmot jest docíleno, že těžiště padne velmi přibližně do bodu O, kolem něhož se setrvačník otáčí, byy roztočen šňůrou navinutou kolem osy symetrie OO_1. U tvaru, jejž popisuje Webster, nese plochý horizontální kraj M, jenž zastupuje masivní prstenec NN' obrazce, v symetrickém rozložení tři vertikální a tři horizontální šrouby s velikými a těžkými hlavicemi H, jimiž můžeme jednak těžiště zvedati nebo snižovati, jednak oddálením hlavic horizontálních od osy symetrie i zvětšovati moment setrvačnosti, aniž se symetrie uspořádání hmot poruší. Hoření konec O_1 osy symetrie nazývejme vrchol setrvačníku.

Roztočme setrvačník ve směru šipky (proti ručičkám hodinovým při pohledu shora) a snažme se mírným tahem niti vpravo vychýliti vrchol v tuto stranu. Setrvačník odpoví tím, že se vychýlí dozadu. Měl totiž původní impulsmoment U_0 setrvačníku směr osy symetrie (a tedy též osy otáčecí) OO_1. Tahem na niti přistupuje k U_0 změna rovná momentu síly vzhledem k bodu O, který má směr za papír. Výsledný impulsmoment U jest tedy skloněn dozadu a tamže se vychýlí vrchol, ježto v prvém přiblížení ztotožňujeme střední jeho polohu s polohou impulsmomentu. Touž zkušenost můžeme učiniti s ručním setrvačníkem (obr. 102 *a*), který má osu uloženou v ložiskách a je tím vlivu tíže zbaven. Držíme-li jej v ruce a chceme vychýliti vpravo, odpovídá momentem, který klopí jeho vrchol dozadu, zcela jinak, než by tomu bylo, kdyby setrvačník nebyl roztočen. Vrchol pohyboval by se vpravo, kdybychom skláněli osu setrvačníku vpřed. Skláníme-li ji vzad, pohybuje se vrchol vlevo. Setrvačník ruční bývá často uzavřen v kouli, abychom neviděli směr jeho osy. Pak je jeho chování vůči vnějším dvojicím zvlášť překvapující. (Skryté pohyby cyklické).

Maxwell opatřil vrchol svého setrvačníku kruhovou deštičkou na hmotné ose kolmou, rozdělenou ve čtyři kvadranty: červený, žlutý, zelený a modrý. Rotuje-li setrvačník kolem jiné osy než své osy symetrie, na př. kolem osy procházející některým bodem v červeném kvadrantu, vidíme na deštičce konec osy jakožto červenou skvrnu, kdežto v jiných místech barvy splývají v neurčitou šeď. Jest patrno, že tímto způsobem můžeme sledovati časový postup jednotlivých poloh okamžité osy rotační v setrvačníku. O jiných pokusech s obecným bezsilovým setrvačníkem viz Websterovu knihu o dynamice.

106. Vynucený pohyb setrvačníku. Kinetická reakce.

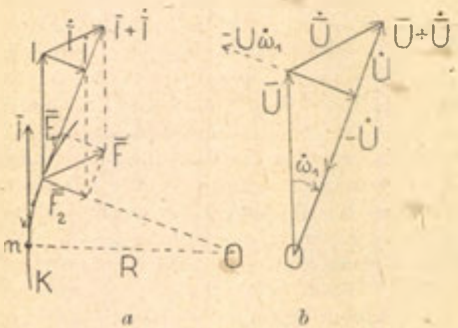
Pokusné zkušenosti, vylíčené v posledním paragrafu, můžeme shrnouti ve větu: „Kinetická reakce roztočeného symetrického setrvačníku není směru opačného než silou zamýšlený pohyb vrcholu, nýbrž má směr na něm kolmý, a to takový, že působí-li v něm síla, vnější má za následek právě opačný pohyb vrcholu, než byl původní silou zamýšlen*)."

*) Ještě obecněji lze říci (s Ebertem): „Indukujeme-li jakýmkoli vnějším vlivem na setrvačník („gyrostatický systém") nějaký jeho pohyb má takový průběh, že působě zpět se snaží původní vliv kompensovati, příčinu anulovati." Setrvačník se tedy vzpírá každému zasažení ve svůj stav, a to tak, že k změně

Jednoduchý vztah mezi směry kinetické reakce, osy otáčecí (přesněji osy impulsmomentu) a síly lze vyřknouti takto:

Roztočíme-li setrvačník pravotočivě kolem osy X a působí-li na jeho vrchol síla směru Y, reaguje setrvačník tak, že jeho vrchol se pohybuje směrem osy Z. Soustava XYZ jest při tom pravotočivá. Osu X můžeme nahraditi palcem, Y ukazováčkem a Z třetím prstem pravé ruky přibližně navzájem kolmo nataženými a tak dostáváme kdysi veliké oblibě se těšivší „pravidlo pravé ruky".

Ale nebude od místa, všimneme-li si blíže zjevů, jež nastávají při vynuceném pohybu setrvačníku bezsilového.



Obr. 103.

Vzpomeňme nejprve na vynucený pohyb hmotného, tíži nepodléhajícího bodu m podél křivky K absolutně hladké (obr. 103 *a*). Má-li se v místě radia křivosti R pohybovati se zrychlením $\dot{v} = \ddot{s}$, čili jinak řečeno, má-li se jeho impuls $\bar{I} \equiv m\bar{v}$ změniti na $\bar{I} + d\bar{I} \equiv m(\bar{v} + d\bar{v})$ v čase dt, musí naň působiti síla $\bar{F} = \dot{\bar{I}}$, jejíž složka F_1 v tečné (t. j. ve směru $\bar{I}^0$) má velikost $|F_1| = \dot{I} = m\dot{v}$ a složka F_2 ve směru vnitřní normály (t. j. kolmá na $\bar{I}^0$) má velikost $mv^2 : R$. Můžeme říci: Prvá složka F_1 přemáhá, t. j. vyvažuje „kinetickou reakci", zvanou „síla od setrvačnosti", velikosti $\dot{I} \equiv m\dot{v}$ a směru opačného $-F_1{}^0$, druhá složka F_2 vyvažuje kinetickou reakci, kterou nazýváme „síla centrifugální". Složka prvá existuje jen tehdy, mění-li se velikost rychlosti, druhá jen tehdy, mění-li se její směr v^0. Tato druhá složka nekoná práce při skutečném pohybu, stojíc na jeho směru neustále kolmo; kinetická reakce projevuje se napětím niti při pohybu kruhovém, tlakem, je-li křivka K na př. částí plochy, po jejíž konkávní straně se hmotný bod pohybuje.

Zcela podobně můžeme myšlenkově zpracovati také problém vynuceného pohybu setrvačníku. Má-li se impulsmoment $\bar{U}$ setrvačníku (obr. 103 *b*) změniti v čase dt o $d\bar{U}$, musí na setrvačník působiti dvojice, jejíž jedna komponenta má moment velikosti $\dot{U}$ a téhož směru jako U a druhá směr na U kolmý a velikost $U\dot{\omega}_1$, zveme-li $\dot{\omega}_1$ úhlovou rychlost, se kterou se impulsmoment U otáčí. Kinetickou reakci setrvačníku proti prvé komponentě momentu nazývají Klein a Sommerfeld „odporem proti zrychlení" nebo „akceleračním". Projevuje se

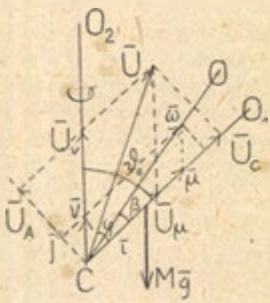
---

tohoto stavu jest potřebí práce, aby překonala odpor, jenž právě vznikl reaktivním pohybem setrvačníku. Jest zřejma obdoba se zákonem Lenzovým v elektrodynamice, odkudž vzniká možnost vykládati zjevy elektromagnetické indukce „skrytými cyklickými pohyby", jak to učinili Maxwell, Helmholtz, Hertz, Boltzmann.

vždy, kdykoli se mění rotační rychlost setrvačníku, byť i směr rotační osy zůstával týž. Jest téhož směru jako moment od tření v ložiskách setrvačníku, který roztáčíme kolem volné osy. Reakci proti druhé složce nazývají též autoři „odporem proti deviaci“ nebo „odporem deviačním“. Nevalně vhodný název „odpor“ nesmí nás svésti k omylu, že se snad jedná o sílu; oba odpory jsou momenty dvojic*). Přesně obdobné poměry jako u hmotného bodu nastávají, jak uvidíme, pouze u setrvačníku kulového, u něhož jest osa rotační vždy totožná s osou impulsmomentu. K přemáhání odporu deviačního není však nikdy potřebí práce. Nazveme-li jej $\bar{D}$, je práce při rotaci $\bar{\omega}$ v čase dt dle (97 b) rovna $\bar{D}\bar{\omega}dt$, a $\bar{D}$, které je kolmé na $\bar{U}$, je také kolmé na $\bar{\omega}$, jež, jak bylo řečeno, u kulového setrvačníku je vždy téhož směru jako $\bar{U}$. Pak ovšem skalární součin $\bar{D}\bar{\omega} = 0$. V dalším pak uvidíme, že $\bar{D}$ je i u obecného bezsilového symetrického setrvačníku kolmé na $\bar{\omega}$.

Odvodíme tedy výraz pro deviační odpor hned pro tento obecný případ. K tomu nám poslouží následující poznatek: Nejobecnějším pohybem obecného (nesymetrického) setrvačníku jest rotace kolem okamžité osy (§ 85), která svůj směr i velikost okamžik od okamžiku mění. Ve druhém přiblížení, t. j. pro dva sousední okamžiky, můžeme každý takový pohyb považovati za rovnoměrně zrychlený pohyb precesní. Lze totiž obecné kužele polhodiový a herpolhodiový (§ 85) nahraditi kužely kruhovými, oskulujícími podél okamžité rotační osy; zrychlením pak charakterisujeme současnou změnu rotační rychlosti co do její velikosti.

Dejme tomu, že bychom nějakým způsobem donutili impulsmoment rotujícího tělesa, aby prováděl kolem jisté okamžité, v prostoru pevné osy (na př. vertikální), nebo, což jest totéž, kolem jistého (okamžitého a kruhového) kužele herpolhodiového takovýto obecný zrychlený pohyb precesní. Docílili bychom toho třeba tak, že bychom se celým tělem zrychleně otáčeli kolem vertikální osy, držíce při tom v natažené ruce ruční setrvačník (obr. 102 a) s osou k vertikále skloněnou**). Setrvačník budiž symetrický s extrémním hlavním momentem setrvačnosti C, oběma druhými velikosti A, a otáčejž se rychlostí $\bar{\mu}$ kolem osy symetrie (CO_1 na obr. 78 a). Vedle toho však má okamžitou rotační rychlost $\bar{\nu}$ kolem osy CO_2 vnuceného kužele herpolhodiového. Okamžitá osa výsledné rotace bude tedy CO a rotační rychlost $\omega = \bar{\mu} + \bar{\nu}$. Této rotaci odpovídá impulsmoment $\bar{U}$, který bude míti obecně směr poněkud různý od $\bar{\omega}$ a bude ležeti v rovině O_2CO_1 kdesi mezi CO_2 a $\bar{\omega}$, jak ve zvo-



Obr. 104.

*) Ve čtvrtém sešitě své „Theorie des Kreisels“ nahrazují Klein a Sommerfeld název „odpor“ slovem „Kreiselwirkung“, účinek setrvačníku, ostatně také nevalně vhodným.

**) Nejpohodlněji provádíme tento pokus sedíce na otáčivé stoličce.

leném případě nás o tom poučuje jediný pohled na obr. 99 *a*. Svírejž s osou symetrie setrvačníku CO_1 úhel φ (obr. 78 a obr. 104). Abychom našli složky impulsmomentu vzhledem k hlavním osám setrvačníku, rozložme výslednou rychlost $\bar{\omega}$ na složky $\omega \cos\beta$ v ose symetrie setrvačníku a $\omega \sin\beta$ na ni kolmou, která spadá do směru hlavní osy A.

Těmto rychlostem odpovídají dle (100 *o*) složky impulsmomentu

$$U_C = U\cos\varphi = C\omega\cos\beta \quad \text{a} \quad U_A = U\sin\varphi = A\omega\sin\beta. \qquad (a)$$

Má-li osa setrvačníku a tedy též impulsmoment obíhati kužel kolem osy CO_2 úhlovou rychlostí $\bar{\nu}$, musí opsat konečný bod impulsmomentu U v jednotce časové oblouček

$$\nu U\sin(\vartheta_0 - \varphi) = \nu U\cos\varphi\sin\vartheta_0 - \nu U\sin\varphi\cos\vartheta_0, \qquad (b)$$

jenž jako vektor značí co do směru i velikosti onen moment, který přemáhá deviační odpor $\bar{D}$. Má tedy vektor $\bar{D} = -\dot{\bar{U}}$ směr kolmý z papíru ven. Dosadíme-li z (*a*), plyne

$$D = \nu\omega(C\cos\beta\sin\vartheta_0 - A\sin\beta\cos\vartheta_0).$$

Úhlu β se zbavíme pomocí vztahů (87 *i*), z nichž plyne, což ostatně lze přímo z obr. 104 odečísti,

$$\omega\sin\beta = \nu\sin\vartheta_0, \qquad \omega\cos\beta = \mu + \nu\cos\vartheta_0, \qquad (c)$$

takže celkem je velikost deviačního odporu

$$D = \nu\sin\vartheta_0(C\mu + (C - A)\nu\cos\vartheta_0). \qquad (d)$$

Jeho směr kolmý z papíru ven potvrzuje také srovnání obr. 78 *a* a 102 *b*, kdež si musíme představiti, že táhneme nití vrchol setrvačníku dozadu za papír. Můžeme tedy říci: Deviační odpor nebo lépe deviační kinetická reakce se vždy snaží přitisknouti kužel polhodiový na vnucený kužel herpolhodiový. Toto velmi užitečné pravidlo pro vynucený pohyb setrvačníku prví výslovně vyřkli Klein a Sommerfeld.

Deviační odpor jest tedy dán dvojicí, jejíž moment velikosti D má směr přímky kolmé na rovině O_1CO_2. Myslíme-li si tuto přímku vedenou bodem C (obr. 104), říkáme jí přímka uzlová, neboť v ní by se protínaly dvě roviny proložené kolmo k osám CO_1 a CO_2 bodem C.

U setrvačníku kulového, kde $A = C$ a $\bar{U}$ spadá v jedno s $\bar{\omega}$ čili CO, mohli bychom (*d*) psáti ve tvaru vektorovém

$$\bar{D} = C[\bar{\mu}\bar{\nu}] = [\bar{N}\bar{\nu}]. \qquad (d')$$

Klein a Sommerfeld nazývají veličinu $C\bar{\mu} = \bar{N}$ „vlastním" impulsmomentem (Eigenimpuls) setrvačníku. Jest to impulsmoment, který se setrvačníku udělí při jeho rozehnání, na př. odvinutím šňůry. Zbývající část deviačního odporu u obecného symetrického setrvačníku, totiž $(C-A)\ \nu^2\sin\vartheta_0\cos\vartheta_0$ nazývají též autoři jeho částí elipsoidickou. Ježto zpravidla $\bar{\mu}$ bývá velmi veliké proti $\bar{\nu}$, lze ji i v obecnějším případě vedeného symetrického setrvačníku v prvém přiblížení zanedbati. Vzorec (*d'*) resp. (*d*) nazývají pak nejdůležitějším vzorcem theorie setrvačníku.

K obecné změně pohybového stavu setrvačníku patří ještě změna rotační rychlosti o $\dot{\bar{\omega}}$ za jednièku časovou. Obstará ji dvojice veli-

kosti $K_\omega \dot{\omega}$ a směru $\bar{\omega}^0$, kde K_ω je moment setrvačnosti, příslušný k okamžitému směru $\bar{\omega}^0$ rotační osy. Stejně veliký, ale opačného směru je „odpor akcelerační". Jeho velikost mohli bychom snadno explicite rozepsati v μ, ν, ϑ_0, $\dot{\mu}$, $\dot{\nu}$, $\dot{\vartheta}_0$, leč nemá valné důležitosti.

Poznámka: Naše vývody daly se vésti také počtem vektorovým. Vztahujíce se na obr. 104 máme u setrvačníku kulového:

$$\bar{U} = C\bar{\omega} = C(\bar{\mu} + \bar{\nu}).$$

$$\dot{\bar{U}} = C(\dot{\bar{\mu}} + \dot{\bar{\nu}}) = C(\mu\dot{\bar{\mu}}^0 + \dot{\mu}\bar{\mu}^0 + \nu\dot{\bar{\nu}}^0 + \dot{\nu}\bar{\nu}^0).$$

Odporem deviačním jsme zvali zápornou změnu impulsmomentu za stálé velikosti μ a ν a stálého směru $\bar{\nu}^0$, když tedy $\dot{\mu} = \dot{\nu} = \dot{\bar{\nu}} = 0$. Ze závorky zbude jen prvý člen. Změna jedničkového vektoru $\bar{\mu}^0$, v jednotce časové je, jak patrno z obrazce, oblouček velikosti $\nu \sin\vartheta_0$, směřující kolmo za papír, takže můžeme psáti

$$\dot{\bar{\mu}}^0 = \nu\,[\bar{\nu}^0\bar{\mu}^0] = [\bar{\nu}\bar{\mu}^0], \qquad (e)$$

což ostatně platí při rotaci $\bar{\nu}$ pro každý vektor, a není než dle nových písmen přepsaný vzorec (87b) resp. (16e).

Dosazením plyne tedy okamžitě vzorec (d').

$$\bar{D} = -C\mu\nu\,[\bar{\nu}^0\bar{\mu}^0] = C\,[\bar{\mu}\bar{\nu}].$$

Odpor akcelerační jest pak

$$-C(\dot{\mu}\bar{\mu}^0 + \dot{\nu}\bar{\nu}^0), \qquad (f)$$

neboť v druhém přiblížení, jak bylo již řečeno, předpokládáme, že se sice rychlost precesní mění co do své velikosti (rovnoměrně zrychlená precese, $\dot{\nu} = \text{const}$), ale oskulační kužel herpolhodiový zachovává tutéž osu, $\dot{\bar{\nu}}^0 = 0$. Z (e) je patrno, že moment kinetické reakce akcelerační leží v rovině O_1CO_2. Rovnice (d') a (f) dosvědčují úplnou obdobu vynuceného pohybu setrvačníku kulového a vynuceného pohybu hmotného bodu podél křivky.

Pro obecný symetrický setrvačník položme do směru $\bar{\mu}^0$ osu $\bar{\imath}$, do směru na něm kolmého osu $\bar{\jmath}$. Z výkresu 104 odečteme

$$\bar{U} = U_C\bar{\imath} + U_A\bar{\jmath} = C(\mu + \nu\cos\vartheta_0)\,\bar{\imath} + A\nu\sin\vartheta_0\,\bar{\jmath}. \qquad (g)$$

Kdybychom rozložili dle os $\bar{\mu}^0$ a $\bar{\nu}^0$, což někdy může býti pohodlnější, obdrželi bychom stejně z výkresu

$$\bar{U} = (C(\mu + \nu\cos\vartheta_0) - A\nu\cos\vartheta_0)\,\bar{\mu}^0 + A\nu\bar{\nu}^0. \qquad (h)$$

$\bar{D}$ je záporná změna $\bar{U}$ v jedničce časové za stálého μ, ν, ϑ_0, tedy

$$\bar{D} = -(C(\mu + \nu\cos\vartheta_0)\,\dot{\bar{\imath}} + A\nu\cos\vartheta_0\,\dot{\bar{\jmath}}).$$

Ale $\dot{\bar{\imath}} = \dot{\bar{\mu}}^0$, které je dáno dle ($e$), dle výkresu pak, je-li $\bar{k}$ třetí kolmá osa přiřaděná $\bar{\imath}$, $\bar{\jmath}$, tedy z papíru ven vystupující,

$$[\bar{\mu}^0\bar{\nu}^0] = \sin\vartheta_0\bar{k}, \quad \dot{\bar{\jmath}} = \nu\,[\bar{\nu}^0\bar{\jmath}] = \nu\cos\vartheta_0\bar{k}.$$

Dosazením obdržíme

$$\bar{D} = (C\mu\nu\sin\vartheta_0 + (C - A)\,\nu^2\sin\vartheta_0\cos\vartheta_0)\,\bar{k}$$

jako dříve.

Ještě kratčeji plyne $\bar{D}$ z tvaru (h), neboť tam jest diferencovati pouze $\bar{\mu}^0$ a $\bar{\nu}^0$ a dle předpokladu $\dot{\bar{\nu}}^0 = 0$.

Dosazením za $\dot{\bar{\mu}}^0$ dle (e) pak

$$\bar{D} = \left(C + (C - A)\frac{\nu\cos\vartheta_0}{\mu}\right)[\bar{\mu}\bar{\nu}], \qquad (d'')$$

kde zvláště názorně se projevuje rozdíl od setrvačníku kulového. Provedením ostatních diferenciací v (h) obdrželi bychom za odpor akcelerační

$$-\left\{(C\dot{\mu} + (C-A)\dot{\nu}\cos\vartheta_0 - (C-A)\nu\sin\vartheta_0\dot{\vartheta}_0)\bar{\mu}^0 + A\dot{\nu}\bar{\nu}^0 + A\nu\dot{\bar{\nu}}^0\right\}. \qquad (i)$$

V druhém přiblížení ($\dot{\bar{\nu}}^0 = 0$) leží v rovině O_1CO_2. U kulového setrvačníku přejde v (f), jak je nutno.

V obr. 104 jest tedy deviační kinetická reakce znázorněna vektorem D, mířícím kolmo z papíru ven. Pokud se nezměnilo μ, ν, ϑ_0, pokud se tedy jedná o čistou regulární precesi, zůstává velikost D stálá; vektor ten stálé délky se ovšem otáčí úhlovou rychlostí ν kolem osy CO_2, jsa neustále kolmý na rovině O_1CO_2.

Ptejme se, co nastane, je-li neustále $D = 0$, čili

$$C\mu = (A - c)\,\nu\cos\vartheta_0. \qquad (j)$$

Tu patrně symetrický setrvačník nebude regulární precesi klásti žádný odpor, regulární precese bude bez jakéhokoli vlivu vnějších sil jeho přirozeným pohybovým stavem. Rovnice (i) vybírá tedy ze všech možných pohybů precesních zcela určitou třídu jakožto regulární precesi setrvačníku bezsilového.

Ale nejen to. Rovnice (d) ukazuje, že můžeme docíliti regulární precese i u setrvačníku těžkého, to jest podepřeného v bodě C osy symetrie, který leží mimo těžiště O^*, v němž působí síla tíže Mg. Je-li $CO^* = r^*$, je moment síly $Mgr^* \sin\vartheta_0$ a působí právě opačným směrem než deviační odpor D, v obr. 104 kolmo za papír. Je-li tudíž

$$Mgr^* = C\mu\nu + (C - A)\,\nu^2\cos\vartheta_0, \qquad (k)$$

provádí těžký symetrický setrvačník pohyb regulárně precesní. Ovšem uvidíme, že není to jeho pohyb obecný, který jest mnohem složitější, nýbrž jen pohyb možný, za kterého právě konstanty setrvačníku (M, r^*, C, A) a pohybu (μ, ν, ϑ_0) musí splňovati vztah (k). Proto jsou všechny polopopulární důkazy, z nichž plyne regulární precese jakožto nutný obecný tvar pohybu těžkého setrvačníku, vesměs nesprávné; zpravidla spočívá chyba v záměně různých „os", jak jsme se o tom již zmínili.

*107. Pohyb setrvačníku jakožto pohyb relativní.



Obr. 105.

Nucený pohyb setrvačníku můžeme jinak zpracovati s hlediska relativního pohybu. Vyjděme od okamžité polohy znázorněné obr. 105. X, Y, Z buďtež osy v setrvačníku, z nichž Z spadá v jedno s hlavní osou setrvačnosti momentu C. Rotace rychlostí $\bar{\mu}$ děje se kolem této osy, osy X, Y se však se setrvačníkem neotáčejí! Za to rotuje soustava X, Y, Z kolem osy Z' pevné v prostoru rychlostí $\bar{\nu}$. Libovolný bod P hmoty m kdekoli v setrvačníku má vzhledem k osám X, Y, Z relativní rychlost

$$v_r = [\bar{\mu}\bar{r}]. \qquad (a)$$

Ježto tyto osy samy rotují, má vedle toho jistou rychlost $\bar{v}_v$ a zrychlení $\bar{a}_v$ z vedení, a zrychlení Coriolisovo $\bar{a}_c$, takže jeho zrychlení absolutní $\bar{a}_a$ bude dle (39 *h*)

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_v + \bar{a}_c. \qquad (b)$$

Působí-li na hmotný bod vnější síla $\bar{F} = m\bar{a}_a$, plyne jako v (66 *b*)

$$m\bar{a}_r = \bar{F} - m\bar{a}_v - m\bar{a}_c, \qquad (c)$$

a násobíme-li vektoriálně polohovým vektorem $\bar{r}$, obdržíme momenty vzhledem k bodu O

$$m[\bar{r}\bar{a}_r] = [\bar{r}\bar{F}] - m[\bar{r}\bar{a}_v] - m[\bar{r}\bar{a}_c]. \qquad (d)$$

Oba vztahy můžeme pak slovně vyjádřiti takto:

Zjevy, které při rotujícím setrvačníku nastávají, můžeme popisovati vzhledem k osám X, Y, Z jakožto pevným, připojíme-li k daným vnějším silám a momentům síly z vedení a Coriolisovu resp. jejich momenty.

Dle (39 *g* a *h*) jest

$$\bar{a}_v = \ddot{\bar{c}} + [\dot{\bar{\nu}}\bar{r}] + [\bar{\nu}[\bar{\nu}\bar{r}]],$$
$$\bar{a}_c = 2[\bar{\nu}\bar{v}_r], \qquad (e)$$

kde $\bar{c}$ jest zrychlení začátku souřadnicové soustavy X, Y, Z vzhledem k soustavě X', Y', Z', tedy zde rovné nule; precesi chceme považovati za regulární, tedy rovněž klásti $\dot{\bar{\nu}} = 0$. Je-li ještě jedinou vnější působící silou zemská tíže, přejdou (*c*) a (*d*) ve tvar

$$m\bar{a}_r = m\bar{g} - m[\bar{\nu}[\bar{\nu}\bar{r}]] - 2m[\bar{\nu}[\bar{\mu}\bar{r}]]$$
$$= m\bar{g} - m(\bar{\nu}\bar{r})\bar{\nu} + m\nu^2\bar{r} - 2m(\bar{\nu}\bar{r})\bar{\mu} + 2m(\bar{\nu}\bar{\mu})\bar{r}, \qquad (f)$$

$$m[\bar{r}\bar{a}_r] = m[\bar{r}\bar{g}] - m(\bar{\nu}\bar{r})[\bar{r}\bar{\nu}] - 2m(\bar{\nu}\bar{r})[\bar{r}\bar{\mu}]. \qquad (g)$$

V (*f*) vynechali jsme již dva členy, v nichž se vyskytl součin $[\bar{r}\bar{r}] = 0$ jakožto faktor. Dle obrazce *i* významu skalárního součinu jest

$$(\bar{\nu}\bar{r}) = \nu r \cos\widehat{\nu r} = \nu z', \qquad (\bar{\mu}\bar{\nu}) = \mu\nu\cos\widehat{\mu\nu} = \mu\nu\cos\vartheta. \qquad (h)$$

Dosadíme-li do (*f*) a sečteme přes všechny hmotné body setrvačníku, vznikne

$$\Sigma m\bar{a}_r = \bar{g}\Sigma m - \bar{\nu}\nu\Sigma mz' + \nu^2\Sigma m\bar{r} - 2\bar{\mu}\nu\Sigma mz' + 2\mu\nu\cos\vartheta\Sigma m\bar{r}. \qquad (i)$$

Je-li bod O těžištěm setrvačníku, jsou dle (63 *d*)

$$\Sigma mz' = 0, \qquad \Sigma m\bar{r} = 0,$$

a vypadnou všechny členy pravé strany (*i*), vyjma prvý. Výsledná síla jest síla tíže, působící ovšem v těžišti.

Abychom obdrželi vhodný výraz pro výsledný moment, dosaďme do (*g*) výrazy, odečtené z obrazce

$$\bar{r} = \bar{\imath}x + \bar{\jmath}y + \bar{k}z,$$
$$\bar{\mu} = \bar{k}\mu, \qquad \bar{\nu} = -\bar{\jmath}\nu\sin\vartheta - \bar{k}\nu\cos\vartheta. \qquad (j)$$

Z (*g*) vznikne dle známých pravidel o semikartézském tvaru součinu skalárního i vektorového

$$m[\bar{r}\bar{a}_r] = m[\bar{r}\bar{g}] - m\nu(z\cos\vartheta - y\sin\vartheta)\begin{vmatrix}\bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k}\\ x & y & z\\ 0 & -\nu\sin\vartheta & \nu\cos\vartheta\end{vmatrix}$$

$$+ 2m\nu(z\cos\vartheta - y\sin\vartheta)\begin{vmatrix}\bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k}\\ x & y & z\\ 0 & 0 & \mu\end{vmatrix}. \qquad (k)$$

Tento tvar nebudeme ani rozepisovati, nýbrž hned učiníme následující krok. Budiž setrvačník náš symetrický s extrémní osou Z. Pak osy X a Y budou i za rotace setrvačníku stále hlavními osami o témž momentu setrvačnosti $A = B$, takže

$$\Sigma m(x^2 + y^2) = C, \quad \Sigma m(x^2 + z^2) = \Sigma m(y^2 + z^2) = A = B.$$
$$\Sigma mxy = \Sigma myz = \Sigma mzx = 0. \qquad (l)$$

Z rozepsaného determinantového tvaru (k), když hned provedeme sumaci přes všechny hmotné elementy setrvačníku a vzpomeneme relací (l), nám pak vznikne

$$\Sigma m[\bar{r}\bar{a}_r] = \Sigma m[\bar{r}\bar{g}] + \bar{\imath}(\nu^2\sin\vartheta\cos\vartheta\,\Sigma m(y^2 - z^2) + \mu\nu\sin\vartheta\,.\,2\Sigma my^2). \quad (m)$$

Ale z (l) plyne přímo

$$\Sigma m(y^2 - z^2) = C - A, \qquad 2\Sigma my^2 = C,$$

takže přídavný člen k momentu od zemské tíže zní

$$\bar{\imath}(C\mu + (C - A)\nu\cos\vartheta)\nu\sin\vartheta, \qquad (n)$$

což úplně souhlasí s dřívějšími vzorci (106 d resp. d'').

Tento způsob odvození neskýtá tedy zásadně nic nového, leč poznatek, že prvý, hlavní člen v (n) jest momentem sil Coriolisových, kdežto člen druhý pochází od posledního členu ve výraze (e) pro zrychlení z vedení a_r, o němž z dřívějška již víme, že jest totožný s t. zv. silou centrifugální. „Elipsoidický“ člen deviačního odporu vzniká tedy jakožto moment sil centrifugálních; u kulového setrvačníku je ovšem nulou. Poimu sil Coriolisových a jejich momentu lze často použíti s prospěchem k elementárnímu výkladu zjevů u setrvačníků vedených.

Obecný tvar (k), zde po prvé odvozený, má tu výhodu, že z něho lze snadno přejíti k setrvačníku obecnějšímu, nesymetrickému, jak jsem ukázal v pojednání, které vyšlo v Rozpravách II tř. Čes. Akad. (1920).

108. Některé pokusy se setrvačníky.

Na základě poznatků o kinetické reakci setrvačníku můžeme nyní vysvětliti některé pokusy, které se v experimentálních přednáškách sice často ukazují, k nimž však zřídka bývá podáván dostatečný výklad.

1. Perimetrický setrvačník*) (G. Sire, 1861) není než setrvačník Maxwellův (obr. 102 a), k jehož vrcholu lze přiložiti různé hori-

*) Popis a vyobrazení jest v Strouhal-Kučerově Mechanice (2. vyd., str. 407). Nazývá se tam Zengerovým nutoskopem. Drátěný obrazec jest tam na obrázku odklopen vzhůru.

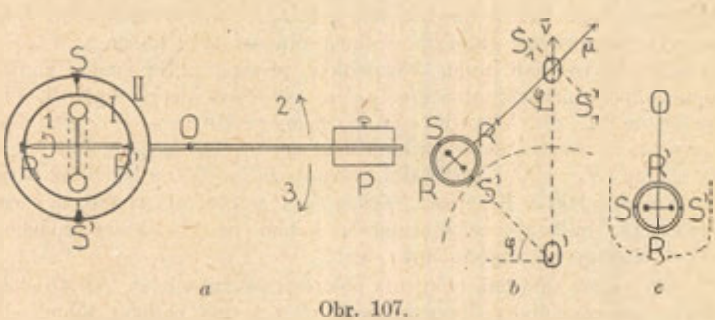
zontální obrazce, zhotovené nejčastěji z drátu. Jakmile se roztočený setrvačník dotkne horním koncem hmotné osy (tyčinky nahoře mírně zahrocené) drátu, neopustí jej nadále, nýbrž sleduje jej, jako by osa se po něm valila a to tím rychleji, čím je křivost v okamžitém bodě dotyku větší. Ježto se tak děje zřejmě proti tendenci centrifugální síly, působí zjev zvláště u prudkých záhybů dojmem velmi překvapujícím. Vysvětlení leží však zcela nasnadě:



Obr. 106.

Jakmile se hmotná osa dotkne drátu, na př. v bodě P (obr. 106), vzniká síla od tření, která má směr tečné PP'. Její moment přičítá se k okamžitému impulsmomentu U, a má směr kolmý na drát a dovnitř drátu směřující. Osa symetrie setrvačníku CO_1 se přitlačí k drátu tak, že CP se následkem tření stává okamžitou osou rotační, t. j. že se jak osa setrvačníku tak impulsmoment U nutí k precesnímu pohybu, jehož herpolhodiový kužel jest určen vrcholem C a styčnými body P na drátu. Kinetická reakce setrvačníku neustále tlačí hmotnou jeho osu na drátěný obrazec, ať již se děje pohyb vně, jak je kresleno, nebo uvnitř, na druhé straně drátu, jak by nás o tom okamžitě poučil příslušný obrazec, nebo jak nám praví Klein-Sommerfeldova věta o směru deviačního odporu. Jest patrno, že dostatečné tření jest nezbytnou podmínkou vzniku zjevu.

2. Přístroj Fesselův*) dovoluje provésti celou řadu velmi poučných pokusů. Není to vlastně než setrvačník s dvěma stupni volnosti, jak jej při pohledu shora zcela schematicky znázorňuje obr. 107 *a*, který se může otáčeti kolem osy RR' a spolu s kruhem I kolem osy SS', jejíž ložiska jsou v kruhu II. Těžiště setrvačníku má býti přesně v průseku obou os. Ke kruhu II je připojena tyč, otáčivá kolem bodu O v rovině horizontální i vertikální. Posuvným závažím P



Obr. 107.

na jejím konci dá se přístroj vyvážiti vzhledem k bodu O. Roztočme setrvačník ve směru šipky 1, takže při pohledu z O se otáčí směrem

*) Jeho vyobrazení a popis najde čtenář v Strouhal-Kučerově Mechanice (str. 401 a násl.). Mechanik Fessel v Kolíně n. Rýn. jej sestrojil dle údajů J. Plückerových (před 1853).

ručiček hodinových. Pokud nebude jinak řečeno, myslíme oba kruhy I i II, i tyč, ležící v rovině vodorovné, souhlasné s rovinou papíru.

a) Uchopme tyč rukou a otáčejme ji kolem O v rovině papíru ve směru šipky 2: Kruh I se otočí kolem osy SS' tak, že konec osy R se zvedne nad papír, konec R' se skloní pod něj. Při trvalém (pomalém) otáčení tyče dle šipky 2 neustane tento pohyb kruhu I dříve, než až osa RR' se postaví kolmo na papír, koncem R ven, takže otáčení 2 vynucené (kolem O) a otáčení setrvačníku 1 se děje kolem rovnoběžných a stejnosměrných os. Týž zjev by nastal, kdyby v původní poloze byla osa RR' libovolně k papíru skloněna. Vysvětlení snadno se najde v kinetické reakci setrvačníku vedeného po herpolhodiovém kuželi. Pokus popsaný v § 106 jest s tímto úplně totožný.

Kdybychom tyč otáčeli dle šipky 3, klonilo by se R pod papír, R' by se vynořilo nad něj.

Kdyby se změnil směr 1 otáčení setrvačníku v opačný, musili bychom k docílení týchž účinků zaměniti otáčení 2 za 3 a naopak.

S n a h a p o s t e j n o s m ě r n é r o v n o b ě ž n o s t i osy RR' s osou vynucené rotace, procházející O a na papír kolmé, se projevuje velmi názorně.

b) Dle téhož principu bylo by lze v libovolném místě zemského povrchu určiti směr osy zemské (tedy i zeměpisnou šířku) pomocí setrvačníku o dvou stupních volnosti, jehož osa SS' by měla přesně směr zeměpisné rovnoběžky.

c) Měníme-li impulsy směru 2 a 3 ve vhodném tempu, docílíme toho, že se setrvačník s kruhem I otáčí kolem osy SS' neustále dokola kolem. Smysl otáčení lze obrátiti dle toho, začneme-li impulsem ve směru 2 či 3. Pokus tento popsal po prvé F. H e i n e n roku 1857.

d) Mějme vyvážený přístroj v normální poloze, oba kruhy I a II v rovině vodorovné. Dvojicí působící na rameni RR' se snažme vychýliti R nahoru (z papíru ven), R' dolů (pod papír). Této dvojice docílíme tlakem prstů, nebo lépe tahem na nitkách v R a R' upevněných. Při tomto pokuse se doporučuje zameziti volnost otáčení tyče kolem O v rovině vertikální, dovoluje-li tomu konstrukce přístroje. Na snahu zmíněné dvojice odpoví přístroj otočením kolem osy O ve směru šipky 3. Proč, zjistíme na př. dle věty K l e i n - S o m m e r f e l d o v y. Při zmíněném vynucovaném otáčení setrvačníku kolem osy SS' má herpolhodiový kužel tvar roviny ($\vartheta_0 = 90^0$) vertikální, rovnoběžné s RR' a ležící na straně bodu S v obr. 106*a*. Kinetická reakce tlačí setrvačník na tuto myšlenou rovinu, čili projevuje se momentem kolem osy O, který způsobuje otočení přístroje ve směru šipky 3.

Srovnejme výsledek pokusu s pokusem prvým v odst. 2*a*. Otáčeli-li jsme tyč směrem šipky 2, vystupovalo R z roviny papíru; táhnem-li R z roviny papíru ven, vzniká otáčení dle šipky 3, tedy opačné, než indukovalo ten pohyb osy RR' kolem SS'. Pokus tedy velmi pěkně dotvrzuje větu uvedenou na začátku (nebo pod čarou) § 106.

Podobně můžeme „obrátiti“ veškeré pokusy odst. 2*a*).

e) Setrvačníky, zvláště pak setrvačníky s dvěma stupni volnosti, nabývají pro technickou praxi čím dále tím větší důležitosti. Nebude tedy snad od místa, vložíme-li i sem několik k tomu se vztahujících poznámek.

Pokus $2a$ provádí se ve velkém měřítku, kdykoli probíhá rychle jedoucí vlak nějakou křivku. Páry kol, na spodku vozu spolu masivní osou spojených, jsou takové setrvačníky, které, je-li rychlost vlaku v a poloměr kol r, se otáčejí úhlovou rychlostí $\mu = v/r$. Kdyby vlak jel po papíru nahoru a uhýbal se vpravo, máme zcela tytéž poměry, jako znázorňuje obr. 107 a při vnuceném pohybu tyče směrem šipky 3. Jest patrno, že kinetickou reakcí rotujících kol vzniká dvojice, která se snaží vůz převrhnouti na stranu vnější koleje. Obrácením rotace 1 a záměnou šipky 2 za 3 je patrno, že totéž platí i pro uhýbání se vlaku nalevo. Také velikost dvojice snadno zjistíme: Je-li R poloměr křivosti kolejnic, je úhlová rychlost ν pohybu vnuceného (po herpolhodiovém kuželi) rovna $\nu = v/R$. Ježto pak $\vartheta_0 = 90^0$, jest dle (106 d) deviační moment

$$D = C\mu\nu = C\frac{v^2}{rR},$$

kde C je moment setrvačnosti páru kol kolem jejich osy. Deviační moment roste se čtvercem rychlosti vlaku a se zakřivením trati, zcela podobně jako moment od „síly centrifugální", s nímž má také týž směr. Z obou těchto důvodů klade se v záhybech vnější kolej poněkud výše, aby zvýšený moment tíže vozu vzhledem k vnější kolejnici vyvážil pro jistou střední rychlost tyto momenty při pohybu vozu vznikající.

Představme si, že setrvačník o dvou stupních volnosti s kruhem II ve vertikální, osou SS' v horizontální rovině, tak, jak naznačuje obr. 107 c, ve velmi velikém a mohutném provedení jest postaven napříč lodi, jejíž schematický průřez jest na obrazci naznačen tečkovanou čarou. Kruh II jest s lodí pevně spojen. To je schema Schlickova lodního setrvačníku. Když se loď s boku na bok kymácí, to jest koná kyvy kolem své podélné osy, kýve setrvačník s kruhem I dle pokusu $2a$ vpřed a vzad kolem osy SS'. Původní vertikální poloha osy RR' jest pojištěna tím, že těžiště samotného setrvačníku se nachází pod přímkou SS'. Postaráme-li se o to, aby kyvy setrvačníku relativně k lodi byly velmi silně tlumeny — ač ne zamezeny! — pásovou brzdou a hydraulickými brzdícími válci, mění se v tomto tlumícím zařízení valná část energie kymácení lodi v teplo, a kyvy lodi se jednak velmi značně seslabují (při Schlickových pokusech z 15^0 ba 25^0 na 1^0 až 2^0), jednak velmi rychle tlumí. Jak je to důležité, na př. pro střelbu s námořních lodí, netřeba snad připomínati. Spoutá-li se pevně kruh I s II, nemá setrvačník vlivu. To bylo příčinou nezdaru prvých pokusů známého anglického inženýra Bessemera v letech 70. minulého století. Jeho setrvačníku chyběl jeden stupeň volnosti, ovšem nutně velmi silně tlumený, který mu přidal o 30 let později hamburský inženýr Otto Schlick. V malém lze napodobiti tyto pokusy, zavěsíme-li dle obr. 107 c tyč Fesselova aparátu tak, aby mohl kývati kolem osy na papír kolmé. Tlumení obstarají pružné gumové pásky, kterými spojíme kruhy I a II poblíže míst R a R', po případě jiné zařízení, které lze snadno improvisovati.

Postavme setrvačník vyjmutý z Fesselova přístroje šikmo na vodorovný stolek centrifugálního stroje, s jehož vertikální osou $O'O$ nechť svírá tyč úhel φ. Tím je schematicky dán setrvačníkový kompas,

postavený na zeměkouli (v obr. 107 *b* tečkovaně naznačenou) v místě zeměpisné šířky φ. Osa setrvačníku $R'R$ takového kompasu může pomocí otočení kolem vertikální osy SS' zaujmouti libovolnou polohu v rovině horizontální. Následkem otáčení zeměkoule staví se vždy do směru severojižního. Pokusem snadno se potvrdí, že, otáčíme-li desku centrifugálního stroje, míří RR' vždy k bodu O jeho osy. Důvod leží úplně nasnadě. Znázorníme-li rotaci centrifugálního stroje vektorem $\bar{\nu}$, rotační rychlost setrvačníku vektorem $\bar{\mu}$, je deviační kinetická reakce setrvačníku dána dle (106 *d'*) vektorem $D = C[\bar{\mu}\bar{\nu}]$. Pokud tento otáčivý moment má nějakou složku spadající do směru osy SS' resp. $S_1S_1' \| SS'$, potud se otáčí setrvačník kolem této osy. Jenom tehdy není této složky, je-li $[\bar{\mu}\bar{\nu}] \perp S_1S_1'$, čili protíná-li RR' ve svém prodloužení osu $O'O$.

Dále se technickým užitím setrvačníku*) zabývati nemůžeme. Vřele však budiž doporučen k jeho studiu IV. sešit Klein-Sommerfeldovy: Theorie des Kreisels (Lipsko 1910, str. 761—966 celého díla), který zpracoval F. Noether. Vědomosti, kterých čtenář dosud nabyl, zvláště obsah § 106 dokonale stačí, aby mohl bez jakéhokoli studia prvých tří sešitů bezprostředně všem jeho vývodům porozuměti.

f) Působila-li na setrvačník na př. Maxwellův nebo v přístroji Bohnenbergerově či Fesselově nějaká dvojice, reagoval určitým způsobem, často překvapujícím, leč nevrátil se do své původní polohy, tak jak to učiní vychýlené kyvadlo.

Učiňme následující pokus: Celý přístroj Fesselův i s podstavcem postavme na horizontální stůl centrifugálního stroje, jehož vertikální osa procházejž bodem O. Pohyblivost tyče Fesselova stroje v bodě O zrušme vhodnými svorkami. Oba stroje dohromady representují setrvačník se třemi stupni volnosti — pohyblivý kolem tří os, dvou RR' a SS' horizontálních, třetí — ose stroje centrifugálního — vertikální. Otáčíme-li nyní stolečkem úhlovou rychlostí ν, postaví se osa RR' roztočeného setrvačníku vertikálně, rovnoběžně s osou vnuceného kuželе herpolhodivého, který ovšem se zvrhl ve vertikální válec. Kdybychom pak za nepřetržitého otáčení setrvačníku i stolku vnějším nějakým vlivem (dvojicí) vychýlili osu RR' z polohy vertikální, vrátí se do ní zpět po několika kmitech kolem ní. Není nesnadno udati zákon těchto oscilací, je-li původní výchylka od vertikály ϑ malá. Úhel ϑ zmenšuje se deviační kinetickou reakcí (106 *d*), kteroužto dvojici můžeme za malých ϑ, dosadivše $\cos\vartheta = 1$, $\sin\vartheta = \vartheta$, psáti

$$(C\mu\nu + (C - A)\nu^2) \,.\, \vartheta.$$

Je-li moment setrvačnosti I kruhu spolu se setrvačníkem kolem osy SS' roven K, dává obecný zákon pro otáčení kolem pevné osy (97 *d*), zanedbáme-li veškeré tření,

$$K\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -(C\mu\nu + (C - A)\nu^2)\,\vartheta.$$

*) Sem spadají vedle matematických podrobností o setrvačníku lodním a setrvačníkovém kompasu studium stability bicyklu (kola), os u Lavalovy turbiny, theorie jednokolejových drah a dále užití nautická a balistická.

To je rovnice „kyvadlová“, která dává pro dobu kyvu při malých isochronních výkyvech

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{K}{C\mu\nu + (C - A)\nu^2}}.$$

Osa setrvačníku tedy má snahu vrátiti se do rovnovážné polohy (vertikální), kolem níž kmitá jako kyvadlo; říkáme, že je stabilisována, jevíc, jak se vyjadřují Klein a Sommerfeld, jakýsi druh absolutní orientace v prostoru. Stabilisace jsme zde dosáhli za tří stupňů volnosti (volnost otáčení kolem vlastní osy v ně čítajíce). Setrvačník o jediném stupni volnosti jest ovšem naprosto stabilní, nemoha se vůbec vychýliti. Lord Kelvin ukázal, že vůbec lze docíliti stabilisace pouze při lichém počtu stupňů volnosti*). Zde jsme uvedli pouze jediný, snad vůbec nejjednodušší, příklad takovéto stabilisace; jiným je zmíněný již setrvačníkový kompas a Schlickův lodní setrvačník. Neznalost Kelvinovy věty uvedla již velmi mnohé technické vynálezce (tak již zmíněného Bessemera) zvláště při důležitém problému stabilisace aeroplánů úplně na zcestí**).

g) Spoutáme-li vhodnou svorkou kruhy *I* a *II* u přístroje Fesselova, třeba v téže rovině, zbývá nám na konci tyče setrvačník s jediným stupněm volnosti. Druhé dva stupně se mu přidávají pohyblivou osou *O*. Impuls ve směru šipky 2 vede pak k tomu, že se zvedne celá levá strana tyče *O*, sníží strana pravá atd. Tyto pokusy nejsou než obměnou pokusů 2*a*. Pěkně se však ukazuje precese. Docílíme-li na straně pravé (posunutím závaží *P* nebo zvláštním přívažkem) trvalé převahy, nestoupá levá strana do výše, nýbrž následkem kinetické reakce začne precesní pohyb setrvačníku ve směru $S'S$. Máť na obr. 104*a* vektor $\bar{\mu}$ směr zprava vlevo, vektor $\bar{\nu}$ směr zdola nahoru, tedy dle (106*d'*) kinetická reakce směr za papír. Obměny tohoto pokusu leží nasnadě.

Fesselovým přístrojem se v cizině téměř výhradně rozumí takovýto přístroj na precesi se setrvačníkem o jediném stupni volnosti. Jest však viděti z popsaných pokusů, z nichž *e* a *f* jsou námi popsány vůbec poprvé, že ze setrvačníku s dvěma stupni volnosti se dá malými přídatnými pomůckami učiniti téměř universální strojek na pokusy se setrvačníkem vedeným. A jest ještě celá řada dalších obměn pokusných. Připevníme-li horní konec tyče (obr. 106 *b*) do závěsu Cardanova, nebo jej prostě zavěsíme na pevný provazec (strunu), spoutavše navzájem kruhy *I* a *II*, máme t. zv. gyroskopické kyvadlo.

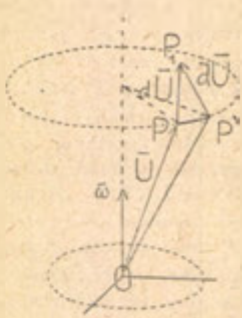
*) Mluví ovšem o sudém počtu těchto stupňů, nepočítaje otáčení kolem vlastní osy setrvačníku za stupeň volnosti.

**) Velmi ostře, ale spravedlivě, se v té příčině vyslovuje Bouasse (Cours de mécanique): „Člověk by nevěřil, jaké absurdnosti se udávají za bernou minci na účet setrvačníku. Počet systému navržených k pojištění stability pomocí jediných účinku setrvačníkových bez jakéhokoli jiného systému kompensujícího dokazuje, že většina vynálezců nikdy neviděla fungovati setrvačník a nemá ponětí o jeho theorii. Domnívají se, že setrvačník je nadán tajemnou mocí aby do nekonečna zachovával svou otáčecí osu pevnou (v prostoru), přes všechny dvojice, jež na něj působí.“

109. Rovnice Eulerovy.

Z Poinsotova popisu otáčení setrvačníku nemůžeme vystihnouti jeho stav za určitého okamžiku. Pro dokonalejší popis časového průběhu děje musíme jej sledovati analyticky.

A tu buď můžeme sledovati změnu vektoru $\bar\omega$ v prostoru, v němž, jak víme, probíhá herpolhodiový kužel, nebo můžeme sledovati časový průběh změn toho vektoru v rotujícím tělese, kde probíhá kužel polhodiový. Na prvou otázku odpovídá druhá věta impulsová $\dot{\bar U}=\bar M$, kde vše jest vztaženo k osám pevným v prostoru. Pro odpověď na druhou otázku musíme $\bar\omega$ a ovšem i $\bar U$ vztahovati k soustavě souřadnic pevně spojené s rotujícím tělesem, které se tedy spolu s ním otáčejí. Pak obdržíme Eulerovy rovnice pro pohyb tuhého tělesa kolem pevného bodu, nebo ovšem volného tělesa kolem jeho těžiště. Tento druhý postup je důležitý na příklad pro sledování rotace zeměkoule, kterou sledujeme vzhledem k ní samé.



Obr. 108.

Představme si vektor $\bar U$ vedený z bodu, kolem kterého se otáčí tuhé těleso a tedy i soustava souřadnicová s ním spojená i pozorovatel sám. Rotační rychlost buď $\bar\omega$ (obr. 108). Kdyby vektor $\bar U$ byl rovněž s tělesem spojen, vykonal by jeho konec v čase dt dráhu $\overline{PP'} = [\bar\omega\bar U]\,dt$ v absolutním prostoru. Pozorovatel by ovšem nepozoroval na vektoru $\bar U$ změny žádné. Kdyby však $\bar U$ byl v prostoru pevný, byla by jeho zdánlivá změna $\overline{P'P} = -[\bar\omega\bar U]\,dt$. Když tedy vektor $\bar U$ v absolutním prostoru se změní o $\overline{PP_1} = d\bar U$, jest jeho změna zdánlivá, kterou pozorovatel může stanoviti, dána vektorem $\overline{P'P_1} = \partial\bar U$, kde zvláštní tvar písmeny ∂ nám vyznačuje, že se jedná o změnu vzhledem k rotující soustavě souřadnic. Dle obrazce jest

$$\overline{P'P_1} = \overline{P'P} + \overline{PP_1} \quad \text{čili} \quad \partial\bar U = -[\bar\omega\bar U]\,dt + d\bar U,$$

nebo dělíme-li dt a přemístíme a užijeme pak druhé věty impulsové,

$$\frac{d\bar U}{dt} = \frac{\partial\bar U}{dt} + [\bar\omega\bar U] = \bar M. \qquad (a)$$

To jsme ostatně mohli napsati hned, kdybychom byli užili obecného vztahu (39 c) z úvah o pohybu relativním. Tím jest náš úkol řešen.

$\bar U$, $\bar M$ a $\bar\omega$ musíme ovšem vztahovati k osám pevným v absolutním prostoru. Můžeme však také mysliti si na začátku daného okamžiku zachycenu polohu nějakých os s tělesem pevně spojených (na př. tří hlavních os setrvačnosti) a fixovánu v pevném prostoru, a vztahovati tyto veličiny k ní. Jest to tak, jako bychom na začátku daného okamžiku si myslili soustavu souřadnicovou dvojnásobnou, ale spolu splývající, z nichž jedna pak nadále zůstane nepohnuta, kdežto druhá se dá do rotace kolem přímky

$$\bar\omega = i\omega_\xi + j\omega_\eta + k\omega_\zeta. \qquad (b)$$

Tento způsob je velmi výhodný, neboť pak vztahujeme veškeré veličiny v druhém a třetím členu vztahu (a) k téže soustavě, za kterou budeme užívati soustavu hlavních os setrvačnosti.

Ježto potom dle ($100\,o$) je

$$\frac{\bar{d}\bar{U}}{dt} = \bar{\imath} A \frac{d\omega_\xi}{dt} + \bar{\jmath} B \frac{d\omega_\eta}{dt} + \bar{k} C \frac{d\omega_\zeta}{dt} \qquad (c)$$

a

$$[\bar{\omega}\bar{U}] = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ \omega_\xi & \omega_\eta & \omega_\zeta \\ A\omega_\xi & B\omega_\eta & C\omega_\zeta \end{vmatrix}, \qquad (d)$$

obdržíme rozepsáním rovnice Eulerovy

$$\begin{aligned} A\frac{d\omega_\xi}{dt} + \omega_\eta \omega_\zeta (C - B) &= M_\xi, \\ B\frac{d\omega_\eta}{dt} + \omega_\zeta \omega_\xi (A - C) &= M_\eta, \\ C\frac{d\omega_\zeta}{dt} + \omega_\xi \omega_\eta (B - A) &= M_\zeta. \end{aligned} \qquad (e)$$

Ani na pravé straně rovnice (d), ani pak v rovnicích (e) nepíšeme zvláštní znamení $\bar{d}$ pro diferenciaci, ježto z obecného vztahu ($39\,c$) plyne

$$\frac{\bar{d}\bar{\omega}}{dt} = \frac{d\bar{\omega}}{dt}.$$

Naše odvození Eulerových rovnic jest nejjednodušší a nejnázornější ze všech možných*) a jasně ukazuje, že nejsou ničím jiným než druhou větou impulsovou, ovšem vztaženou na pohyblivé osy. Nemusejí jimi býti ani hlavní osy setrvačnosti, nýbrž můžeme je zcela snadno přepsati na libovolné osy s tělesem se otáčející. Jsou-li to osy $\bar{\imath}', \bar{\jmath}', \bar{k}'$, v nichž pak

$$\begin{aligned} \bar{U} &= \bar{\imath}'L + \bar{\jmath}'M + \bar{k}'N, \\ \bar{M} &= \bar{\imath}'\mathbf{A} + \bar{\jmath}'\mathbf{M} + \bar{k}'\mathbf{N}, \\ \bar{\omega} &= \bar{\imath}'p + \bar{\jmath}'q + \bar{k}'r, \end{aligned} \qquad (f)$$

obdržíme dosazením do (a) ihned

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} + qN - rM &= \mathbf{A}, \\ \frac{dM}{dt} + rL - pN &= \mathbf{M}, \\ \frac{dN}{dt} + pM - qL &= \mathbf{N}, \end{aligned} \qquad (g)$$

což jest obecný tvar rovnic Eulerových.

---

*) Pochází (viz P. Stäckel, Encyklopädie) v podstatě od Saint-Guilhelma (1851), ač Klein a Sommerfeld je mylně přičítají H. B. Haywardovi, jenž je tak odvodil později (1856). Přešlo, ač ne ve tvaru vektorovém, který je tak průzračný, do většiny učebnic francouzských (Delaunay, Despeyrous, Appell).

Našeho odvození lze dokonce velmi snadno užíti, vztahuje-li se vše k soustavě souřadnic, jež není pevná ani v prostoru, ani v tělese, když se dle článků o relativním pohybu znázorní rychlost konečného bodu impulsmomentu jakožto vektorový součet rychlosti relativní a rychlosti z vedení soustavy. Obdržíme pak diferenciální rovnice pro složky p', q', r' rotační rychlosti, jichž se užívá při studiu precese a nutace a valení těžkých rotačních těles po rovině.

Integrací Eulerových rovnic ovšem není ještě náš úkol úplně řešen. Obdržíme z nich rotační rychlosti $\omega_\xi, \omega_\eta, \omega_\zeta$ jakožto funkce času, určují tedy okamžitý pohybový stav tělesa, ale neurčují jeho skutečnou polohu, která jest dána třemi parametry, za něž nejlépe jest voliti **tři úhly Eulerovy** φ, ψ, ϑ. Definovali jsme je již v § 5, kde jsme také uvedli vzorce (5 a), dle nichž se vypočte poloha pohyblivých os vzhledem k osám pevným. Zbývá tedy vyjádřiti $\omega_\xi, \omega_\eta, \omega_\zeta$ těmi úhly φ, ψ, ϑ a ovšem i jejich derivacemi dle času $\dot\varphi, \dot\psi, \dot\vartheta$. Rovnice ty, zvané **rovnice kinematické**, integrujeme za známých z rovnic Eulerových $\omega_\xi, \omega_\eta, \omega_\zeta$ a obdržíme φ, ψ, ϑ jakožto funkce času, čímž je teprve problém úplně řešen. Jedná se tedy nyní o odvození rovnic kinematických. Nemusíme sahati až ke vztahům (5a), nýbrž snadno nalezneme je přímo.

Dříve však budiž poznamenáno toto: Z obr. v § 5 vidíme, že časová změna úhlu φ odpovídá čisté rotaci; proto nazýváme φ úhlem rotace. Mění-li se úhel ψ (azimut uzlové přímky ON_1) rovnoměrně s časem, provádí pohyblivá soustava souřadnicová rovnoměrnou (regulární) precesi kolem osy OZ; odtud pro ψ název úhel precesní. Když konečně za precesního pohybu periodicky kolísá úhel ϑ, vzniká zjev, který jsme v § 85 nazvali nutací; proto zveme ϑ úhel nutační.

A nyní ke kinematickým rovnicím. Libovolnou rotaci $\bar\omega$ můžeme mysliti rozloženu dle os ξ, η, ζ na složky $\omega_\xi, \omega_\eta, \omega_\zeta$, takže jakožto vektor je psána tvarem (a). Můžeme však také za složky vektoru toho voliti $\dot\varphi, \dot\psi, \dot\vartheta$, třeba by nebyly vesměs na sobě kolmé, neboť patrně jim odpovídají osy $O\zeta$, OZ a ON_1.

Ovšem musí přes to obě soustavy složek vyhovovati základnímu pravidlu o průmětech, že součet orthogonálních průmětů složek $\omega_\xi, \omega_\eta, \omega_\zeta$ na libovolnou přímku musí se rovnati součtu orthogonálních průmětů složek (h) na tutéž přímku, neboť oba součty jsou průmětem jednoho a téhož vektoru $\bar\omega$. Za onu přímku volme postupně ON_1, ON_2 a $O\zeta$. Obdržíme schema:

Průmět na	ON_1	ON_2	$O\zeta$	
	ω_1	ω_2	ω_ζ	
$\dot\varphi$	0	0	$\dot\varphi$	
$\dot\psi$	0	$\dot\psi \sin\vartheta$	$\dot\psi \cos\vartheta$	
$\dot\vartheta$	$\dot\vartheta$	0	0	(h)
ω_ξ	$\omega_\xi \cos\varphi$	$\omega_\xi \sin\varphi$	0	
ω_η	$-\omega_\eta \sin\varphi$	$\omega_\eta \cos\varphi$	0	
ω_ζ	0	0	ω_ζ	

Dle hoření věty pak

$$\begin{aligned} \dot\vartheta &= \omega_\xi \cos\varphi - \omega_\eta \sin\varphi, \\ \dot\psi \sin\vartheta &= \omega_\xi \sin\vartheta + \omega_\eta \cos\varphi, \\ \dot\varphi + \dot\psi \cos\vartheta &= \omega_\zeta, \end{aligned} \qquad (i)$$

z nichž výpočtem*)

$$\begin{aligned} \omega_\xi &= \dot\vartheta \cos\varphi + \dot\psi \sin\varphi \sin\vartheta, \\ \omega_\eta &= -\dot\vartheta \sin\varphi + \dot\psi \cos\varphi \sin\vartheta, \\ \omega_\zeta &= \dot\varphi + \dot\psi \cos\vartheta. \end{aligned} \qquad (j)$$

To jsou hledané kinematické rovnice. Můžeme k nim připojiti zcela podobně vznikající vztahy pro rozklad dle pevných os

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot\vartheta \cos\psi + \dot\varphi \sin\psi \sin\vartheta, \\ \omega_y &= \dot\vartheta \sin\psi - \dot\varphi \cos\psi \sin\vartheta, \\ \omega_z &= \dot\psi + \dot\varphi \cos\vartheta, \end{aligned} \qquad (k)$$

a konečně z obrazce nebo schematu (h) evidentní vztahy pro rozklad dle os $O\zeta$, ON_1 a ON_2, opět orthogonálních,

$$\omega_\zeta = \dot\varphi + \dot\psi \cos\vartheta, \quad \omega_1 = \dot\vartheta, \quad \omega_2 = \dot\psi \sin\vartheta, \qquad (l)$$

jež vynikají zvláštní jednoduchostí.

Jeden důsledek z nich ihned uvedeme: Okamžitá otáčecí rychlost tělesa nedá se vyjádřiti jakožto diferenciální poměr $\dot\chi$ (chápaný jakožto vektor, viz str. 195) nějakého úhlu, na př. χ dle času. Muselot by býti

$$\omega_\zeta = \dot\varphi + \dot\psi \cos\vartheta = \frac{\partial \chi_\zeta}{\partial \varphi}\dot\varphi + \frac{\partial \chi_\zeta}{\partial \psi}\dot\psi + \frac{\partial \chi_\zeta}{\partial \vartheta}\dot\vartheta,$$

z čehož
$$\frac{\partial \chi_\zeta}{\partial \varphi} = 1, \quad \frac{\partial \chi_\zeta}{\partial \psi} = \cos\vartheta, \quad \frac{\partial \chi_\zeta}{\partial \vartheta} = 0,$$

a dále
$$\frac{\partial^2 \chi_\zeta}{\partial \psi \partial \vartheta} = -\sin\vartheta, \quad \frac{\partial^2 \chi_\zeta}{\partial \vartheta \partial \psi} = 0 \text{ atd.},$$

což jest navzájem neslučitelno.

Proto nazýváme ω a jeho složky dle orthogonálních os neholonomní parametry rychlosti, kdežto $\dot\varphi$, $\dot\psi$, $\dot\vartheta$ jakožto skutečné diferenciální kvocienty souřadnic jsou holonomní parametry rychlosti. (Srov. § 55 pod čarou.)

Vidíme nyní zřejmě: Nejsou-li na pravé straně Eulerových rovnic (e) momenty M_ξ, M_η, M_ζ vyjádřeny jakožto explicitní funkce koordinát φ, ψ, ϑ a rychlostí $\dot\varphi, \dot\psi, \dot\vartheta$, obdržíme z nich ω_ξ, ω_η, ω_ζ jakožto funkce času, které musíme dosaditi do kinematických rovnic (j), z nichž teprve novou integrací lze získati φ, ψ, ϑ jakožto funkce času, jimiž je problém řešen.

Jinak musíme považovati rovnice (e) a (j) za simultánní systém diferenciálních rovnic.

---

*) Tyto vztahy obdrželi bychom přímo, kdybychom s rovnicí (a) a rovnicí $\bar\omega = \bar k \dot\varphi + \bar k' \dot\psi + \bar\imath_1 \dot\vartheta$, která vyjadřuje druhý rozklad vektoru $\bar\omega$ ($\bar\imath_1$ je jedničkový vektor ve směru ON_1), nakládali zcela podobně jako v § 5, t. j. nejdříve obě znásobili $\bar\imath$ a potom interpretovali vzniklé součiny ($\bar\imath \bar k$), ($\bar\imath \bar k'$), ($\bar\imath \bar\imath_1$) atd.

110. Setrvačník symetrický beze sil.

Obecné řešení Eulerových rovnic za libovolných vnějších sil není možné. Proberene dva nejjednodušší případy, z nichž prvý je symetrický setrvačník s extrémním momentem setrvačnosti C a druhými dvěma stejnými $B=A$, na nějž nepůsobí žádné vnější síly.

Budiž ζ osa tvarové symetrie setrvačníku, k níž patří moment setrvačnosti C. Setrvačník byl původně zcela libovolně roztočen. Rovnice (107 e) přejdou na

$$A\frac{d\omega_\xi}{dt}+\omega_\eta\omega_\zeta(C-A)=0,$$
$$A\frac{d\omega_\eta}{dt}+\omega_\xi\omega_\zeta(A-C)=0, \qquad (a)$$
$$C\frac{d\omega_\zeta}{dt}=0.$$

Z třetí plyne bezprostředně

$$\omega_\zeta=\text{stálé}, \qquad (b)$$

a můžeme vhodnou volbou kladného směru osy ζ docíliti toho, aby stále $\omega_\zeta>0$, otáčení kolem osy ζ se dálo směrem kladným. Položme

$$\omega_\zeta\frac{C-A}{A}=\text{stálé}=\mu_1. \qquad (c)$$

Rovnice (a) se pak přepíší na

$$\dot\omega_\xi+\mu_1\omega_\eta=0, \qquad \dot\omega_\eta-\mu_1\omega_\xi=0. \qquad (d)$$

Derivujme prvou dle času, dosaďme za $\dot\omega_\eta$ z druhé a máme

$$\ddot\omega_\xi+\mu^2{}_1\omega_\xi=0, \qquad (e)$$

jejímž integrálem je

$$\omega_\xi=a\cos(\mu_1t-\varphi_1), \qquad (f)$$

kde a a φ_1 jsou integrační konstanty, dané počátečními podmínkami. Dosadíme-li do druhé (d), dává integrace

$$\omega_\eta=a\sin(\mu_1t-\varphi_1). \qquad (g)$$

Další integrační konstantu již nepřipojujeme, jsouť a a φ_1 obě odpovídající prvým dvěma rovnicím (a).

Z (c), (f), (g) plyne

$$\omega=\sqrt{\omega_\xi^2+\omega_\eta^2+\omega_\zeta^2}=\sqrt{a^2+\omega_\zeta^2}=\text{stálé}, \qquad (h)$$
$$\sqrt{\omega_\xi^2+\omega_\eta^2}=a=\text{stálé}, \qquad (i)$$

takže jak velikost rotační rychlosti, tak její průmět na rovinu $\xi\eta$ jsou stálé (obr. 109).

Směr průmětu jest dán úhlem φ, který dle obrazce a (f) je dán vztahem

$$\cos\varphi=\frac{\omega_\xi}{a}=\cos(\mu_1t-\varphi_1). \qquad (j)$$

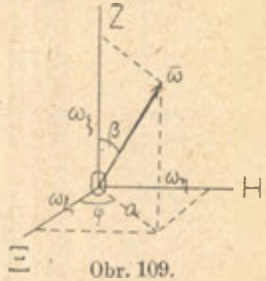
Průmět konečného bodu vektoru ϖ obíhá tedy v tělese setrvačníku stejnoměrně dokola kolem osy $O\zeta$ a dle (j) jest jeho rychlost oběžná μ_1 a doba jednoho oběhu

$$T = \frac{2\pi}{\mu_1} = 2\pi \frac{1}{\omega_\zeta} \frac{A}{C-A}. \qquad (k)$$

Ježto sklon β vektoru ϖ k ose $O\zeta$, který splňuje vztah

$$tg\,\beta = \frac{a}{\omega_\zeta}, \qquad (l)$$

je stálý, opisuje rotační osa ϖ v setrvačníku samém kruhový kužel, kužel polhodiový.



Obr. 109.

U zeměkoule kde rotační rychlost kolem zemské osy jest $\omega_\zeta = 2\pi$: den, je poměr $A:(C-A)$ dle zploštění roven asi číslu 300, tedy doba oběhu skutečné osy otáčecí kolem geometricke osy zemské by měla býti asi 300 dní. Tato perioda Eulerova nebyla nalezena, ale zato se podařilo Chandlerovi (v letech 1891—1902) nalézti z periodických změn zeměpisné šířky periodu pro kolísání pólů asi 427 dní. Kolísání toto není valně pravidelné. Střední vzdálenost okamžitého pólu od geometrického činí asi 4 metry. Početně se ukázalo, že Chandlerova perioda není než Eulerovou periodou, pozměněnou následkem pružnosti zeměkoule. K vysvětlení rozdílu obou stačí předpokládati, že zeměkoule je méně elasticky podajná (že má větší modul pružnosti) než ocel. Ale rozumějme dobře: To jest precesní pohyb volný, jehož příčinou nejsou žádné síly (vlastně jejich momenty vzhledem k středu zemskému) vnější, tedy zcela odlišný od precese zemské, o níž se stala zmínka v § 85.

Jediný pohled na obr. 6 v § 5 nás poučuje, že Eulerovými úhly jest dána regulární precese kolem osy Z v prostoru pevné, je-li

$$\dot\varphi = \mu, \quad \dot\psi = \nu, \quad \dot\vartheta = 0,$$

čili

$$\varphi = \mu t + \varphi_0, \quad \psi = \nu t + \psi_0, \quad \vartheta = \vartheta_0, \qquad (m)$$

kde ovšem konstanty φ_0 a ψ_0 lze učiniti rovné nule vhodnou volbou počátku počítání časového. Pak ovšem musí dle kinematických rovnic (109j)

$$\begin{aligned} \omega_\xi &= \nu \sin(\mu t + \varphi_0) \sin\vartheta_0, \\ \omega_\eta &= \nu \cos(\mu t + \varphi_0) \sin\vartheta_0, \qquad (n) \\ \omega_\zeta &= \nu \cos\vartheta_0 + \mu. \end{aligned}$$

Zkusme, zdali těmto rovnicím vyhovují naše integrály Eulerových rovnic (f), (g) a (b), tedy, lze-li splniti vztahy

$$\begin{aligned} a \cos(\mu_1 t - \varphi_1) &= \dot\psi \sin(\mu t + \varphi_0) \sin\vartheta_0, \\ a \sin(\mu_1 t - \varphi_1) &= \dot\psi \cos(\mu t + \varphi_0) \sin\vartheta_0, \\ \omega_\zeta &= \dot\varphi + \dot\psi \cos\vartheta_0. \end{aligned}$$

Prvým dvěma vyhovíme, položíme-li

$$a = \dot\psi \sin\vartheta_0, \quad \text{t. j.} \quad \nu = \dot\psi = \frac{a}{\sin\vartheta_0},$$

a

$$\mu t + \varphi_0 = \frac{\pi}{2} - \mu_1 t + \varphi_1, \quad \text{t. j.} \quad \mu = -\mu_1, \quad \varphi_0 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2}. \qquad (o)$$

Z poslední pak plyne pomocí (c)

$$\omega_\zeta + \mu_1 = \dot{\psi} \cos \vartheta_0 = a \operatorname{cotg} \vartheta_0,$$

čili
$$\operatorname{tg} \vartheta_0 = \frac{a}{\omega_\zeta + \mu_1} = \frac{a}{\omega_\zeta} \frac{A}{C}. \qquad (p)$$

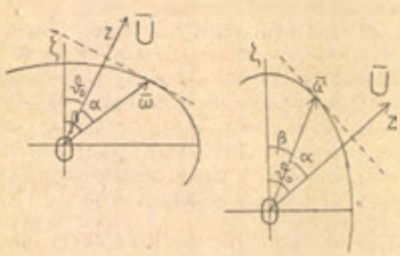
Integrály Eulerových rovnic tedy hoví podmínkám regulární precese, kteráž tudíž jest obecným pohybem symetrického bezsilového setrvačníku, jak již víme z Poinsotova popisu. Pro Eulerovy úhly plynou vzorce

$$\varphi = -\mu_1 t + \varphi_0 = -\mu_1 t + \varphi_1 + \frac{\pi}{2},$$

$$\psi = \frac{a}{\sin \vartheta_0} t + \psi_0, \quad \vartheta = \vartheta_0 = \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{\omega_\zeta} \frac{A}{C}, \qquad (q)$$

kde μ_1 je dáno dle (e), $\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, a, \omega_\zeta$ jsou integrační konstanty.

Jest patrno, že ϑ_0 je úhel mezi pevnou osou Oz v prostoru, t. j. mezi osou stálého impulsmomentu a osou symetrie $O\zeta$ setrvačníku. Úhel mezi osou $O\zeta$ a okamžitou osou otáčecí $\bar{\omega}$ je β, daný vztahem (l); jest to ovšem poloviční úhel polhodiového kužele. Také poloviční úhel α kužele herpolhodiového můžeme snadno vyjádřiti danými veličinami na př. pomocí vztahů (87 i) nebo přímo z názoru na elipsoid setrvačnosti (obr. 110) takto:



Obr. 110.

1. Buď $C > A$, tedy $\mu_1 > 0$, elipsoid setrvačnosti zploštělý.

$$\alpha = \beta - \vartheta_0, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \vartheta_0}{1 + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \vartheta_0} = a \omega_\zeta \frac{C - A}{C \omega_\zeta^2 + A a^2}. \qquad (r)$$

2. Je-li $C < A$, $\mu_1 < 0$, elipsoid setrvačnosti protáhlý, je podobně

$$\alpha = \vartheta_0 - \beta, \quad \operatorname{tg} = a \omega_\zeta \frac{A - C}{C \omega_\zeta^2 + A a^2}. \qquad (r')$$

Jest patrno: Bylo-li jednou $a = 0$ čili $\omega = \omega_\zeta$, t. j. dálo-li se otáčení kolem osy symetrie, bude tomu tak stále. Ježto pak $\alpha = \beta = \vartheta_0 = 0$, zcvrkne se kužel polhodiový i herpolhodiový na přímku.

Tento zvláštní případ u symetrického setrvačníku bezsilového jest obecným případem u setrvačníku kulového, kde následkem $A = B = C$ z Eulerových rovnic (a) zbývá

$$\dot{\omega}_\xi = 0, \quad \dot{\omega}_\eta = 0, \quad \dot{\omega}_\zeta = 0,$$

a tedy
$$\omega_\xi = \text{stálé}, \quad \omega_\eta = \text{stálé}, \quad \omega_\zeta = \text{stálé}.$$

Z Poinsotova popisu, kde $\bar{\omega}$ neustále spadá v jedno s $\bar{U}$, v prostoru pevným, jest to viděti bezprostředně.

Pomocí vztahů (o), (c) a (p) snadno lze stvrditi, že u obecného symetrického setrvačníku platí relace

$$C\mu + (C - A)\nu \cos\vartheta_0 = 0, \qquad (s)$$

která vybírá z ∞^3 kinematicky možných regulárních precesí ∞^2 pohybů, které bychom se Stäckelem mohli označit jakožto bezsilové precese. Názorný význam vztahu (s), že totiž deviační odpor při vedení setrvačníku podél precesního kužele mizí, byl vylíčen v § 106.

111. Obecný setrvačník bezsilový.

Také u obecného bezsilového setrvačníku lze nalézti obecné řešení. Násobme Eulerovy rovnice (110 a) po řadě faktory ω_ξ, ω_η, ω_ζ a sečtěme. Rovnice, jež vznikla, totiž

$$A\omega_\xi\dot{\omega}_\xi + B\omega_\eta\dot{\omega}_\eta + C\omega_\zeta\dot{\omega}_\zeta = 0,$$

dává integrál

$$A\omega_\xi^2 + B\omega_\eta^2 + C\omega_\zeta^2 = \text{stálé} = h. \qquad (a)$$

Také rovnici

$$A^2\omega_\xi\dot{\omega}_\xi + B^2\omega_\eta\dot{\omega}_\eta + C^2\omega_\zeta\dot{\omega}_\zeta = 0,$$

která vznikla násobením (110a) postupně $A\omega_\xi$, $B\omega_\eta$, $C\omega_\zeta$ a součtem, můžeme integrovati tvarem

$$A^2\omega_\xi^2 + B^2\omega_\eta^2 + C^2\omega_\zeta^2 = \text{stálé} = k^2. \qquad (b)$$

Význam integračních konstant ihned vynikne, srovnáme-li (a) s (98 j) a (b) se (100 p); h není než kinetická energie setrvačníku a k^2 kvadrát impulsmomentu. Právě z předpokladu stálosti obou, nutného dle věty o kinetické energii a druhé věty impulsové, vyšli jsme při Poinsotově popisu. Přidáme-li k (a) a (b) evidentní

$$\omega^2 = \omega_\xi^2 + \omega_\eta^2 + \omega_\zeta^2, \qquad (c)$$

můžeme ω_ξ, ω_η a ω_ζ vyjádřiti pomocí ω, h, k^2, A, B, C, načež jest integrovati kinematické rovnice (109 j). Počet vede k eliptickým integrálům a proto se jím zde zabývati nemůžeme, odkazujíce buď na obšírné dílo Klein-Sommerfeldovo, nebo francouzskou mechaniku Appellovu, či anglickou Routhovu. Elementárními funkcemi dá se řešení provésti pouze v případě setrvačníku kulového nebo i obecného symetrického či konečně, je-li k rovno jedné z hodnot $A\omega_\xi$, $B\omega_\eta$, $C\omega_z$, jinými slovy: děje-li se rotace kolem některé z hlavních os setrvačnosti. Prvé dvě integrace jsme provedli úplně, o třetím případě jsme se alespoň zmínili v § 104. Vede k výsledku, že hraniční polhodie, procházející konci osy středního momentu setrvačnosti (viz obr. 100), jsou elipsy.



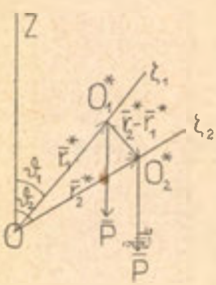
Obr. 111.

Jen jednu poznámku zde ještě učiníme. Tvar polhodií u obecného setrvačníku lze poměrně jednoduše vyšetřiti, jak ukázáno v § 104. Tvar herpolhodií vyšetřuje se daleko obtížněji. Jsou to křivky, ovšem rovinné, a ve zvláštních případech uzavřené, které neustále se střídavě dotýkají dvou koncentrických kruhů, nemajíce nikde bodu obratu (srv. obr. 111). Jak víme, mohou degenerovati v bod při otáčení kolem extrémní hlavní osy, nebo jak již Poinsot ukázal, ve spirálu (Poinsotovu) při rotaci kolem osy, procházející některým bodem hraniční polhodie. Pak se vnitřní kruh (obr. 111) smrští na bod, k němuž se herpolhodie asymptoticky blíží.

112. Všeobecné úvahy o setrvačníku těžkém.

Eulerovy rovnice (109*e*) nedají se obecně integrovati pro libovolné působící momenty. Nejstarší řešený případ, totiž Eulerův, setrvačníku symetrického beze sil jsme obšírně uvedli a alespoň jsme se zmínili o řešení obecného bezsilového setrvačníku. V dalším vylíčíme alespoň některé poznatky o setrvačníku, na který působí jakožto jediná vnější síla zemská tíže, a který ovšem není podepřen v těžišti. Nazýváme jej zkrátka setrvačníkem těžkým. Jediné zde řešené případy jsou dva: Prvý jest Lagrangeův setrvačníku symetrického ($A = B$), u něhož osa symetrie tvarové jest zároveň osou symetrie hmotné, takže jeho těžiště leží na ní, a to buď nad bodem téže osy, kolem kterého se setrvačník otáčí (setrvačník podepřený), nebo pod ním (setrvačník zavěšený). Druhý jest případ Soně Kowalewské, kde $A = B = 2C$ a těžiště leží v rovině hlavních os A a B, nikoli však v průseku s osou C, který jest bodem, kolem kterého se děje otáčení. A bylo dokázáno matematicky, že jmenované tři případy jsou jediné, které vůbec připouštějí jednoznačné analytické řešení.

Mějme tedy setrvačník symetrický ($A = B$), který obdržel velmi rychlou rotaci kolem osy, která se mnoho neliší od osy symetrie, jíž odpovídá moment setrvačnosti C. Na setrvačník ten působí otáčivý moment od síly tíže $Mg = P$. Těžiště O^* leží na ose symetrie $O\zeta$ mimo pevný bod otáčecí O (obr. 112). Rozdíly proti setrvačníku bezsilovému jsou na prvý pohled patrny. Při obecném pohybu těžkého setrvačníku nezůstává kinetická energie stálou. Změní-li se poloha osy setrvačníku a s ní polohový vektor $\bar{r}^*$ těžiště, na př. z $\bar{r}^*_1$ na $\bar{r}^*_2$, vykoná tíže práci $\bar{P}(\bar{r}^*_2 - \bar{r}^*_1) = Mg\, r^*(\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta)_2$.



Obr. 112.

Je-li moment setrvačnosti C velmi veliký a otáčení setrvačníku velmi rychlé, lze ovšem vprvém přiblížení zanedbati tuto práci proti velmi veliké kinetické energii T_0, kterouž lze pak s touž mírou přesnosti považovati za stálou.

Při setrvačníku bezsilovém byl však také impulsmoment $\bar{U}$ stálý. Toho zde není. Je-li moment od tíže v obecné poloze $[\bar{r}^* \bar{P}]$, je dle druhé věty impulsové

$$\dot{\bar{U}} = [\bar{r}^* \bar{P}] \qquad \text{a} \qquad \bar{U} = \bar{U}_0 + \int_0^t [\bar{r}^* \bar{P}]\, dt.$$

Nespadá-li $\bar{r}^*$ a $\bar{P}$ do téže přímky, není-li tedy osa setrvačníku vertikální, nabývá druhý člen pravé strany po uplynutí dostatečně dlouhé doby takové hodnoty, že ji nelze zanedbati proti $\bar{U}_0$. Ovšem je-li U_0 velmi veliké, lze je během krátké doby několika málo otoček považovati za stálé, takže během této doby je setrvačník jakoby bezsilový. Ale tíže působí vždy pomalé změny „sekulární“, které se během času hromadí tak, že pohybový stav je potom zcela jiný než ten, který by nastal u setrvačníku bezsilového.

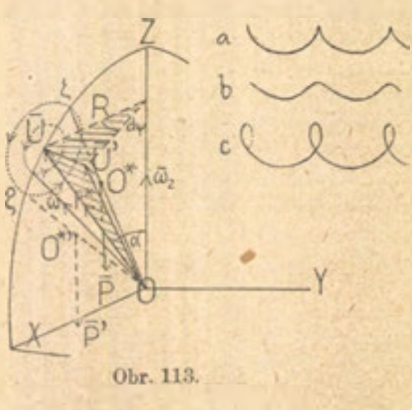
Objasněme si věc číselným příkladem:

Setrvačník hmoty 1 $kg = 1000$ gr má gyrační radius kolem osy symetrie 5 cm, tedy moment setrvačnosti $C = 1000 \,.\, 5^2\ gcm^2 = 25 \,.\, 10^3\ gcm^2$. Otáčí se 40krát za vteřinu, takže $\omega_\zeta = 2\pi \,.\, 40\ sec^{-1}$, a kinetická energie $T_0 = \frac{1}{8}\, 4\pi^2 \,.\, 40^2 \,.\, 25 \,.\, 10^3 \doteq 800 \,.\, 10^6\ \mathrm{erg} = 80$ Joule. Těžiště se nachází 5 cm nad bodem O, takže klesne-li osa z polohy vertikální až do horizontální, vykoná se práce $5 \,.\, 1000 \,.\, 981 = 5 \,.\, 10^6\ \mathrm{erg} = 0{\cdot}5$ Joule. Impulsmoment $U_0 = \omega_\zeta C = 2\pi \,.\, 40 \,.\, 25000\ gcm/sec \doteq 6{\cdot}25 \,.\, 10^6\ gcm^2/sec$. Otáčí-li se setrvačník ten kolem osy $O\zeta$, odkloněné o 30^0 od vertikály, je moment tíže $\frac{1}{2} \,.\, 5 \,.\, 1000 \,.\, 981 \doteq 2{\cdot}5 \,.\, 10^6\ gcm^2/sec$. Vektor $\bar{U}_0$ musíme nanésti ve směru $O\zeta_1$, vektor $[\bar{r}^*\bar{P}]$ má směr kolmo za papír. Za $\frac{1}{5}$ vteřiny je $\int_0^{\frac{1}{5}} [\bar{r}^*\bar{P}]\, dt = 0{\cdot}5 \,.\, 10^6\ gcm^2/sec$, takže za tuto dobu t. j. po 8 otočkách se vychýlil konec vektoru U_0 za papír do sklonu, jehož trigonometrická tangenta je $0{\cdot}5/6{\cdot}25 = 0{\cdot}08$, čili o úhel asi $4\frac{1}{2}{}^0$ za papír.

113. Popis pseudoregulární precese.

Mějme těžký symetrický setrvačník, který se otáčí velikou rychlostí $\bar{\omega}$ kolem osy, která se liší velmi málo od osy symetrie $O\zeta$ (obr. 113). Uvidíme ihned, že vlivem tíže vznikne pohyb, který se dle Kleina a Sommerfelda velmi vhodně nazývá pseudoregulární precese, poněvadž se v hrubých rysech podobá čisté precesi regulární, při níž se rotační osa setrvačníku pohybuje po plášti kužele kolem osy v prostoru pevné.

V jistém okamžiku, který volíme za počáteční, nachází se osa symetrie $O\zeta$, impulsmoment $\bar{U}$ i okamžitá osa rotační $\bar{\omega}$ v téže vertikální rovině XZ souřadnicové soustavy X, Y, Z v prostoru pevné. V obr. 113 kreslena je vzájemná poloha $O\zeta$, $\bar{U}$ a $\bar{\omega}$, jaká nastává při setrvačníku, jehož maximální moment setrvačnosti C spadá do osy $O\zeta$, jak jest patrno z obr. 99 b. U osy minimální setrvačnosti leželo by $\bar{\omega}$ mezi $O\zeta$ a $\bar{U}$, což však na dalších vývodech praničeho nemění. Ježto, jak víme z předcházejícího paragrafu, zůstává $\bar{U}$



Obr. 113.

během krátké doby téměř nezměněno, obíhají kolem něho $\overline{\omega}$ a $O\zeta$, opisujíce kruhové kužely. Při tom se mění poloha těžiště střídavě mezi O^* a $O^{*\prime}$, takže **střední** poloha jeho posičního vektoru r^* spadá v jedno se směrem $\overline{U}^0$ impulsmomentu. Střední moment od tíže setrvačníku jest

$$\overline{M}_p = [\overline{r}^* \overline{P}] = r^* [\overline{U}^0 \overline{P}] = \dot{\overline{U}} \qquad (a)$$

a za čas dt změní se jím impulsmoment $\overline{U}$ o

$$d\overline{U} = \overline{M}_p dt = r^* [\overline{U}^0 \overline{P}]\, dt. \qquad (b)$$

Jak je z výrazu (b) patrno, stojí tato změna, kterou můžeme učiniti libovolně (vhodně) malou, kolmo na $\overline{U}$ i na $\overline{P}$, tedy kolmo na rovině XZ, majíc směr osy Y. To však znamená, že se velikost impulsmomentu znatelně nezměnila, že $\overline{U}' = \overline{U} + d\overline{U} = \overline{U}$, nýbrž že se změnil jen jeho směr, takže vektory $\overline{U}$ a $\overline{U}'$ jsou jakoby tvořitelky kruhového kužele s vertikální osou Z. Osa impulsmomentu vykonává tedy kolem Z pohyb precesní. Při tom však obíhá současně osa setrvačníku $O\zeta$ neustále kolem ní, takže jest patrno, že konec této osy (vrchol setrvačníku) jest nadán **pohybem cykloidickým**; jeho dráha jest sférická cykloida (trochoida) (obr. 113a), po případě zkrácená (obr. 113b) nebo prodloužená (obr. 113c). Tento pohyb, zvaný **nutace**, klade se přes **přibližně regulární precesi** impulsmomentu $\overline{U}$, proto pouze přibližně regulární, že jsme zanedbali malé změny momentu od tíže pocházejícího, které vznikají periodickým klesáním a zase stoupáním těžiště. Osa $O\zeta$ setrvačníku kolísá neustále mezi dvěma krajními sklony k vertikále. Takto jsme velmi názorně zjistili změny impulsmomentu v pevném prostoru.

Jaké však budou změny impulsmomentu v tělese samém? Kinetická energie T_0 při pseudoregulární precesi zůstává až na malé, rychle periodické změny stálá, neboť střední poloha těžiště se nachází ve stálé výši nad horizontální rovinou XY, konajíc kolem ní pouze malé oscilace. Při stálém T_0 zkonstruujme tedy v tělese elipsoid impulsmomentů, který bude ovšem rotační kolem osy $O\zeta$. Ježto pak velikost U impulsmomentu $\overline{U}$ má zůstati stále stejná, leží na U-elipsoidu veškerá možná $\overline{U}$ na kruhovém kuželi o velmi malém vrcholovém úhlu kolem jeho osy, tedy kolem osy symetrie $O\zeta$.

Zbývá vypočísti oběhovou dobu τ pseudoregulární precese neboli úhlovou rychlost $\omega_z = \dot{\psi}$ otáčení kolem vertikální osy Z. Z obr. 113 odečteme vztahy

$$R \frac{d\psi}{dt} = \frac{dU}{dt}, \qquad R = U \sin\alpha, \qquad (c)$$

kde úhel α jest přibližně roven sklonu osy symetrie $\sphericalangle ZO\zeta = \vartheta_0$, jenž jest přesně jeho střední hodnotou.

Dle (b) $$\frac{dU}{dt} = r^* P \sin\alpha = R\omega_z = U \sin\alpha \,.\, \omega_z,$$

takže $$\omega_z = \frac{r^* P}{U} = \frac{r^* P}{\omega K_\omega}. \qquad (d)$$

kde K_ω je moment setrvačnosti kolem osy otáčecí ω. Ježto $\bar{U}$ jest stále velmi blízko osy symetrie, můžeme často s dostatečnou přesností psáti dle (100 o) $U = \omega_\zeta C$, t. j. zaměniti osu otáčecí s osou symetrie.

Jinak mohli jsme psáti dle (87 b) a (113 a)

$$\dot{\bar{U}} = [\bar{\omega}_z \bar{U}] = \omega_z U [\bar{\omega}_z^0 \bar{U}^0] = r^* P [\bar{U}^0 \bar{P}^0]$$

a tedy
$$\omega_z = \frac{r^* P}{U}$$

jako dříve, neboť

$$[\bar{\omega}_z^0 \bar{U}^0] = \sin\alpha = [\bar{U}^0 \bar{P}^0] = \sin(180^0 - \alpha).$$

Doba oběžná jest
$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_z} = 2\pi \frac{\omega_\zeta C}{r^* P}. \tag{e}$$

Ze vzorce (d) vidíme, že oběžná rychlost při pseudoregulární precesi je tím menší, čím rychleji setrvačník rotuje, čím blíže je těžiště k bodu podpěrnému a čím je setrvačník relativně k momentu setrvačnosti lehčí. Naproti tomu nezávisí na sklonu setrvačníkové osy k vertikále. Podstatný jest rozdíl mezi oběžnou rychlostí ω_z při pseudoregulární precesi a μ_1 při precesi regulární, neboť tato jest dle (110 c) rychlosti ω_ζ přímo, ona pak nepřímo úměrna.

Poznámka: Naše úvaha o poloze impulsmomentu v tělese selže, jedná-li se o setrvačník kulový, u něhož ovšem i U-elipsoid je koulí. Ale ani zde se nevzdálí $\bar{U}$ a s ním v jedno spadající $\bar{\omega}$ mnoho od osy symetrie $O\zeta$. Násobíme-li (a) skalárně $\bar{r}^*$, plyne

$$\bar{r}^* \dot{\bar{U}} = 0, \qquad \text{ježto} \qquad \bar{M}_p \perp \bar{r}^*.$$

Ale též
$$\dot{\bar{r}}^* \bar{U} = 0,$$

neboť okamžitá rychlost $\dot{\bar{r}}^*$ těžiště je kolmá na $\bar{U}$. Proto, shrneme-li, je

$$\frac{d}{dt}(\bar{r}^* \bar{U}) = 0, \qquad \bar{r}^* \bar{U} = r^* U \cos(\widehat{\bar{r}^* \bar{U}}) = \text{stálé},$$

r^* jest přesně, U přibližně stálé, a tedy byl-li úhel mezi $O\zeta$ a impulsmomentem malý, zůstane malý.

Vraťme se k ozřejmění věci zase k číselnému příkladu z § 112. Impulsmoment $\bar{U}$ se otáčí kolem vertikály rychlostí ω_z dle (d), kdež za U můžeme bez veliké chyby vzíti jeho hlavní hodnotu $U_0 = 6{\cdot}25 \,.\, 10^6\, gcm^2/sec$, takže $\omega_z = 0{\cdot}8\ ^1/sec$. Vypodobněme si vše, co se bude díti na konci osy otáčecí $O\zeta$, za jejíž délku vezměme $l = 10\, cm$, který ovšem neustále zůstává na kouli téhož poloměru. Postupná rychlost bodu N, ve kterém $\bar{U}$ protíná tu kouli, bude $v = \omega_z l \sin\vartheta_0$, je-li ϑ_0 střední sklon osy k vertikále; buď zase $\vartheta_0 = 30^0$. Pak $v = 4\, cm/sec$. Touto rychlostí postupuje bod N po horizontálním kruhu na kouli z leva v pravo. Kolem něho se otáčí osa $O\zeta$ setrvačníku úhlovou rychlostí $\omega_\zeta = 2\pi \,.\, 40\ ^1/sec = 250\ ^1/sec$; její vrchol se nachází z počátku nad bodem N. Bude se tedy pohybovati tak jakoby byl pevně spojen s kruhem

poloměru ρ. který se valí po horizontálním kruhu vedeném koulí ve vzdálenosti ρ nad bodem N, jehož dráha je drahou středu toho valícího se kruhu. Ovšem musí dráha toho kruhu za vteřinu býti $v = \omega\,\rho$, z čehož plyne pro jeho poloměr $\rho = 0{\cdot}016\,cm$. Vrchol opisuje sférickou cykloidu obyčejnou, zkrácenou či prodlouženou, dle toho, je-li jeho vzdálenost od N rovna, menší či větší než ρ. Každá klička opíše se při jedné úplné otočce setrvačníku. tedy za $^1/_{40}$ vteřiny a bude tedy její délka $^1/_{40} \cdot 4 = 0{\cdot}1\,cm$. Výška kličky v praktických případech je téhož řádu jako ρ.

Vidíme tedy, že dráha vrcholu jen jaksi mikroskopicky se liší od hladkého horizontálního kruhu, ale zato směr pohybu, t. j. tečné k dráze mění se velmi rychle v konečných mezích. Poněvadž pak ty velmi rychlé (u nás 40 za vteřinu) a velmi malé (výška kliček v malých zlomcích milimetru) nutace unikají pozorovateli, vypadá pohyb jako čistě precesní. Nutace jsou tím rychlejší a drobnější, čím rychleji se setrvačník točí za dvojnásobné rychlosti klesne jejich délka i výška na čtvrtinu. Ale ovšem nesmíme říci: dráha vrcholu jest sférická cykloida, nýbrž pouze, tím méně se liší od cykloidy, čím větší je počáteční impulsmoment a čím přesněji spadá v jedno se směrem osy symetrie setrvačníku.

Velmi častý v experimentální praxi je následující případ: Roztočíme (na př. šňůrou) symetrický těžký setrvačník kolem osy symetrie a postavíme jej šikmo do pevného bodu, aniž bychom mu udělili postranní impuls, t. j. tedy tak, že počáteční $\dot{\psi}_0 = \nu_0 = 0$. Začne vlivem tíže opisovati pohyb zdánlivě regulárně precesní. Že to vskutku je pouze zdánlivá regulární precese, plyne riž ze zákona o zachování energie. Neboť jak by mohla tíže zpusobiti pohyb. za něhož se body osy pohybují v horizontálních kruzích, tedy kolmo na směr tíže, která by takto nemohla konati práci? (Setrvačníkové paradoxon.) Vysvětlení leží právě v pseudoregulární precesi, kde vskutku v prvém okamžiku setrvačník „padá“, jak ukazuje jediný pohled na křivky a, b, c, obr. 113. Proto také jsou veškerá vysvětlení. která začasté v knihách nalezáme (na př. v prvním vydání Novákovy Fysiky), falešná, vedou-li pro tento případ k regulární precesi. Ovšem viděli jsme, že regulární precese je možným pohybem těžkého setrvačníku, ale nemůže nastati za $\nu_0 = 0$, jak se v knihách předpokládá a jak se k tomu ještě vrátíme. Na věci nic nemění, že vlivem tření a pod. nutace často dosti brzo vymizí a pohyb se na čistě precesní samočinně upraví.

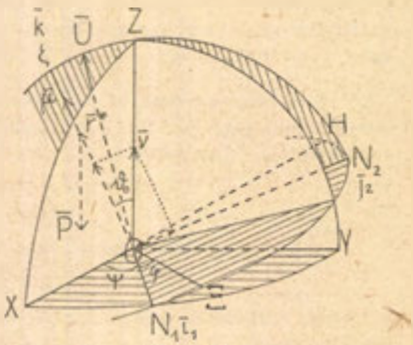
Samozřejmě jsou rovněž všechna vysvětlení falešná, vedou-li za vlastní precese těžkého setrvačníku k tomu, že se samočinně vztyčuje. (Strouhalova Mechanika.) Naše vývody o něm nic nepraví. protože jest způsobeno třením na podkladu. Ovšem něco jiného jest vztyčování setrvačníku vedeného (Strouhal: Mechanika, str. 400). kde vzniká deviační kinetická reakce, o níž jsme obšírně pojednali.

114. Regulární precese u těžkého setrvačníku.

Obecným pohybem těžkého symetrického setrvačníku v případě Lagrangeově je precese pseudoregulární. Zbývá nám ptáti se — a tak se prvý výslovně ptal Poinsot — zdali jest také precese regulární možnou. My jsme ovšem již usoudili z výrazu pro deviační odpor, že odpověď zní kladně. Zde ukážeme to však přímo. Otázka naše přeložená do mluvy analytických symbolů zní: Lze vyhověti rovnici $\bar{U} = M_p$

podmínkami $\dot\varphi = \mu$ = stálé, $\dot\psi = \nu$ = stálé, $\dot\vartheta = 0$, t. j. $\vartheta = \vartheta_0$ = stálé? Časová změna impulsmomentu v napsané rovnici se ovšem vztahuje k souřadnicím v prostoru pevným.

Volme za osy setrvačníku osu symetrie $O\zeta$, přímku uzlovou ON_1 a kolmici na obou ON_2, s jedničkovými vektory $\bar k$, $\bar\imath_1$, $\bar\jmath_2$ a příslušnými momenty setrvačnosti C, A, A. Buď z obr. 114 přímo nebo z kinematických rovnic (109 l) jest patrno, že za regulární precese



Obr. 114.

$$\omega_\zeta = \dot\varphi + \dot\psi \cos\vartheta_0 = \mu + \nu\cos\vartheta_0,$$
$$\omega_1 = 0, \qquad (a)$$
$$\omega_2 = \dot\psi \sin\vartheta_0 = \nu \sin\vartheta_0,$$

takže okamžitá rychlost úhlová je

$$\bar\omega = \bar k(\mu + \nu\cos\vartheta_0) + \bar\jmath_2 \nu \sin\vartheta_0 \qquad (b)$$

a příslušný impulsmoment

$$\bar U = \bar k C(\mu + \nu\cos\vartheta_0) + \bar\jmath_2 A\nu\sin\vartheta_0. \qquad (c)$$

Leží tedy vektor $\bar U$ v rovině $O\zeta N_2$ čili $O\zeta Z$. Má-li pohyb býti regulární precesí, musí se osa symetrie $O\zeta$ i vektor $\bar U$ otáčeti kolem osy Z, v prostoru pevné, jakožto celek, se stálou rychlostí úhlovou

$$\omega_z = \dot\psi = \nu, \quad \text{neboli} \quad \bar\omega_z = \bar k\nu\cos\vartheta_0 + \bar\jmath_2\nu\sin\vartheta_0. \qquad (d)$$

Délka vektoru $\bar U$ se nesmí měniti, ježto za stálého ν a ϑ_0 by se musela měniti rotační rychlost setrvačníku, což je dle předpokladu nepřípustno. Jest tudíž jedinou absolutní časovou změnou vektoru $\bar U$ jeho rotace kolem OZ rychlostí ω_z, takže musí

$$\frac{d\bar U}{dt} = [\bar\omega_z \bar U] = \bar M_p. \qquad (e)$$

Moment od tíže je v uvažovaném okamžiku

$$\bar M_p = [\bar r^* \bar P] = r^* P \sin\vartheta_0 \,.\, \bar\imath_1 = M_p \bar\imath_1. \qquad (f)$$

Rozepíšeme-li $[\bar\omega_z \bar U]$ dle (d) a (c) v semikartézský tvar determinantový, obdržíme, kladouce faktory u $\bar\imath_1$ sobě rovné (násobíce obě strany skalárně vektorem $\bar\imath_1$)

$$(C\mu + (C - A)\nu\cos\vartheta_0)\nu\sin\vartheta_0 = M_p = r^* P \sin\vartheta_0. \qquad (g)$$

To jest tedy podmínka, totožná se (106 d a k), která musí býti splněna, má-li těžký symetrický setrvačník prováděti pohyb regulárně precesní. Za daných A, C, P, r^* závisí jeho obecný pohyb od 6 libovolných parametrů. Ježto má tři stupně volnosti, můžeme u tří parametrů φ, ψ, ϑ libovolně předepsati jejich začáteční hodnoty φ_0, ψ_0, ϑ_0 a začáteční rychlosti $\dot\varphi_0 = \mu$, $\dot\psi_0 = \nu$, $\dot\vartheta_0$. Další průběh jest dán Eulerovými a kinematickými rovnicemi. Existuje tedy ∞^6 možných přiroze-

ných jeho pohybů. V našem případě zbývají z libovolných parametrů pouze φ_0, ψ_0, ϑ_0, μ, ν, ježto $\dot\vartheta_0 = 0$, a ty musí splňovati relaci (g). Vyjímá tedy z ∞^6 možných pohybů regulární precese ∞^4, takže je zvláštním případem, partikulárním řešením diferenciálních rovnic těžkého symetrického setrvačníku.

Z rovnice (g) plyne, že pro dané hodnoty sklonu ϑ_0 a otáčecí rychlosti setrvačníku μ patří buď dvě (ve zvláštním případě splývající) nebo žádná precesní rychlost ν; jest totiž

$$\nu_{12} = \frac{C\mu \pm \sqrt{C^2\mu^2 - 4(A-C)\,r^*P\cos\vartheta_0}}{2(A-C)\cos\vartheta_0}. \qquad (h)$$

Aby byla regulární precese vůbec možná, musí

$$\mu^2C^2 \geqq 4(A-C)\,r^*P\cos\vartheta_0. \qquad (i)$$

Při dostatečně velikém μ jsou obě hodnoty reálné, a to pro veliké $C\mu$ přibližně rovny

$$\nu_1 \doteq \frac{C\mu}{(A-C)\cos\vartheta_0}, \qquad \nu_2 \doteq \frac{r^*P}{C\mu}, \qquad (j)$$

jak zjistíme dělením $C\mu$ v čitateli i jmenovateli a rozvojem dle binomické poučky. Pro každé $\vartheta_0 \lessgtr 90^0$ připouští tedy setrvačník dvě regulární precese, jednu ν_1 rychlou, druhou ν_2 pomalou. Při rychlé precesi je ν téhož velikostního řádu jako μ a jak je patrno z výrazu (b) pro ω, odchyluje se okamžitá osa rotační značně od osy symetrie setrvačníku $O\zeta$. Za pomalé precese je naopak ν proti μ malé, osa ϖ a $O\zeta$ spadají téměř v jedno. Pomalá precese je již proto důležitější, poněvadž se při pokusech snáze pozoruje; začínají sice vždy s precesí pseudoregulární, ale malé nutace se brzo utlumí a vzniká — nehledíme-li k pomalým „sekulárním" změnám způsobeným třením — regulární precese. Proto je důležit přibližný souhlas vzorců $(113\,d)$ a druhého (j).

*115. Eulerovy rovnice pro těžký setrvačník.

Analytické vztahy pro těžký setrvačník obdržíme, když dosadíme na pravých stranách rovnic Eulerových $(109\,e)$ složky momentu pocházejícího od tíže. Tento moment (obr. 114) má směr uzlové přímky ON_1 a jest, rozložíme-li jej dle os Ξ a H,

$$\bar\imath_1 r^*P\sin\vartheta = \bar\imath_1 L\sin\vartheta = \bar\imath L\sin\vartheta\cos\varphi - \bar\jmath L\sin\vartheta\sin\varphi.$$

Dosazením zní pak rovnice $(109\,e)$ pro obecný setrvačník

$$\begin{aligned} A\dot\omega_\xi &= (B-C)\,\omega_\eta\omega_\zeta + L\sin\vartheta\cos\varphi,\\ B\dot\omega_\eta &= (C-A)\,\omega_\zeta\omega_\xi - L\sin\vartheta\sin\varphi,\\ C\dot\omega_\zeta &= (A-B)\,\omega_\xi\omega_\eta. \end{aligned} \qquad (a)$$

Snadno nalezneme dva integrály těchto rovnic. Násobme je postupně ω_ξ, ω_η, ω_ζ a sečtěme:

$$A\omega_\xi\dot\omega_\xi + B\omega_\eta\dot\omega_\eta + C\omega_\zeta\dot\omega_\zeta = L\sin\vartheta\,(\omega_\xi\cos\varphi - \omega_\eta\sin\varphi) = L\sin\vartheta\,.\,\dot\vartheta, \qquad (b)$$

neboť uzávorkovaný výraz pravé strany je dle $(109\,i)$ roven $\dot\vartheta$.

Integrací pak

$$A\omega_\xi^2 + B\omega_\eta^2 + C\omega_\zeta^2 = 2(h - L\cos\vartheta), \tag{c}$$

kde h je integrační konstanta. To je integrál kinetické energie, neboť rovnice (b) nepraví nic jiného, než že změna kinetické energie v jedničce časové se rovná práci v téže době vykonané momentem jediné vnější síly.

Také druhý obecný integrál snadno napíšeme. Moment od tíže nemá vertikální složky (v ose OZ); musí tedy vertikální složka impulsmomentu zůstati nezměněna. Promítneme-li tedy impulsmoment

$$\bar{U} = \bar{\imath} A\omega_\xi + \bar{\jmath} B\omega_\eta + \bar{k} C\omega_\zeta$$

na vertikální osu OZ, t. j. násobíme-li jej jedničkovým vektorem $\bar{k}'$ tohoto směru, musí

$$U_z = \bar{U}\bar{k}' = A\omega_\xi \sin\varphi \sin\vartheta + B\omega_\eta \cos\varphi \sin\vartheta + C\omega_\zeta \cos\vartheta = \text{stálé}. \tag{d}$$

Za součiny $\bar{\imath}\bar{k}', \bar{\jmath}\bar{k}', \bar{k}\bar{k}'$ dosadili jsme hodnoty dle $(5a)$. Náš výsledek není než „větou o plochách" pro horizontální rovinu.

Nyní specialisujme rovnice (a) na s e t r v a č n í k s y m e t r i c k ý, píšíce $A = B$. Pak zbývá ze třetí rovnice

$$C\dot{\omega}_\zeta = 0, \quad \text{čili} \quad C\omega_\zeta = U_\zeta = \text{stálé}. \tag{e}$$

Jest tedy také složka impulsmomentu U_ζ ve směru osy symetrie setrvačníku stálá, a ovšem i rotační rychlost ω_ζ kolem této osy. Z integrálu kinetické energie pak vznikne

$$\omega_\xi^2 + \omega_\eta^2 = \frac{1}{A}(2h - C\omega_\zeta^2 - 2L\cos\vartheta) \equiv \alpha - a\cos\vartheta, \tag{f}$$

označíme-li krátce konstanty

$$\alpha = \frac{2h}{A} - \frac{U_\zeta^2}{AC}, \qquad a = \frac{2L}{A} = \frac{2Mgr^*}{A}, \tag{f'}$$

kde M je hmota setrvačníku.

Z výrazu (d) substitucí $A = B$ vznikne

$$\sin\vartheta(\omega_\xi \sin\varphi + \omega_\eta \cos\varphi) = \frac{1}{A}(U_z - U_\zeta \cos\vartheta) = \beta - b\cos\vartheta, \tag{g}$$

kde jsme zase psali

$$\beta = \frac{U_z}{A}, \qquad b = \frac{U_\zeta}{A} = \frac{C}{A}\omega_\zeta. \tag{g'}$$

Z kinematických rovnic $(109j)$ pomocí (f) a (g) plyne

$$\begin{aligned} &\dot{\vartheta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2\vartheta = \alpha - a\cos\vartheta, \\ &\dot{\psi}\sin^2\vartheta = \beta - b\cos\vartheta, \\ &\dot{\psi}\cos\vartheta + \dot{\varphi} = \omega_\zeta. \end{aligned} \tag{h}$$

Eliminujeme-li z prvé a druhé rovnice $\dot{\psi}$ a dosadíme za $\cos\vartheta = z$ jedinou písmenu, takže $-\sin\vartheta \cdot \dot{\vartheta} = \dot{z}$, máme

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = (1 - z^2)(\alpha - az) - (\beta - bz)^2 \equiv f(z). \tag{i}$$

z druhé
$$\frac{d\psi}{dt}=\frac{\beta-bz}{1-z^2}, \qquad (j)$$

z třetí
$$\frac{d\varphi}{dt}=\omega_\zeta-\frac{z(b-z)}{1-z^2}. \qquad (k)$$

Dle své definice jest z průmět konce jedničkového vektoru k (ve směru osy $O\zeta$) na osu vertikální OZ; nazývá se apex setrvačníku. Jeho pohyb po ose Z udává v redukovaném měřítku pohyb vrcholu osy symetrie setrvačníku v rovině vertikální.

Ze vzorce (i), kde $f(z)$ je třetího stupně, vychází, že čas je dán eliptickým integrálem
$$t=\int\frac{dz}{\sqrt{f(z)}},$$
tedy, že jest $z=\cos\vartheta$ eliptickou funkcí času. Z (j) a (k) mohli bychom podobně vyjádřiti ψ a φ. Tyto vzorce znal už Lagrange Zde se však jimi zabývati nemůžeme, ježto daleko přesahují obor knize vyměřený. Musíme v té příčině odkázati na spisy obšírnější; zvláště poukazujeme na dynamiku Websterovu, kde na základě vzorce (i) jsou některé zvláštní případy elementárně diskutovány. Sami provedeme podobnou, průhlednější diskusi na základě jiném v příštím paragrafu dle vzoru knihy Loneyovy, spokojujíce se zde touto poznámkou:

$f(z)$ nabývá pro $z=-\infty$ hodnoty $-\infty$, pro $z=-1$ i pro $z=+1$ hodnoty záporné, pro $z=+\infty$ hodnoty ∞. Z toho vyplývá, že z kořenů rovnice $f(z)=0$ leží dva reálné z_1 a z_2 mezi -1 a $+1$, jeden pak mezi $+1$ a $+\infty$. Tento třetí nemá pro nás významu, ježto neodpovídá reálnému úhlu, jehož cosinus nemůže být větší než 1.

Fysikální význam toho jest, že $\dot{z}=0$ pro sklony setrvačníkové osy ϑ_1 a ϑ_2, odpovídající kořenům $z_1=\cos\vartheta_1$, $z_2=\cos\vartheta_2$. Vskutku leží pak veškerá reálná ϑ mezi těmito krajními úhly, to jest vrchol osy setrvačníkové pohybuje se na kouli mezi dvěma horizontálními kruhy, v čemž právě spočívá nutace, jak jsme ji v § 113 popsali.

*116. Užití Lagrangeovych rovnic na setrvačník.

Rovnice pro setrvačník můžeme odvoditi velmi snadno metodou Lagrangeovou. Jest totiž dle (79 i)
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_\lambda}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_\lambda}=Q_\lambda, \qquad (a)$$
kde q_λ jest obecná souřadnice, a Q_λ obecná složka „síly“ k ní příslušná, T kinetická energie. Za obecné souřadnice, které úplně definují tři stupně volnosti setrvačníku s pevným bodem, můžeme voliti tři úhly Eulerovy φ, ψ, ϑ. Obecnými složkami sil jsou potom M_φ, M_ψ, M_ϑ, momenty, které se snaží tyto úhly zvětšiti. Vzorec pro kinetickou energii setrvačníku dává dle (109 l) ihned
$$2T=A(\omega_1^2+\omega_2^2)+C\omega_\zeta^2=A(\dot{\vartheta}^2+\dot{\psi}^2\sin^2\vartheta)+C(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\vartheta)^2. \qquad (b)$$

Máme tedy:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}}\right) = \frac{d}{dt}(A\dot{\vartheta}) = A\ddot{\vartheta},$$

$$\frac{\partial T}{\partial \vartheta} = A\dot{\psi}^2 \sin\vartheta \cos\vartheta - C(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\vartheta)\dot{\psi}\sin\vartheta.$$

$Q_\vartheta = M_\vartheta$ jest moment dvojice, která zvětšuje ϑ.

Patrně jest $M_\vartheta = Mgr^* \sin\vartheta = L\sin\vartheta$.

Shrneme-li vše, obdržíme prvou rovnici setrvačníku

$$A\ddot{\vartheta} - A\dot{\psi}^2 \sin\vartheta\cos\vartheta + C(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\vartheta)\dot{\psi}\sin\vartheta = L\sin\vartheta. \qquad (c)$$

Podobně
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \frac{d}{dt}\{C(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\vartheta)\} = 0. \qquad (d)$$

Jest totiž $\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0$, ježto se souřadnice φ nevyskytuje explicitně ve výraze pro T. Takové souřadnice nazývají se dle Helmholtze souřadnice cyklické. Moment $M_\varphi = 0$, neboť moment od tíže má směr ON_1 (obr. 114) a nemůže tedy měniti φ, nemaje složky v ose $O\zeta$. Konečně stejně

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}}\right) = \frac{d}{dt}\{A\dot{\psi}\sin^2\vartheta + C(\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\vartheta)\cos\vartheta\} = 0, \qquad (e)$$

neboť ψ je také souřadnice cyklická a moment od tíže nemá složky v ose OZ.

Z rovnice (d) následuje

$$\dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\vartheta = \omega_\zeta = \text{stálé} = n \qquad (f)$$

a ovšem též $C\omega_\zeta = U_\zeta =$ stálé, jako jsme našli dříve.

Z (e) vznikne integrací a dosazením (f)

$$A\dot{\psi}\sin^2\vartheta + Cn\cos\vartheta = \text{stálé} = Cn\cos\vartheta_0, \qquad (g)$$

byly-li počáteční podmínky takové, že jsme setrvačník roztočený rychlostí $\omega_\zeta = n$ kolem osy symetrie postavili do sklonu ϑ_0 k vertikále, neudělivše mu žádného postranního impulsu, takže v čase nulovém

$$t = 0, \qquad \dot{\psi} = \dot{\psi}_0 = 0, \qquad \dot{\vartheta} = \dot{\vartheta}_0 = 0, \qquad \vartheta = \vartheta_0.$$

Potenciální energie setrvačníku v obecné poloze ϑ jest

$$V = -Mgr^*\cos\vartheta = -L\cos\vartheta \qquad (h)$$

a dle (b) ve spojení s (f) plyne z principu o zachování energie (71 e)

$$A(\dot{\vartheta}^2 + \dot{\psi}^2\sin^2\vartheta) + Cn^2 - 2L\cos\vartheta = Cn^2 - 2L\cos\vartheta_0. \qquad (i)$$

Eliminujeme-li $\dot{\psi}$ z (g) a (i), je

$$A^2\dot{\vartheta}^2\sin^2\vartheta = 2AL\sin^2\vartheta(\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta) - C^2n^2(\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta)^2.$$

Položme $C^2n^2 = 4AL\lambda$, čili $\lambda = \frac{1}{4}\frac{C}{A}\frac{Cn^2}{L}$.

λ nemá rozměru, jest prosté číslo, dané tvarem setrvačníku a počáteční rotační rychlostí. Poslední rovnici můžeme psáti

$$A\dot{\vartheta}^2 \sin^2\vartheta = 2L(\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta)\{\sin^2\vartheta - 2\lambda(\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta)\} \qquad (j)$$
$$= 2L(\cos\vartheta - \cos\vartheta_0)\{(\cos\vartheta - \lambda)^2 - (\lambda^2 - 2\lambda\cos\vartheta_0 + 1)\}$$
$$= 2L(\cos\vartheta - \cos\vartheta_0)(\cos\vartheta - \lambda + \sqrt{R})(\cos\vartheta - \lambda - \sqrt{R}), \qquad (k)$$

kdež jsme pro krátkost psali

$$R = \lambda^2 - 2\lambda\cos\vartheta_0 + 1. \qquad (l)$$

Vidíme, že rychlost $\dot{\vartheta} = 0$, je-li $\vartheta = \vartheta_0$, $\vartheta = \vartheta_1$, $\vartheta = \vartheta_2$,

kde $$\cos\vartheta_1 = \lambda - \sqrt{\lambda^2 - 2\lambda\cos\vartheta_0 + 1}, \qquad (m)$$

a $$\cos\vartheta_2 = \lambda + \sqrt{\lambda^2 - 2\lambda\cos\vartheta_0 + 1}.$$

Jest však zřejmě $\cos\vartheta_2 > 1$, takže ϑ_2 je imaginární a nemá pro řešení významu.

Úhel $\vartheta_1 > \vartheta_0$, ježto snadno nahlédneme, že $\cos\vartheta_1 < \cos\vartheta_0$, neboť

$$\lambda - \cos\vartheta_0 < \sqrt{\lambda^2 - 2\lambda\cos\vartheta_0 + 1},$$

leč by $\vartheta_0 = 0$, kde potom by také $\vartheta_1 = 0$.

Z (i) vidíme, že by $\dot{\vartheta}^2$ bylo negativní, kdyby $\vartheta < \vartheta_0$; stejně by tomu bylo, kdyby $\vartheta > \vartheta_1$, to jest

$$\cos\vartheta < \lambda - \sqrt{R},$$

jak ukazuje rovnice (k). Obé tedy nedává reálního řešení.

To vše znamená: Sklon osy setrvačníku k vertikále může ležeti pouze mezi oběma krajními hodnotami ϑ_0 a ϑ_1. Osa kolísá tedy mezi těmito sklony a v tom spočívají nutace. Nutací není, byla-li osa z počátku postavena do polohy přesně svislé, při $\vartheta_0 = 0$ je také $\vartheta_1 = 0$. V této poloze chová se setrvačník jako bezsilový, neboť moment od tíže vymizel.

Dle (g) je však trvale

$$A\dot{\psi}\sin^2\vartheta = Cn(\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta) > 0.$$

To znamená, že pokud je těžiště nad bodem, kolem kterého se setrvačník otáčí (tak jsme my předpokládali, píšíce moment od tíže, který zvětšuje ϑ se znamením kladným), jest $\dot{\psi}$ stále kladné, osa OZ obíhá stále v kladném směru kolem vertikály OZ. To je precese a sice postupná, progresivní.

Kdyby moment od tíže působil v tom smyslu, že se snaží úhel ϑ zmenšiti, vznikla by precese retrográdní, zpětná. Tak tomu jest u kyvadla zavěšeného v bodě prodloužené osy nad těžištěm, čili t. zv. gyroskopického kyvadla, a jak se ještě zmíníme, také u zeměkoule.

Z rovnic (g) a (k) je patrno, že $\dot{\vartheta} = 0$ i $\dot{\psi} = 0$, je-li $\vartheta = \vartheta_0$. Vytvoříme-li z (g)

$$\frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{A}{Cn}\dot{\psi}\right) = \frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta}{\sin^2\vartheta}\right) = \frac{1 - 2\cos\vartheta\cos\vartheta_0 + \cos^2\vartheta}{\sin^3\vartheta},$$

vidíme, že pravá strana je vždy positivní, pokud $\vartheta > \vartheta_0$. Roste tedy precesní rychlost $\dot{\psi}$ se vzrůstajícím sklonem ϑ pro jeho hodnoty mezi ϑ_0 a ϑ_1, a má největší hodnotu rovnou $2L : Cn$, když $\vartheta = \vartheta_1$.

Své poznatky o průběhu pohybu setrvačníku můžeme shrnouti takto: Jeho rychlost otáčecí kolem osy symetrie je stále táž a rovna počáteční hodnotě n. Jeho osa $O\zeta$ se vzdaluje od vertikály až do polohy $\vartheta = \vartheta_1$ a současně se otáčí kolem ní proměnlivou úhlovou rychlostí $\dot{\psi}$, která byla rovna nule při $\vartheta = \vartheta_0$ a je největší, když $\vartheta = \vartheta_1$.

Je-li, jak tomu obyčejně bývá, otáčecí rychlost n kolem osy symetrie setrvačníku velmi veliká, je také λ veliké a dle (m)

$$\cos\vartheta_1 = \lambda\left\{1 - \left(1 - \frac{2}{\lambda}\cos\vartheta_0 + \frac{1}{\lambda^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right\} \doteq \cos\vartheta_0 - \frac{1}{2\lambda}\sin^2\vartheta_1,$$

rozvineme-li dle binomické věty a zanedbáme-li členy počínaje λ^{-2}. Pak jest sklon osy k vertikále omezen krajními úhly

$$\vartheta = \vartheta_0 \quad \text{a} \quad \vartheta = \vartheta_1 \doteq \vartheta_0 + \frac{1}{2\lambda}\sin\vartheta_0,$$

to jest*)

$$\vartheta_0 \quad \text{a} \quad \vartheta_0 + \frac{2AMgr^*\sin\vartheta_0}{C^2n^2}. \tag{n}$$

V našem číselném příkladě o setrvačníku z § 112 a 113, předpokládáme-li přibližně $A = C$, plyne dosazením do (n), že úhly ϑ_0 a ϑ_1 jsou 30^0 a $30^0 11'$, odpovídajíce obloukům jedničkového kruhu 0·5236 a 0·5268**). Výška kličky sférické cykloidy, kterou opisuje konec osy 10 *cm* dlouhé, je 0·032 *cm*, rovna 2ρ příkladu § 113, což souhlasí úplně se začátečními podmínkami $\dot{\vartheta} = 0$ a $\dot{\psi} = 0$.

Ovšem zase i zde jest patrno, že je-li $\vartheta_0 = 0$, je též $\vartheta_1 = 0$, nebylo-li počátečního impulsu ve směru ϑ. Vertikální setrvačník nekoná precese ani nutace, osa jeho zůstává vertikální. Tento případ nazývá se často „spícím setrvačníkem" (sleeping top, la toupie dormante, der schlafende Kreisel). Vychýlí-li se však osa poněkud z vertikální polohy, nemusí nastávající pohyb býti nutně stabilní.

Podmínky regulární precese setrvačníku jsou:

$$\vartheta = \vartheta_0, \quad \dot{\vartheta} = 0, \quad \ddot{\vartheta} = 0, \quad \dot{\varphi} = \mu = \text{stálé}, \quad \dot{\psi} = \nu = \text{stálé}.$$

Vidíme ihned, že se jimi vyhoví našim rovnicím, je-li dle (c)

$$\{C\mu + (C - A)\nu\cos\vartheta_0\}\,\nu\sin\vartheta_0 = L\sin\vartheta_0. \tag{o}$$

Jest to tedy též podmínka, ku které jsme došli ve ($106k$) i ($114g$).

Jaká jest perioda nutačního pohybu, byl-li roztočený setrvačník bez postranního impulsu postaven do sklonu ϑ_0? Na tuto

---

*) Můžeme se snadno numericky přesvědčiti pomocí Valouchových Tabulek (3. vyd., tab. IV), že

$$\cos\left(\frac{1}{2\lambda}\sin\vartheta_0\right) \doteq 1, \qquad \sin\left(\frac{1}{2\lambda}\sin\vartheta_0\right) \doteq \frac{1}{2\lambda}\sin\vartheta_0,$$

s chybou i za $\lambda = 5$ menší než 1%.

**) Viz Valouchovy Tabulky (3. vyd.), str. 86.

otázku odpoví rovnice (j). Je-li n a tedy λ veliké, nemůže výraz v druhých (kroucených) závorkách na pravé straně býti kladný, leč je-li $\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta$ velmi malé, tedy, je-li ϑ neustále blízce rovno ϑ_0. Pak však musí dle (g) býti i $\dot\psi$ skoro stálé a pseudoregulární precese býti velmi blízce podobná precesi regulární.

Položme $\vartheta = \vartheta_0 + \varepsilon$, kde ε jest velmi malé, takže v prvém přiblížení

$$\frac{\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta}{\sin\vartheta} \doteq \varepsilon. \tag{p}$$

Rovnice (j) přejde ve tvar

$$A\dot\varepsilon^2 = 2L\varepsilon(\sin\vartheta - 2\lambda\varepsilon) =$$
$$= 2L\varepsilon\{\sin\vartheta_0 - (2\lambda - \cos\vartheta_0)\varepsilon\} \doteq 2L\varepsilon(\sin\vartheta_0 - 2\lambda\varepsilon),$$

je-li 2λ tak veliké, abychom proti němu mohli zanedbati $\cos\vartheta_0$. Poslední vztah lze přepsati na

$$\dot\varepsilon^2 = \frac{4L\lambda}{A}\left\{\frac{\varepsilon}{2\lambda}\sin\vartheta_0 - \varepsilon^2\right\} = \frac{C^2n^2}{A^2}(2\varkappa\varepsilon - \varepsilon^2), \tag{q}$$

kdež bylo psáno

$$\varkappa = \frac{\sin\vartheta_0}{4\lambda} = \frac{AL\sin\vartheta_0}{C^2n^2}. \tag{r}$$

Odmocníme a integrujeme (q);

$$\frac{Cnt}{A} = \int\frac{d\varepsilon}{\sqrt{2\varkappa\varepsilon - \varepsilon^2}} = \operatorname{arc\,cos}\frac{\varkappa - \varepsilon}{\varkappa}$$

a

$$\vartheta = \vartheta_0 + \varepsilon = \vartheta_0 + \varkappa\left(1 - \cos\frac{Cnt}{A}\right).$$

Z toho **perioda nutace** $= \dfrac{2\pi A}{Cn}$. (s)

Dle rovnice (g) a (p) v prvém přiblížení

$$\dot\psi = \frac{Cn}{A}\frac{\varepsilon}{\sin\vartheta} = \frac{Cn}{A}\frac{\varepsilon}{\sin\vartheta_0} = \frac{Cn\varkappa}{A\sin\vartheta_0}\left(1 - \cos\frac{Cnt}{A}\right) = \frac{L}{Cn}\left(1 - \cos\frac{Cnt}{A}\right)$$

takže po integraci

$$\psi = \frac{Mgr^*}{Cn}t - \frac{AMgr^*}{C^2n^2}\sin\frac{Cnt}{A}. \tag{t}$$

Prvý člen vzrůstá úměrně s časem, člen druhý je periodický, téže periody jako nutace a o malé amplitudě, téhož řádu jako je amplituda ve směru ϑ (srov. (r) a (n)).

Když tedy roztočíme setrvačník velmi prudce kolem osy symetrie a postavíme jej do sklonu ϑ_0, tu počne osa vykonávati malé nutace periody $2\pi A/Cn$ a zároveň precesní pohyb se střední úhlovou rychlostí Mgr^*/Cn. Periodické oscilace jsou zpočátku malé, sotva znatelné. Když však vlivem tření klesne rotační rychlost n setrvačníku, stávají se nutace zřetelnějšími a na konec nastane pohyb kolísání mezi sklony ϑ_0 a ϑ_1, jak byl popsán na začátku tohoto paragrafu.

*117. O stabilitě pohybového stavu setrvačníku.

Předložme si otázku, zdali regulární precese je stabilním pohybovým stavem setrvačníku. Zaveďme podobně jako u (116o) $\vartheta = \vartheta_0$, $\dot\vartheta = 0$, $\ddot\vartheta = 0$, $\dot\psi = \nu =$ stálé a dle (116f) $\dot\varphi + \dot\psi \cos\vartheta = n =$ stálé, z něhož ovšem následuje $\dot\varphi = \mu =$ stálé. Z rovnice (116c) pak plyne podmínka regulární precese

$$A\nu^2 \cos\vartheta_0 - Cn\nu + L = 0. \qquad (a)$$

Jest to ovšem táž podmínka jako (116o), v níž jest zavedena počáteční rotační rychlost n, kterou jsme setrvačníku udělili kolem jeho osy symetrie. Tato rovnice jest splněna pro dvě možné hodnoty precesní rychlosti ν (viz § 114). Aby byly reálné, musí

$$C^2 n^2 \geqq 4LA \cos\vartheta_0. \qquad (b)$$

Ukážeme, že v obou případech jest pohybový stav stabilní, to znamená, že při malé poruše vykonávají se kolem regulární precese malé „kmity“, kterými se typ pohybu nezmění. Udělme setrvačníku malou rychlost $\dot\vartheta$, neměníce $\dot\psi$. Z rovnic (116c, d, e) pak dostáváme:

$$A\ddot\vartheta - A\dot\psi^2 \sin\vartheta \cos\vartheta + Cn\dot\psi \sin\vartheta = L \sin\vartheta,$$
$$A\dot\psi \sin^2\vartheta + Cn \cos\vartheta = \text{stálé} = A\nu \sin^2\vartheta_0 + Cn \cos\vartheta_0.$$

Eliminací $\dot\psi$ plyne

$$A^2\ddot\vartheta - \frac{\cos\vartheta}{\sin^3\vartheta}(A\nu \sin^2\vartheta_0 + Cn\cos\vartheta_0 - Cn\cos\vartheta)^2$$
$$+ \frac{Cn}{\sin\vartheta}(A\nu \sin^2\vartheta_0 + Cn\cos\vartheta_0 - Cn\cos\vartheta) = AL\sin\vartheta.$$

Položíme-li $\vartheta = \vartheta_0 + \varepsilon$, kde ε jest malé, obdržíme po krátké redukci za pomoci rovnice (a)

$$\ddot\varepsilon = -\varepsilon \cdot \frac{1}{A^2\nu^2}(A^2\nu^4 - 2AL\nu^2 \cos\vartheta_0 + L^2). \qquad (c)$$

Výraz v závorce jest větší než $(A\nu^2 - L)^2$, tedy kladný, a rovnice (c) má známý tvar rovnice kmitové, dávajíc pro dobu kmitovou hodnotu

$$\frac{2\pi A\nu}{\sqrt{A^2\nu^4 - 2AL\nu^2\cos\vartheta_0 + L^2}}. \qquad (d)$$

Jest tudíž pomalá i rychlá precese regulární stabilním pohybovým stavem těžkého symetrického setrvačníku. Je-li za precese pomalé ν velmi malé, jest doba periody dle (d) přibližně

$$\frac{2\pi A\nu}{L} = \frac{2\pi A}{Cn}, \qquad (e)$$

neboť z rovnice (a) plyne, že za velmi veliké počáteční rychlosti n jest přibližně

$$\nu_{12} = \frac{Cn}{2A\cos\vartheta_0}\left(1 \pm \left(1 - \frac{2AL\cos\vartheta_0}{C^2n^2} + \dots\right)\right).$$

čili precesní rychlost za precese rychlé a pomalé

$$\nu_1 = \frac{Cn}{A\cos\vartheta_0}, \quad \text{resp.} \quad \nu_2 = \frac{L}{Cn}. \tag{f}$$

Vztahy (f) nejsou než jiným tvarem (za poněkud jiného přiblížení) vztahů (114j) a (e) jest souhlasné s periodou nutace (116s).

Je-li osa setrvačníku původně vertikální, dokážeme stabilitu pohybu podobným způsobem. Potřebujeme znáti ϑ, je-li ϑ velmi malé, byla-li osa malou poruchou z vertikální polohy vychýlena. Zase nám odpovídají rovnice (116c a g), kde ovšem za ϑ_0 dosadíme nulu; máme tedy

$$A\ddot{\vartheta} = A\dot{\psi}^2 \sin\vartheta\cos\vartheta - Cn\dot{\psi}\sin\vartheta + L\sin\vartheta, \tag{g}$$

$$A\dot{\psi}\sin^2\vartheta = Cn(1 - \cos\vartheta). \tag{h}$$

Ježto právě ϑ je malé, dává (h), zanedbáme-li členy s ϑ^2....

$$\dot{\psi} = \frac{Cn}{A}\frac{1}{1+\cos\vartheta} = \frac{Cn}{2A}.$$

Z (g) pak

$$A\ddot{\vartheta} = \frac{C^2n^2}{4A}\vartheta - \frac{C^2n^2}{2A}\vartheta + L\vartheta = -\left(\frac{C^2n^2}{4A} - L\right)\vartheta. \tag{i}$$

Rovnice tato vede ke kmitům, tedy k stabilnímu pohybu, je-li faktor u ϑ záporný; čili

$$\frac{C^2n^2}{4A} > L, \quad \text{t. j.} \quad n > \sqrt{\frac{4AL}{C^2}}, \tag{j}$$

a doba nutační je

$$2\pi\sqrt{\frac{4A^2}{C^2n^2 - 4AL}}. \tag{k}$$

Tak na př. jedná-li se o homogenní kouli, která se otáčí kolem svého vertikálního průměru $2a$, jsouc podepřena v jeho nejnižším bodě, je

$$r^* = a, \qquad L = Mgr^* = Mga, \qquad A = {}^7/_5 Ma^2, \qquad C = {}^2/_5 Ma^2,$$

a tedy, má-li rotace býti stabilní, musí $n > \sqrt{35\,g/a}$. U koule poloměru 10 cm musí $n > 58{\cdot}6\,{}^1/sec$ a tedy počet otoček za vteřinu přesahovati $n/2\pi = 9{\cdot}3$.

118. K precesnímu pohybu zeměkoule.

Zeměkoule jest ohromný setrvačník, který se otáčí kolem osy, spojující oba její póly a procházející těžištěm, jenž je jeho pevným bodem. Považujeme-li zeměkouli za rotační elipsoid, pak jsou momenty setrvačnosti kolem všech os ležících v rovníku $A = B$, kdežto moment C pro zemskou osu jest asi v poměru 305/304 větší. Při precesi zemské osy (srv. § 85 a 87), která jest velmi pomalá, obnášejíc asi 50″ za rok, nemůže se jednati o volnou precesi bezsilového setrvačníku, jak bylo v § 110 zřejmě ukázáno. Jest tedy precese zemská vynucena

silami, kterými působí na zeměkouli slunce, měsíc a ovšem v míře nesmírně nepatrné také ostatní tělesa nebeská. Obrazec 115 (nehledíc k nemožným poměrům měřítka) zřejmě ukazuje, jak vlivem slunce a sklonu ekliptiky k rovníku vzniká nestejnou přítažlivostí bližších a vzdálenějších částí rovníkového pásu statický moment silový kolem hmotného středu O, který se snaží postaviti osu zemskou kolmo k ekliptice, moment, jenž jakožto vektor leží v přímce uzlové, v níž se protíná rovina ekliptiky a rovníka. Jest ovšem viděti, že tento moment je maximální za slunovratu, je-li země v přísluní nebo odsluní, a že mizí za rovnodennosti, když slunce prochází rovinou rovníkovou.



Obr. 115.

Podobně, jenže následkem své malé vzdálenosti ještě silněji, působí měsíc, jehož dráha svírá s rovinou ekliptiky úhel $\gamma = 5^0 9'$. Nazveme-li hmoty slunce a měsíce m_s a m_m, a jejich střední vzdálenosti od země r_s a r_m, dá se střední moment v přímce uzlové vypočísti jakožto

$$\frac{3}{2}(C - A) \sin \vartheta_0 \cos \vartheta_0 \left\{\frac{m_s}{r_s^3} + \frac{m_m}{r_m^3}\left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \gamma\right)\right\}.$$

a dosadíme-li tuto hodnotu za $L \sin \vartheta_0$ v rovnici (116 o), můžeme vypočísti ν, t. j. precesní rychlost osy zemské, z něhož plyne pomalá precese bodů rovnodennosti asi o 50″ za rok. Z toho připadá asi 16″ na vliv slunce, asi 34″ na vliv měsíce. Astronomové ostatně považují za neznámou v přesnějších rovnicích (viz na př. Tisserand, Mécanique céleste, 2. sv.) nikoli ν, které je dáno pozorováním, nýbrž podíl $(C - A)/C$.

O příčině vynucených nutací osy zemské v oběhu uzlové přímky měsíční dráhy stala se zmínka již v § 85.

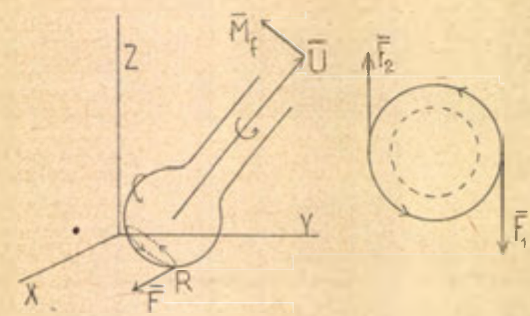
119. O setrvačníku na rovině.

Setrvačník, který se neotáčí kolem pevného bodu, nýbrž kolem bodu, jenž může se libovolně posouvati po rovině, jedním slovem „vlk“ nebo „vlček“*), má pět stupňů volnosti. K dřívějším Eulerovým úhlům φ, ψ, ϑ přibudou dvě nové obecné koordináty, nejlépe pravoúhlé koordinaty x a y průmětu okamžité polohy těžiště na danou rovinu. Třetí koordináta těžiště je $z = r^* \cos \vartheta$. Je-li rovina, po níž se vlk pohybuje, absolutně hladká, přibude k vnějším silám reakce roviny, kteráž jest na ni kolmá, tedy vertikální. Proto nepůsobí na těžiště žádná horizontální složka síly a těžiště může se pohybovati v horizontálním směru pouze rovnoměrně a přímočaře. Abstrahujíce

*) Název zcela vhodný dle dětské hračky, jež se triviálně nazývá „káča“.

od tohoto pohybu, můžeme zkoumati pouze pohyb těžiště ve směru vertikálním. Východištěm pro Lagrangeovy rovnice bude pak výraz pro kinetickou energii vlka stejný jako byl napsán v (116 *b*), kde však nyní pro pohyb kolem těžiště A a C jsou momenty setrvačnosti pro osy procházející těžištěm, k němuž přistoupí člen $\frac{1}{2} Mr^{*2} sin^2\vartheta\, \dot{\vartheta}^2$, t. j. kinetická energie vlka pro rychlost těžiště ve směru vertikálním. Další rozbor ukazuje, že $cos\,\vartheta$ je hypereliptická funkce času. Ale lze dokázati, že osa zase kolísá mezi dvěma sklony a provádí pohyb podobný pseudoregulární precesi. Dráha hrotu, na němž setrvačník spočívá, má kličky, špičky nebo inflexe, různě dle počátečních podmínek.

Ale nejjednodušší pokus s dětským vlkem nám ukazuje, že za dostatečné rotační rychlosti se osa vlka vztyčuje, ba stane se vertikální a vlk „usne". O tomto vztyčování dosud nebylo nikde v našich vývodech ničeho. Nemůže tudíž pocházeli od ničeho jiného než od tření hrotu vlčkova na podkladu, je-li tedy tento podklad drsný. Velmi snadno to nahlédneme z obr. 116, který znázorňuje kulovitý „hrot" vlka. Dotýká se „n e d o k o n a l e d r s n é h o" podkladu v bodě R. To znamená, že se nestane R okamžitým středem, kolem něhož se hrot otáčí, že se tedy n e v a l í po podkladu, nýbrž v bodě tomto nastává s m y k a v ý pohyb hrotu ve směru záporné osy X. Tímto pohybem vzbudí se síla F od tření vlečeného (tření ve smyku), která má směr opačný, tedy kladné osy X.



Obr. 116.

Tato síla má vzhledem k těžišti setrvačníku moment $\bar{M}_f$, který se skládá s impulsmomentem $\bar{U}$ a působí zvedání těžiště, vztyčování osy setrvačníku. Byla-li původní rotační rychlost dostatečně veliká, „usne" vlk, to jest jeho osa postaví se do polohy vertikální. Ovšem nepominulo nyní tření, ale změnilo svůj charakter; K l e i n a S o m m e r f e l d je nazývají „bohrende Reibung", Angličané „pivoting", Franzouzi „frottement de pivotement". Chci je — nevěda nic lepšího — jmenovati „pivotování". Značí-li postranní obrázek u 116 pohled shora na kruhovou úseč, ve které se „hrot" spícího vlka podkladu dotýká, takže osa jde kolmo z papíru ven, nastává tření ve smyku po celém obvodu kruhů, ve kterých dotek se děje. Spojíme-li toto tření vždy ve dvou protilehlých bodech téhož kruhu ve dvojici, vidíme, že všechny výsledné dvojice mají momenty kolmo za papír jdoucí, tedy protisměrné impulsmomentu $\bar{U}$. Pivotování tedy pouze zvolňuje rotační pohyb.

U osy mírně skloněné nastává současné tření ve smyku i pivotování. Prvé vztyčuje osu, druhé zmenšujíc rotační rychlost, zvětšuje nutační kolísání (116 *n*) a zvětšuje sklon k vertikále ϑ_0 při regulární precesi

(vzorce (114 *i*) nebo (117 *b*)). Proto, nerotoval-li vlk dostatečně rychle, začne se sice na drsném podkladě vztyčovati, ale nedospěje až k poloze svislé, nýbrž zase sklonu osy přibývá, opisují se jakési precesní kužele, čím dále tím otevřenější a tím rychleji, až se dotkne svým okrajem desky, na níž tančil, a svalí se.

Vztyčování se vlka užil francouzský admiral Fleuriais ke konstrukci „horizontálního gyroskopu“, který dovoluje přesně určiti rovinu horizontální, takže lze na moři konati měření sextantová, i je-li obzor mraky nebo mlhou zastřen.

Z našeho vylíčení je patrno, že každý výklad, který vede k vysvětlení, proč se osa vlka vztyčuje, aniž při tom za příčinu uvádí tření, je nutně nesprávný, v principu pochybený*).

*) Tato poznámka týká se také Strouhalovy modifikace Poggendorffova výkladu v Strouhal-Kučerově Mechanice (2. vyd., str. 397 a násl.).

VIII. Dodatky.

*120. O malých kmitech soustav.

Mějme nějakou (skleronomní) soustavu o n stupních volnosti, určenou všeobecnými, na sobě navzájem nezávislými souřadnicemi $q_1, q_2, \ldots q_n$. Dejme tomu, že známe rovnovážnou polohu soustavy té, a že jí odpovídají určité hodnoty $q_{10}, q_{20}, \ldots q_{n0}$ těch souřadnic. Pak můžeme za nové všeobecné souřadnice soustavy zavésti

$$x_1 = q_1 - q_{10}, \quad x_2 = q_2 - q_{20}, \quad \ldots \quad x_n = q_n - q_{n0}. \qquad (a)$$

Ta $x_1, \ldots x_n$ mají tu výhodu, že za rovnovážného stavu vesměs vymizí.

Je-li potenciální energie soustavy za rovnovážného stavu U_0, bude za jiného rovna

$$U = U_0 + x_1\frac{\partial U}{\partial q_1} + x_2\frac{\partial U}{\partial q_2} + \ldots\ldots x_n\frac{\partial U}{\partial q_n} +$$
$$+ \tfrac{1}{2}\left(x_1^2\frac{\partial^2 U}{\partial q_1^2} + 2x_1x_2\frac{\partial^2 U}{\partial q_1 \partial q_2} + x_2^2\frac{\partial^2 U}{\partial q_2^2} + \ldots\right), \qquad (b)$$

předpokládáme-li výchylku z rovnovážného stavu dostatečně malou, abychom mohli třetí a vyšší mocniny těch x_ν zanedbati. Ze (76e) však víme, že rovnovážnému stavu odpovídá extrémní hodnota potenciální energie, takže

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = \frac{\partial U}{\partial q_2} = \ldots\ldots = \frac{\partial U}{\partial q_n} = 0. \qquad (c)$$

Nabude tudíž (b) tvaru

$$U = U_0 + a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + \ldots\ldots + a_{nn}x_n^2. \qquad (d)$$

$a_{11}, \ldots a_{nn}$ jsou konstantní hodnoty, kterých nabývají částečné derivace vypsané v (b), dosadíme-li do nich dle předpisu pro Taylorův rozvoj za q_ν hodnoty $q_{\nu 0}$. Ježto potenciální energie jest vždy určena až na konstantu, mohli bychom v (d) klásti $U_0 = 0$, ale není toho ani potřebí.

Kinetická energie jest dle (78f) kvadratickou homogenní funkcí obecných rychlostí $\dot{x}_\nu$

$$T = b_{11}\dot{x}_1^2 + 2b_{12}\dot{x}_1\dot{x}_2 + b_{22}\dot{x}_2^2 + \ldots\ldots + b_{nn}\dot{x}_n^2, \qquad (e)$$

kde ovšem $b_{11}, \ldots b_{nn}$ jsou, přesně vzato, funkce obecných souřadnic x_ν. Můžeme je však s dostatečnou přesností považovati za konstanty,

udělivše jim hodnoty, které jim přináležejí za stavu rovnovážného. Kinetická energie T jest ovšem dle povahy věci funkce podstatně kladná.
Dá se dokázati, že lze nalézti lineární substituci

$$\begin{aligned} x_1 &= k_{11} p_1 + k_{12} p_2 + \ldots + k_{1n} p_n, \\ x_2 &= k_{21} p_1 + k_{22} p_2 + \ldots + k_{2n} p_n, \\ &\vdots \end{aligned} \qquad (f)$$

takovou, že se dvě kvadratické formy současně tak transformují, že se v nich vyskytují pouze čtverce nových proměnných p_ν.

Důkaz nebudeme zde prováděti, odkazujíce na př. na O. Hesse: Vorlesungen über analyt. Geometrie (2. vyd., Lipsko 1896, str. 296 a násl.), nebo C. Schäfer: Theoretische Physik (I. sv., Lipsko 1914, str. 246 a násl.) nebo na učebnice vyšší algebry. Pouze ozřejmíme náš theorém geometricky, omezujíce počet proměnných na tři, x, y, z. Dvě kvadratické funkce

$$f(x, y, z) = 1 \qquad \text{a} \qquad F(x, y, z) = 1$$

budou pak rovnice dvou koncentrických ploch druhého stupně. Ježto jedna z nich, na př. F, je podstatně kladná pro všechny hodnoty x, y, z, značí elipsoid. Ale elipsoid a druhá plocha druhého stupně mají vždy jednu trojici navzájem konjugovaných průměrů, neboť lineární reálnou transformací můžeme změniti elipsoid na kouli, při čemž přejde druhá plocha na jinou reálnou plochu druhého stupně. Její hlavní osy jsou pak reálné navzájem konjugované průměry koule a plochy druhého stupně, a při zpáteční transformaci jimi zůstávají. Je-li však tomu tak, můžeme transformovati obě plochy f a F na tyto průměry jakožto osy souřadnic, při čemž zůstanou pouze čtverce těchto nových souřadnic ξ, η, ζ, a f i F nabudou tvaru

$$\alpha_1 \xi^2 + \alpha_2 \eta^2 + \alpha_3 \zeta^2 = 1, \qquad \beta_1 \xi^2 + \beta_2 \eta^2 + \beta_3 \zeta^2 = 1.$$

Algebraický důkaz věty (f) se ovšem neomezuje pouze na tři proměnné.

Je-li tomu tak, pak po dosazení (f) a

$$\dot{x}_1 = k_{11} \dot{p}_1 + k_{12} \dot{p}_2 + \ldots + k_{1n} \dot{p}_n$$

přejdou výrazy pro potenciální a kinetickou energii ve tvary

$$U = U_0 + \alpha_1 p_1^2 + \alpha_2 p_2^2 + \ldots + \alpha_n p_n^2, \qquad (g)$$

$$T = \beta_1 \dot{p}_1^2 + \beta_2 \dot{p}_2^2 + \ldots + \beta_n \dot{p}_n^2. \qquad (h)$$

Konstanty $\beta_1, \ldots \beta_n$ jsou vesměs kladné.

Souřadnice $p_1, \ldots p_n$ soustavy nazývají se **hlavní**, nebo také **normální souřadnice** soustavy dané.

Lagrangeovy rovnice (79 k) pro tyto souřadnice jsou

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{p}_\nu}\right) - \frac{\partial T}{\partial p_\nu} = -\frac{\partial U}{\partial p_\nu}, \qquad (i)$$

čili

$$\beta_\nu \ddot{p}_\nu = -\alpha_\nu p_\nu. \qquad (j)$$

Mohou nyní nastati dva případy:

I. Všechna α_ν jsou kladná. Položíme-li $\alpha_\nu/\beta_\nu = k_\nu^2$, mají veškeré rovnice ($j$) řešení

$$p_\nu = A_\nu \cos(k_\nu t - \varphi_\nu), \qquad (k)$$

kde A_ν a φ_ν jsou integrační konstanty.

Pohyb ve veškerých souřadnicích p_ν je jednoduchý, harmonický*), cyklické frekvence $k_\nu = \sqrt{\alpha_\nu/\beta_\nu}$. Obecná souřadnice x_ν bude míti tvar dle (f)

$$x_\nu = B_1 \cos(k_1 t - \varphi_1) + B_2 \cos(k_2 t - \varphi_2) + \ldots = \sum_{\nu=1}^{n} B_\nu \cos(k_\nu t - \varphi_\nu), \qquad (l)$$

kde B_ν jsou nové konstanty.

Potenciální energie, příslušná hlavní (normální) souřadnici p_ν je dle (g)

$$\alpha_\nu A_\nu^2 \cos^2(k_\nu t - \varphi_\nu),$$

a podobně kinetická energie dle (h)

$$\beta_\nu A_\nu^2 k_\nu^2 \sin^2(k_\nu t - \varphi_\nu) = \alpha_\nu A_\nu^2 \sin^2(k_\nu t - \varphi_\nu).$$

Ježto pak během kmitové doby $\tau_\nu = 2\pi : k_\nu$, jest střední hodnota

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \cos^2(kt - \varphi)\,dt = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \sin^2(kt - \varphi)\,dt = \tfrac{1}{2},$$

jak přímo jest patrno ze stejných průběhů funkcí pod integračním znamením, jest viděti, že za každé vibrace jest střední hodnota kinetické a potenciální energie stejná a rovna $\frac{1}{2}\alpha_\nu A_\nu^2$.

II. Kdyby některý z koeficientů α_ν byl záporný, na př. $\alpha_1 < 0$, položili bychom $\alpha_1/\beta_1 = -k_1^2$ a z (j) by vznikla rovnice

$$\ddot{p}_1 = k_1^2 p_1,$$

jež má integrál

$$p_1 = A_1 e^{k_1 t} + B_1 e^{-k_1 t}.$$

Souřadnice p_1 rostla by pak s časem do nekonečna a neoscilovala by kolem hodnoty $p_1 = 0$. Pohyb ani rovnováha by nebyla stabilní. Podmínkou stabilní rovnováhy jest tedy, že všechna α_ν jsou kladná, což jest dle srovnání (g) a (b) totožné s podmínkou, že za stabilní rovnováhy musí potenciální energie soustavy býti absolutním minimem, jak jsme bez důkazu již tvrdili v § 76.

Kmity vynucené. Kmity soustavy, o nichž dosud bylo jednáno, jsou ovšem typu zvaného kmity volné, což praví, že působící síly pocházejí pouze a výhradně od potenciální energie soustavy samé. Kdyby se k nim připojily ještě jiné síly vnější, jichž práce při malém

*) Nesmíme ovšem klamně si představovati, že při tom jediný stupeň volnosti kmitá, ostatní jsou v klidu. Kmit normální souřadnice p_ν má v zápětí jistý způsob kmitání všech souřadnic obecných $x_1, \ldots x_\nu$, jak hned vysvítá ze vztahu (l).

posunutí by dle předpokladu, jejž chceme učiniti, byla dána výrazem

$$P_1\delta p_1 + P_2\delta p_2 + \ldots + P_n\delta p_n,$$

zněly by Lagrangeovy rovnice

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{p}_\nu}\right) - \frac{\partial T}{\partial p_\nu} = -\frac{\partial U}{\partial p_\nu} + P_\nu, \qquad (m)$$

čili dle (g) a (h)

$$2\beta_\nu \ddot{p}_\nu = -2\alpha_\nu p_\nu + P_\nu. \qquad (n)$$

Dosadíme-li zase $\beta_\nu k_\nu^2 = \alpha_\nu$, jest obecným integrálem

$$p_\nu = A_\nu \cos(k_\nu t - \varphi_\nu) + \frac{1}{\sqrt{2\alpha_\nu\beta_\nu}} \int_{t'_\nu}^{t'=t} P_\nu \sin k_\nu (t - t') dt'. \qquad (o)$$

P_ν jsou obecně funkce času a t'_ν jest okamžik, od něhož počínaje počala síla P_ν působiti.

Velmi důležitý případ nastává, jsou-li vnější síly periodické, na př.

$$P_\nu = E_\nu \cos(\omega_\nu t - \psi_\nu).$$

Integrál (o) nabude tvaru

$$p_\nu = A_\nu \cos(k_\nu t - \varphi_\nu) + \frac{E_\nu}{2\alpha_\nu\left(1 - \frac{\omega_\nu^2}{k_\nu^2}\right)} \cos(\omega_\nu t - \psi_\nu). \qquad (p)$$

Obecná souřadnice p_ν se pak mění harmonicky jednak s periodou vlastní k_ν, jednak vynucenou ω_ν. Jsou-li obě velmi blízce stejné, nabývá druhý člen pravé strany(p) velmi veliké hodnoty, vynucené kmity mají velmi velikou amplitudu. To je známý případ resonance vnější síly na jeden z částečných kmitů soustavy. Nemůžeme ovšem říci, že v hraničním případě $\omega_\nu = k_\nu$ se stanou amplitudy nekonečnými, ježto v obecném vzorci neznáme zvláštní hodnoty A_ν a φ_ν, které mohou býti takové, že zamezí nekonečné zvětšení amplitudy v druhém členu. Vedle toho nevzali jsme v počet síly od tření, které ve skutečnosti vždy existují, a mění n samostatných rovnic (j) na soustavu n rovnic simultanních tvaru

$$\ddot{p}_\nu + k_\nu^2 p_\nu + c_{\nu 1}\dot{p}_1 + c_{\nu 2}\dot{p}_2 + \ldots + c_{\nu n}\dot{p}_n = 0, \qquad (q)$$

ovšem předpokládáme-li, že tření jest úměrno rychlosti změny obecných souřadnic q_ν resp. x_ν. Integraci lze provésti, předpokládáme-li integrály ve tvaru exponenciel $p_\nu = A_\nu e^{ut}$ atd. Do bližších podrobností se však nemůžeme pouštěti.

*121. Soustavy spřažené.

V předcházejícím paragrafu jsme zavedli hlavní (normální) obecné souřadnice p, ježto v nich nabývají pohybové rovnice zvláště jednoduchého tvaru, nejsouce simultanní. Často jest však zajímavo, přímo integrovati

rovnice pro obecné souřadnice $x_1, \ldots x_n^*$, abychom, jak praví Gans*), jehož postupu se v tomto paragrafu téměř slovně přidržíme, hlouběji vnikli do mechanismu kmitající soustavy.

Omezíme se na velmi jednoduchý případ, který nachází přímou obdobu v nauce o kmitových kruzích elektromagnetických, totiž na případ soustavy o dvou stupních volnosti, tedy dvou obecných souřadnicích, které zde budeme psáti q_1 a q_2. Předpokládejme pro jednoduchost, že se dá vyjádřiti kinetická a potenciální energie tvary

$$2T = \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2, \tag{a}$$

$$2U = \nu_1^2 q_1^2 + \nu_2^2 q_2^2 + 2\nu_{12} q_1 q_2. \tag{b}$$

Alespoň jeden z obou výrazů musí totiž obecně obsahovati vedle čtverců také podvojný součin.

Dle (120 *i*) znějí pak pohybové rovnice

$$\ddot{q}_1 + \nu_1^2 q_1 + \nu_{12} q_2 = 0, \qquad \ddot{q}_2 + \nu_2^2 q_2 + \nu_{12} q_1 = 0. \tag{c}$$

Jest patrno, že časová změna souřadnice q_1 závisí také od q_2 a naopak; říkáme, že oba stupně volnosti, charakterisované souřadnicemi q_1 a q_2, jsou spolu navzájem **s p ř a ž e n y**. Význam konstant ν_1 a ν_2 jest jednoduchý: jsou to patrně dle (*c*) cyklické frekvence prvého a druhého stupně volnosti, kdyby nebylo spřažení ($\nu_{12} = 0$). Zavedše označení

$$\nu_{12} = \vartheta_1 \nu_1^2 = \vartheta_2 \nu_2^2, \tag{d}$$

můžeme přepsati (*c*) na

$$\ddot{q}_1 + \nu_1^2 q_1 + \vartheta_1 \nu_1^2 q_2 = 0, \qquad \ddot{q}_2 + \nu_2^2 q_2 + \vartheta_2 \nu_2^2 q_1 = 0. \tag{e}$$

Dosazením integrálu tvaru

$$q_1 = C_1 e^{int}, \qquad q_2 = C_2 e^{int}$$

obdržíme z (*e*)

$$C_1 (n^2 - \nu_1^2) = \vartheta_1 \nu_1^2 C_2, \qquad C_2 (n^2 - \nu_2^2) = \vartheta_2 \nu_2^2 C_1, \tag{f}$$

z čehož plyne znásobením

$$(n^2 - \nu_1^2)(n^2 - \nu_2^2) = \vartheta_1 \vartheta_2 \nu_1^2 \nu_2^2 \tag{g}$$

a dělením pro čtverec poměru amplitud vzhledem k (*d*)

$$\left(\frac{C_1}{C_2}\right)^2 = \frac{n^2 - \nu_2^2}{n^2 - \nu_1^2}. \tag{h}$$

Z rovnice (*g*) obdržíme pro n^2 dvě hodnoty

$$n^2 = \frac{\nu_1^2 + \nu_2^2}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{(\nu_1^2 - \nu_2^2)^2 + 4\nu_1^2 \nu_2^2 \vartheta_1 \vartheta_2},$$

$$n'^2 = \frac{\nu_1^2 + \nu_2^2}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{(\nu_1^2 - \nu_2^2)^2 + 4\nu_1^2 \nu_2^2 \vartheta_1 \vartheta_2}. \tag{i}$$

*) R. H. Weber a R. Gans: Repertorium der Physik (I. sv., Lipsko 1915, str. 184 a násl.).

Jsou tedy integrály rovnic (c)

$$q_1 = C_1 \cos(nt - \varphi), \qquad q_2 = C_2 \cos(nt - \varphi),$$

kde C_1 a φ jsou zcela libovolné, kdežto C_2 je dáno vztahem (h). Ale rovněž jsou integrály

$$q_1 = C'_1 \cos(n't - \varphi'), \qquad q_2 = C'_2 \cos(n't - \varphi'),$$

kde C'_1, φ' jsou libovolné, C'_2 dáno (h), do něhož ovšem zavedeme n' za n. Obecné řešení jest tudíž

$$q_1 = C_1 \cos(nt - \varphi) + C'_1 \cos(n't - \varphi'),$$
$$q_2 = C_2 \cos(nt - \varphi) + C'_2 \cos(n't - \varphi'). \qquad (j)$$

Kmity každého stupně volnosti vznikají superposicí dvou jednoduchých kmitů harmonických o různých dobách kmitových.

Jsou-li vlastní kmity bez spřažení ν_1 a ν_2 značně různé, $\nu_1 > \nu_2$ a $\nu_1^2 - \nu_2^2$ veliké proti $\nu_1 \nu_2$, a je-li „koeficient spřažení“

$$\vartheta = \sqrt{\vartheta_1 \vartheta_2} \qquad (k)$$

malý, nebo, jak říkáme, spřažení volné, obdržíme z (i)

$$n^2 = \nu_1^2 + \frac{\nu_1^2 \nu_2^2 \vartheta^2}{\nu_1^2 - \nu_2^2}, \qquad n'^2 = \nu_2^2 - \frac{\nu_1^2 \nu_2^2 \vartheta^2}{\nu_1^2 - \nu_2^2}. \qquad (l)$$

Spřažením změní se obě vlastní kmitové doby a sice větší se dále zvětší, menší se rovněž ještě zmenší. Integrály (j) můžeme pak interpretovati tak, že každý stupeň volnosti provádí své vlastní — ovšem spřažením změněné — kmity, prvý n, druhý n', přes které se kladou kmity vynucené, periody příslušné druhému stupni volnosti. Dle (h) je pro každý částečný kmit amplituda větší v té části soustavy, pro kterou se nová kmitová doba méně rozešla se starou kmitovou dobou volných nespřažených kmitů.

Byly-li oba stupně volnosti před spřažením v resonanci $(\nu_1 = \nu_2 = \nu)$, tedy dle (i) bude po spřažení

$$n^2 = \nu^2 (1 + \vartheta), \qquad n'^2 = \nu^2 (1 - \vartheta). \qquad (m)$$

Následkem spřažení vystoupí v soustavě dvě nové kmitové doby, tím značněji se různící, čím tužší (užší) je spřažení. Amplitudy budou dle (h) téže velikosti, ale srovnáme-li se vztahem (f) a (m), bude $C_1 = C_2 = C$, kdežto $C_1' = - C_2' = C'$, takže integrály nabudou tvaru

$$q_1 = C \cos(t . \nu \sqrt{1 + \vartheta} - \varphi) + C' \cos(t . \nu \sqrt{1 + \vartheta} - \varphi'),$$
$$q_2 = C \cos(t . \nu \sqrt{1 + \vartheta} - \varphi) - C' \cos(t . \nu \sqrt{1 + \vartheta} - \varphi'). \qquad (n)$$

Je-li spřažení velmi volné, ϑ velmi malé, je

$$n = \nu \left(1 + \frac{\vartheta}{2}\right), \qquad n' = \nu \left(1 - \frac{\vartheta}{2}\right), \qquad (o)$$

obě kmitové doby se liší velmi málo, nastávají „rázy“ tím pomalejší, čím je spřažení volnější.

Kdybychom počáteční stav zvolili tak, že $C = C'$ a $\varphi = \varphi'$, bylo by

$$q_1 = 2C \cos\frac{\nu\vartheta}{2}t.\cos(\nu t - \varphi), \qquad q_2 = -2C \sin\frac{\nu\vartheta}{2}t.\sin(\nu t - \varphi), \qquad (p)$$

čili amplituda v jedné části soustavy by byla maximální v téže době, kdy ve druhé je amplituda nula, tedy klid, a naopak. Neustále přechází tedy energie z jedné části soustavy do druhé a zase zpět.

Z (n) plyne

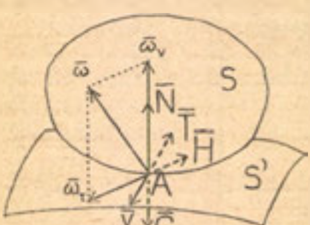
$$\tfrac{1}{2}(q_1 + q_2) = p_1 = C \cos(t.\nu\sqrt{1+\vartheta} - \varphi),$$
$$\tfrac{1}{2}(q_1 - q_2) = p_2 = C' \cos(t.\nu\sqrt{1+\vartheta} - \varphi). \qquad (q)$$

V našem případě mohli bychom tedy voliti poloviční součet a poloviční rozdíl obecných souřadnic za souřadnice normální (hlavní). Ovšem nemají tak názorného významu jako q sama, jak z celého postupu a rovnic (q) jest patrno.

Fysikálně velmi jednoduše se demonstrují popsané zjevy spřaženými kyvadly (Oberbeckovými), na př. dvěma kyvadly, zavěšenými na horizontálním kusu silné kaučukové trubice, která zprostředkuje spřažení.

122. O tření mezi tělesy tuhými.

Již v §§ 59 a 119 dotkli jsme se pojmu tření a sil jím vznikajících. Zde chceme o něm pojednati souborně. Relativní pohyb tělesa S vzhledem k tělesu S', jehož se dotýká v bodě A (vlastně ovšem nejméně ve velmi malé plošce), může nejobecněji sestávati: 1. z pohybu postupného, rychlosti v podél některé tečné k ploše S', a 2. z pohybu otáčivého kolem osy ω^0, bodem A procházející, ale jinak libovolné. Rotační rychlost $\bar{\omega}$ můžeme rozložiti *a*) na složku $\bar{\omega}_\tau$ v tečné rovině k ploše S' a *b*) na složku $\bar{\omega}_\nu$, v normále k ní. Dle toho mluvíme 1. o smýkání (klouzání, vláčení) tělesa S po S', 2. *a*) o jeho valení po S' a 2. *b*) o zavrtávání tělesa S do S', které se v řečích románských nazývá pivotováním. Nemajíce jiného vhodného názvu pro tento druh pohybu, přidržíme se tohoto názvu cizího.



Obr. 117.

Mají-li se tyto pohyby u skutečných těles udržovati, víme, že musíme vynakládati jistý obnos práce, přemáhati odpor, který se staví proti těmto pohybům. Veškerý účinek tělesa S' na S skládá se tedy z několika částí, jež jsou:

1. Reakce $\bar{N}$ proti síle, kterou se S tlačí na podklad, působíc v normále, nazývá se krátce reakce normální;

2. síla $\bar{T}$, která brání pohybu postupnému a má tedy směr opačný než rychlost $\bar{v}$, nazývá se třením vlečným (třením ve smyku, ve vleku, frottement de glissement, sliding friction, Gleitreibung) a jest

dána velikostí i směrem jakožto

$$\bar{T} = -T\tau^0 ; \qquad (a)$$

3. dvojice $\bar{G}$, která působí proti pivotování a kterou chceme nazývati tření ve vrtu (fr. de pivotement, pivoting fr., Bohrreibung); její osa leží v normále k ploše S' a jest tudíž

$$\bar{G} = -G\omega_\nu^0 ; \qquad (b)$$

4. dvojice $\bar{H}$, působící proti valení, tření valné*) (fr. de roulement, rolling fr., Rollreibung); jeho osa leží v tečné rovině a jest tedy

$$\bar{H} = -H\omega_\tau^0 . \qquad (c)$$

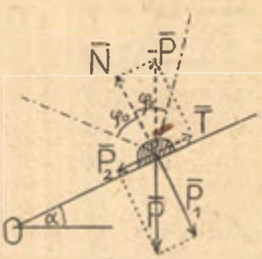
Dotýkají-li se obě tělesa S a S' v ploše konečných rozměrů, jest nutno uvažovati o každém plošném elementu zvlášť. Zákony, jimiž se tření řídí, musí se získati pokusně ze zkušenosti. Ježto pak si výsledky různých badatelů začasté odporují, a ježto naše vědomosti, zvláště o tření valném a ve vrtu jsou dosud velmi kusé, řešívají se různé úlohy o pohybu těles v prvém přiblížení tak, že se tření vůbec zanedbává, v druhém pak tak, že se zanedbává účinek momentů $\bar{G}$ a $\bar{H}$ proti účinku tření vlečného $\bar{T}$. Zkušenost ukazuje, že ve velmi mnoha případech se toto druhé přiblížení vskutku dostatečně přimyká ke skutečnosti.

Že mechanická energie tělesa, které se pohybuje se třením, klesá, bylo ukázáno již v § 59.

123. O tření vlečném.

Již nejjednodušší zkušenost nás poučuje o tom, že může vzniknouti jakási síla od tření i tehdy, když těleso S na S' spočívá v klidu, když vůbec pohybu není.

Vyjděme od velmi jednoduchého pokusu: Těleso hmoty M a váhy $P = Mg$ nacházejž se na šikmé rovině, jejíž sklon α lze měniti. Mysleme třeba na dřevěný hranol, jenž leží na ohoblovaném prkně, které lze otáčeti kolem kloubu v O. Již při nejmenším sklonu α vzniká složka síly $\bar{P}_2$, jež se snaží těleso pohybovati podél šikmé roviny. O složce $\bar{P}_1$, t. zv. normálním tlaku, kolmé na šikmé rovině, říkáme, že se „ruší“ pevností roviny, od níž tedy vzniká reakcí síla $\bar{N} = -\bar{P}_1$, jež jest vzhledem k tělesu samému rovněž silou vnější. Složku $\bar{P}_2$ můžeme pak považovati také za výslednici vnějších sil $\bar{P}$ a $\bar{N}$, t. j. $\bar{P}_2 = \bar{P} + \bar{N}$.



Obr. 118.

Touto složkou musel by vzniknouti zrychlený pohyb podél šikmé roviny, kdyby byla, jak v mnohých úlohách mechanických se předpokládává, „absolutně hladká“. Ve skutečnosti však, jak z názoru víme, nevznikne pohyb, leč když sklon α dostoupí jisté hodnoty φ_0, nebo větší. Úhel φ_0

*) Tohoto názvu užívá kniha Strouhalova; Vl. Novák říká „valivé“.

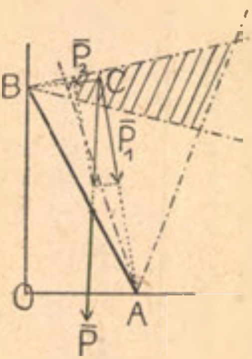
závisí na materiálu a povrchovém stavu obou ploch, ve kterých se stýkají šikmá rovina a dané těleso. Že za $\alpha < \varphi_0$ nevznikne pohyb, nemůžeme vysvětliti jinak, leč že předpokládáme, že vedle vnějších sil $\overline{P}$ a $\overline{N}$ působí na dané těleso vnější síla $\overline{T} = -\overline{P}_2$, takže $\overline{N} + \overline{T} = -\overline{P}$, a těleso pak ovšem je v klidu. Složku $\overline{T}$ nazýváme **třením statickým** (frottement de glissement à l'état de repos, Haftreibung). Není hodnoty určité.

Z pokusů víme jen tolik, že drží v rovnováze složku $\overline{P}_2$, jež se snaží uvésti těleso v pohyb a dále, že nemůže přestoupiti velikost

$$T = N \, . \, tg\varphi_0 = \mu_0 N, \quad \text{kdež} \quad \mu_0 \equiv tg\varphi_0, \qquad (a)$$

koeficient tření statického, musí se pro každý individuální pár troucích ploch zvláště určiti. Ovšem že platí zcela podobné úvahy pro těleso, které podléhá vnější síle, jež se snaží uvésti je v pohyb po rovině vodorovné. I tu musíme vyhledati normální složku všech vnějších daných sil, kterouž je dán normální tlak tělesa za podklad a tedy také $-\overline{N}$, normální reakční síla od podkladu na těleso a složku rovnoběžnou s rovinou, která, nemá-li nastati pohyb, musí býti $< \mu_0 N$.

1. Při řešení úloh **statických** vzniknou nám tímto způsobem místo rovnic nerovnice. Řešení grafické vede nás často rychleji k cíli než výpočet. Jest totiž patrno z dosavadního výkladu toto: „Nakreslíme-li kolem N jakožto osy, kužel o polovičním otvoru φ_0 — t. zv. **kužel torný** — bude rovnováha, t. j. nenastane pohyb, padá-li výslednice daných vnějších sil (k nimž nepočítáme sílu reakční od podkladu) ve svém zpětném prodloužení $-\overline{P}^{0}$ do tohoto kužele."



Obr. 119.

Příkladem uvedeme tuto úlohu: O horizontální půdu a vertikální zeď opírá se žebřík, stojící v rovině vertikální a zatížený na př. osobou, po něm stoupající. Z váhy žebříku a osoby resultujž síla $\overline{P}$. Pokud protíná $\overline{P}$ ve zpětném prodloužení prostor společný oběma torným kuželům pro body A a B, potud zůstane žebřík vlivem tření v rovnováze. Mohu si totiž zvoliti libovolný bod C uvnitř společného prostoru na prodloužení $-\overline{P}^{0}$, spojiti jej s A i B, a v těchto směrech rozložiti sílu $\overline{P}$. Obě složky, přeneseny do A resp. B, nahražují sílu danou, $\overline{P}_1 + \overline{P}_2 = \overline{P}$, a obě v zpětném prodloužení leží v příslušných torných kuželech. Tento výsledek, graficky získaný, snadno bychom oděli do analytických symbolů. Jsou-li, alespoň svým směrem dané, vnější síly **dvě**, musí jejich průsečík být uvnitř torného kužele, neboť jen tehdy mohou spolu se silou od tření se protínati v témž bodě a tedy tvořiti soustavu rovnovážnou.

2. Nastane-li vlivem vnějších sil postupný **pohyb** tělesa S (hmoty M) podél roviny tečné k tělesu S' (obr. 117), víme již dle předcházejícího,

že tangenciální složka F vnějších sil musí míti velikost $F > \mu_0 N$. Ale ovšem neudělí tělesu S zrychlení, jež bychom vypočetli dle Newtonova zákona, dělíce sílu F hmotou M, nýbrž zrychlení menší. Působí totiž proti síle $\overline{F}$ vlečné tření $\overline{T}$, jež, jak víme, má opačný směr než okamžitá rychlost $\overline{v}$ a jest $\overline{T} = -Tv^0$.

Velikost T vlečného tření může obecně záviseti na podstatě troucích se těles S a S', na jakosti povrchu a velikosti ploch styčných, na tlaku normálním a konečně na vzájemné rychlosti. Zákony, jimiž se řídí, jsou velmi složité a nejsou dodnes přesně známy. Proto se ve výpočtech začasté stále ještě užívá zákona, který ze svých měření odvodil Coulomb (1781) a potvrdil generál Morin (1831). Zní: Velikost T vlečného tření jest úměrna normálnímu tlaku N a nezávisí ani na velikosti styčné plochy, ani na relativní rychlosti těles S a S'. Lze tedy psáti:

$$T = \mu N \quad \text{a} \quad \overline{T} = -\mu N v^0. \qquad (b)$$

μ, koeficient vlečného tření za pohybu, závisí ovšem na jakosti styčné plochy a látce těles S a S', a jest obecně o něco menší než koeficient statický μ_0.

Ovšem zde stále myslíme na tření „suché", kde se mezi troucími plochami nenachází vrstva kapaliny, obecně zvané „mazadlem", ať jest jí voda, olej, petrolej či látka hustší, jako vaselina a pod. V tomto druhém případě jest totiž vysvětlovati zjev na základě t. zv. vnitřního tření kapalin, čímž zacházíme do zcela jiného oboru fysiky. Mazadlem se tření vlečné velmi značně sníží, ale také se změní zakony, jež o něm platí. Novější pokusy, konané hlavně v zájmu železničních správ, ukázaly, že ani o tření suchém neplatí Coulombovy zákony, leč pro úzký obor rychlostí*). Vzrůstá-li rychlost, klesá někdy μ velmi značně, na př. pro hladkou plochu ocelovou, šinoucí se po hladké ploše litinové s malou rychlostí, z $\mu = 0{\cdot}34$ až na $0{\cdot}11$, stoupne-li rychlost na 25 *m/sec*. Naopak stoupá tření vlečné mezi obvodem železného kola a koženou řemenicí, stoupá-li rychlost vzájemného pohybu. Podobně jest tomu vždy, užije-li se mazadel.

Ozřejmíme své výklady dvěma jednoduchými, ale typickými příklady o pohybu se třením vlečným.

I. Pohyb na rovině nakloněné.

Ze slovního průvodu k obr. 118 víme, že pohyb nenastane, pokud je $\alpha < \varphi_0$. Přestoupí li sklon α nakloněné roviny hodnotu φ_0, počne se těleso šinouti podél přímky největšího sklonu po rovině dolů. Položme do tohoto směru osu $\overline{\imath}$, a osu $\overline{\jmath}$ do normaly k nakloněné rovině, z ní ven směřující. Je-li M hmota tělesa, jehož poloha je měřena vektorem $\overline{s}$ podél osy $\overline{\imath}$, zní pohybová rovnice

$$M\ddot{\overline{s}} = \overline{P} + \overline{N} - \overline{T}, \qquad \text{čili} \qquad M\ddot{s}\overline{\imath} = P_2\overline{\imath} - P_1\overline{\jmath} + N\overline{\jmath} - T\overline{\imath}. \qquad (c)$$

*) Podrobnější ocenění některých novějších měření najde čtenář v obšírném článku dra. ing. J. Bašty: „Odpory vlakové trením na podložce" v I. roč. Zpráv veřejné služby technické (Praha 1919). Painlevé (viz Seznam literatury) ukázal, že Coulombův zákon vede k logickému sporu, sestává-li pohyb ze současného smyku a valení.

Rozpadá se (násobíme-li ji jako obvykle skalárně jednou $\bar{\imath}$, po druhé $\bar{\jmath}$) na dvě, v nichž ještě zavedeme dle Coulombova zákona $T = \mu N$ a, pochází-li vnější síla od tíže, $P = Mg$, $P_1 = P \cos \alpha$, $P_2 = P \sin \alpha$. Pak máme

$$M\ddot{s} = Mg \sin \alpha - \mu N \quad \text{a} \quad 0 = -Mg \cos \alpha + N. \qquad (d)$$

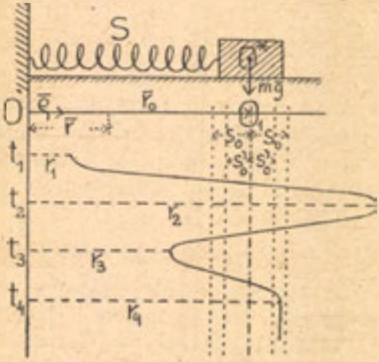
Z druhé obdržíme pro normální tlak

$$N = Mg \cos \alpha, \quad \text{a dosazením} \quad \ddot{s} = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha). \qquad (e)$$

Pohyb jest rovnoměrně zrychlený, zrychlení však třením zmenšeno. Další postup leží úplně nasnadě.

Poznámka: Zavedeme-li do (e) vztahem $\mu = tg\,\vartheta$ úhel torný, lze výsledky velmi vtipně geometricky interpretovati, jak je ukázáno v Strouhal-Kučerově Mechanice (Praha 1910, str. 696 a násl.). Úvahy ty pocházejí z pěkné knížky („Der Reibungswinkel"), kterou vydal r. 1882 k jubileu vircpurské university G. Herrmann. V ní je též po prvé popsán tento vtipný a přes svou nesmírnou jednoduchost velmi poučný pokus: Položme na natažené ukazováky obou rozpřažených rukou, které držíme vodorovně a v téže výši, nějakou hůl o hladkém povrchu. Přibližujeme-li obě ruce znenáhla k sobě, vidíme, že se hůl smýká pouze po jediném ukazováku, sedíc na druhém pevně. Prvý je ten, jenž se nachází dále od těžiště hole, ježto u něho je normální tlak a tedy i tření menší. Toto smýkání hole po něm nepotrvá sice stále, avšak přece déle, než se normální tlak vyrovná, než jsou oba prsty v téže vzdálenosti od těžiště hole, ježto tření za pohybu je menší než statické ($\mu_0 > \mu$). Teprve v jistém pozdějším okamžiku spočine hůl na tom prstě, který dříve pod ní ujížděl, a nastane klouzání po prstě druhém. Tato hra se opakuje několikrát, až se oba prsty úplně sblíží. Hůl na nich balansuje, její těžiště zůstává kdesi mezi body doteku. Označíme-li si na holi několik bodů obratu a těžiště, můžeme dokonce přibližně zjistiti i poměr $\mu_0 : \mu$, jenž jest poměrem vzdáleností dvou po sobě následujících obratů od těžiště.

II. Kmitání za působení tření vlečného.



Obr. 120.

Představme si (obr. 120) těleso hmoty m, které spočívá na rovinném podkladě a jest spojeno pružnou spirálou S s pevnou (na papíře kolmou) stěnou. Není-li spirála ani natažena, ani stlačena, jest těleso v klidu, jeho těžiště O^* se nachází ve vzdálenosti $\overline{OO_1} = r_0$ od stěny. Budiž těleso nějakou „vazbou" nebo „vedením" nuceno pohybovati se pouze ve směru na stěnu kolmém, při čemž se smýká po své rovinné podložce. Koeficient vlečného tření za pohybu je μ, statický μ_0. Vychýlíme-li těleso

z rovnovážné polohy O_1 do A, dané polohovým vektorem $\overline{OA} = \bar{r}$, působí na ně síla od pružnosti, kterou chceme klásti úměrnou výchylce a jež směřuje vždy do rovnovážné polohy zpět. Jest tedy rovna $k\,(\bar{r}_0 - \bar{r})$, nechť se bod A nachází v levo či v pravo od O_1. Vlivem této síly může se těleso dostati do pohybu, proti němuž působí síla od tření, která jest co do velikosti i směru dána výrazem $-\mu mg\bar{\varrho}$, děje-li se pohyb směrem do prava, výrazem $+\mu mg\bar{\varrho}$, pohybuje-li se těleso v levo; $\bar{\varrho}$ jest jedničkový vektor, směřující v pravo.

Zanedbáme-li hmotu spirály, jejíž části se ovšem pohybují s tělesem, můžeme psáti pohybovou rovnici

$$m\ddot{\bar{r}} = k(\bar{r}_0 - \bar{r}) \mp \mu mg\bar{\varrho},$$

kdež platí znamení záporné pro pohyb v pravo, kladné v levo. Násobíme-li ji jedničkovým vektorem $\bar{\varrho}$, vznikne vztah skalární

$$m\ddot{r} = k(r_0 - r) \mp \mu mg,$$

který můžeme přepsati na

$$m(\ddot{r} - \ddot{r}_0) = -k(r - r_0) \mp \mu mg, \qquad (f)$$

vzpomeneme-li, že r_0 jest stálá, s časem nepromĕnná délka, takže trvale $\ddot{r}_0 = 0$.

A nyní nejprve uvažme, že naše těleso, bylo-li v klidu, může v něm zůstati trvale i tehdy, je-li sice mimo rovnovážnou polohu O_1, ale není-li síla od pružnosti spirály dostatečně veliká, aby přemohla statické tření, t. j. je-li

$$k\,|r - r_0| \leqq \mu_0 mg, \qquad \text{čili} \qquad |r - r_0| \leqq \frac{\mu_0 mg}{k} = s_0. \qquad (g)$$

Tento případ nastává tedy v oboru poloh mezi $-s_0$ a s_0 kolem O_1.

Integraci rovnice (f) provedeme odděleně pro pohyb v pravo a v levo, počínajíce prvým, při němž platí na pravé straně znamení záporné. Za (f) lze psáti

$$\frac{d^2}{dt^2}(r - r_0) = -\frac{k}{m}\left(r - r_0 + \frac{\mu mg}{k}\right),$$

čili

$$\frac{d^2}{dt^2}(r - r_0 + s'_0) = -\omega^2(r - r_0 + s'_0), \qquad (h)$$

když píšeme

$$\frac{k}{m} = \omega^2, \qquad \frac{\mu mg}{k} = \frac{\mu}{\mu_0}s_0 = s'_0,$$

a v levo připojíme $\ddot{s}'_0$, které jest trvale nulou, ježto s'_0 jest stálé. Patrně vymezuje s'_0 poněkud menší obor po obou stranách O_1, než s_0, neboť $\mu < \mu_0$.

Z § 26 víme, že integrálem rovnice (h) jest

$$r - r_0 + s'_0 = C\cos(\omega t + \psi), \qquad (i)$$

kde integrační stálé C a ψ musíme vypočísti z počátečních podmínek.

Buďtež ty, že v čase $t_1 = 0$ se nachází těleso v klidu v bodě A_1, na levo od rovnovážné polohy a vně oboru s_0. Bodu A_1 nechť přísluší polohový vektor $\bar{r}_1$.

Ježto jest těleso v klidu, musí jeho rychlost, kterou obdržíme, diferencujíce (i),

$$\dot{r} = -C\omega \sin(\omega t + \psi) = 0 \quad \text{pro} \quad t = 0, \quad \text{čili} \quad \psi = 0.$$

Dosazením

$$t = 0, \quad r = r_1, \quad \psi = 0 \quad \text{do } (i) \text{ pak plyne} \quad r_1 - r_0 + s'_0 = C,$$

takže pohyb v pravo je dán vzorcem

$$r - r_0 + s'_0 = (r_1 - r_0 + s'_0)\cos \omega t. \qquad (j)$$

Píšeme-li ještě za $r_0 - r_1 = s_1$, což jest velikost prvé amplitudy, počítané od O_1 v levo, je

$$r = r_0 - s'_0 - (s_1 - s'_0)\cos \omega t. \qquad (k)$$

Jest to tedy harmonický kmit, který se děje kolem bodu $r_0 - s'_0$, vzdáleného o s'_0 na levo od O_1, a to amplitudou $s_1 - s'_0$. Doba kmitová jest $T = 2\pi : \omega$, výkmit v pravo ukončí se za půl doby kmitové v čase $t_2 = \pi : \omega$, kdy těleso se octne na okamžik v klidu v bodě $r_2 = r_0 - s'_0 + s_1 - s'_0 = r_0 + s_1 - 2s'_0$. Je-li pak toto místo na pravo od O_1 vně oboru s_0, začne zpětný kmit v levo daný rovnicí (f), kde však na pravé straně platí nyní znamení kladné. Naše úvahy, jež vedly k vzorci (i), zůstávají platny s jedinou změnou znamení u s'_0. Jest tudíž kmit v levo dán vztahem

$$r - r_0 - s'_0 = C_1 \cos(\omega t + \psi_1). \qquad (l)$$

V čase $t = t_2 = \dfrac{\pi}{\omega}$ je $r = r_2 = r_0 + s_1 - 2s'_0$ a rychlost $\dot{r} = 0$.

Z toho plyne, že $\psi_1 = 0$, $-C_1 = s_1 - 3s'_0$ a dosazením do (l)

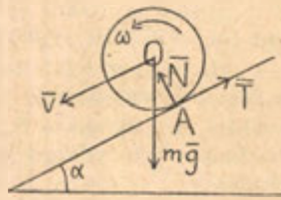
$$r = r_0 + s'_0 - (s_1 - 3s'_0)\cos \omega t. \qquad (m)$$

Také zpětný kmit je harmonický s touž periodou, ale děje se kolem bodu $r_0 + s'_0$, ležícího o s'_0 na pravo od O_1, a se zmenšenou amplitudou $s_1 - 3s'_0$. V čase $t_3 = 2\pi : \omega$ octne se těleso v bodě $r = r_3 = r_0 - (s_1 - 4s'_0)$, t. j. zase na levé straně, ale o $4s'_0$ blíže k O_1, než bylo v čase $t = 0$. A tak to jde dále. Kmity jsou — počítáme-li je mezi body obratu — isochronní, ale amplitud ubývá vzhledem k O_1 řadou aritmetickou, vždy o $2s'_0$. Konečně vpadne některý bod obratu do oblasti s_0. Poněvadž na okamžik je těleso v klidu, zůstane v klidu trvale, ač se zastavilo jinde než ve své poloze rovnovážné. Časové rozvinutí děje na obr. 120 osvětluje dostatečně vše, co bylo řečeno.

Jest velice poučné, srovnati tento pohyb s tlumeným kmitáním § 33, uvědomiti si shody i rozdíly obou. Ve fysikální praxi nastává přečasto kmitání za působení tření vlečného i jeho obdoba za tření valného. Jest důležito věděti, že a proč nemusí vždy souhlasiti pozorovaná rovnovážná poloha kmitající soustavy s rovnovážnou polohou ideální, jež by se ustavila, kdyby nebylo tření.

124. Valení těles a tření valné.

Valení tělesa S po podkladě S' (obr. 117) může býti bud prosté, („čisté“), nebo může být spojeno se současným smýkáním. O tom, který případ při skutečném zjevu nastane, rozhoduje koeficient vlečného tření, slovem drsnost podkladu, velikost otáčecí dvojice kolem styčného bodu těles S a S', křivost obou atd. Nebudeme se zde zanášeti obecnými úvahami, nýbrž provedeme s Hamelem obšírnou diskusi jednoduchého případu, z níž vysvitne, jak se v obdobných případech postupuje.



Obr. 121.

Jednejž se o pohyb válce poloměru r a hmoty m po šikmé rovině sklonu α (obr. 121). Je-li postupná rychlost jeho osy $\bar v$, a rotační rychlost kolem ní ω, platí rovnice

$$m\dot{\bar v} = m\bar g + \bar N + \bar T, \qquad K\dot\omega = rT, \tag{a}$$

kde $\bar N$ jest normální tlak roviny na válec, $\bar T$ síla od tření vlečného a $K = m\varrho^2$ moment setrvačnosti kolem osy (ϱ = poloměr setrvačnosti). Celkem jsou možny tři případy.

I. $v = r\omega$. Postupná rychlost středu válce je rovna obvodové rychlosti styčného bodu, nastává prosté valení bez smýkání. Proto také jest zde $\bar T$ statické tření vlečné a působí ve směru v obrazci zakresleném. Rozepíšeme-li prvou rovnici (a) pro osu rovnoběžnou s nakloněnou rovinou a osu na ní kolmou, obdržíme

$$\begin{aligned} m\dot v &= mr\dot\omega = mg \sin\alpha - T, \\ 0 &= mg\cos\alpha - N, \\ K\dot\omega &= m\varrho^2\dot\omega = rT. \end{aligned} \tag{b}$$

Pro neznámé veličiny N, $\dot\omega$ a T plyne tedy

$$\begin{aligned} N &= mg\cos\alpha, \\ \dot\omega &= g\sin\alpha \,.\, \frac{r}{\varrho^2 + r^2}, \\ T &= mg\sin\alpha \,.\, \frac{\varrho^2}{\varrho^2 + r^2}. \end{aligned} \tag{c}$$

Z druhého vztahu, násobíme-li jej r, obdržíme lineární zrychlení $a = \dot v = r\dot\omega$, a vidíme, že jest menší než zrychlení $g \sin\alpha$, které by mělo těleso klouzající po absolutně hladké nakloněné rovině. Ač v našem případě tření vlečné rovněž žádné práce nekoná, spotřebuje se část původní polohové energie na energii kinetickou rotačního pohybu válce kolem osy O. Tato část jest tím větší, tedy zrychlení tím menší, čím je větší poloměr setrvačnosti. Ze dvou válců (koulí), jednoho plného na př. mosazného a pozlaceného, druhého dutého z ryzího zlata, stejného geometrického tvaru a stejné váhy, bude se pohybovati plný s větším zrychlením.

Ze vztahu prvého a třetího v (*c*) pak plyne: Ježto statické tření vlečné

$$T \leq \mu N, \quad \text{musí} \quad tg\,\alpha \leq \mu . \frac{\varrho^2 + r^2}{\varrho^2}. \qquad (d)$$

Jenom za těchto sklonů je možné prosté valení. Sklon může býti tím větší, čím je μ větší, čím je rovina „drsnější".

II. $v - r\omega > 0$. Obvodová rychlost je menší než postupná, těleso se částečně smýká a to dolů po nakloněné rovině (představme si v limitě $\omega = 0$), takže T směřuje po šikmé rovině nahoru, jak je nakresleno, a jeho velikost je $T = \mu N = \mu\, mg \cos\alpha$. Rovnice (*a*) resp. (*b*) přejdou v

$$m\dot{v} = mg \sin\alpha - \mu mg \cos\alpha.$$
$$K\dot{\omega} = \mu rmg \cos\alpha. \qquad (e)$$

Ptejme se, je-li tento pohybový stav trvalý. Z (*e*) plyne

$$\frac{d}{dt}(v - r\omega) = \dot{v} - r\dot{\omega} = g \sin\alpha - \mu g \cos\alpha . \frac{\varrho^2 + r^2}{\varrho^2}.$$

Je-li pravá strana kladná, bude stav II trvalý, ježto $v - r\omega > 0$ stále ještě se zvětšuje. Musí tedy

$$tg\,\alpha > \mu . \frac{\varrho^2 + r^2}{r^2}, \qquad (f)$$

což doplňuje podmínku (*d*). Platí-li v (*d*) a (*f*) znamení rovnosti, jsou trvale možny oba stavy I i II, dle toho, jak byly z počátku vytvořeny. Platí-li však v (*d*) nerovnost, t. j. za příliš malých sklonů, nemůže stav II býti trvalý, byť i byl uměle z počátku vytvořen, neboť $v - r\omega$ klesá, až se stane trvale rovno nule, až nastane prosté valení.

III. $v - r\omega < 0$. Otáčení má předbíhati rychlosti postupné, má nastati smýkání, ale takové (představme si v limitě $v = 0$), že tření T směřuje podél nakloněné roviny dolů, právě naopak, než jak je kresleno. Proti případu předchozímu se změní pouze znamení u T, takže

$$\dot{v} = g \sin\alpha + \mu g \cos\alpha, \qquad K\dot{\omega} = -\mu\, mgr \cos\alpha \qquad (g)$$

a
$$\frac{d}{dt}(v - r\omega) = \dot{v} - r\dot{\omega} = g \sin\alpha + \mu g \cos\alpha . \frac{\varrho^2 + r^2}{\varrho^2}.$$

Výraz na pravé straně jest podstatně kladný a tedy se $(v - r\omega)$ časem zvětšuje a i bylo-li z počátku pohybu záporné, stane se jistě nulou nebo kladným, pohyb přejde dle sklonu roviny buď v typ I nebo II.

V dosavadní úvaze starali jsme se pouze o tření vlečné. Za jeho působení bylo by na rovině horizontální ($\alpha = 0$) dle (*c*) $\dot{\omega} = 0$ a tedy ω i $v = r\omega$ stálé, jinými slovy, válec nebo obruč, jednou popohnaná, by se bez ustání valila dále. Zkušenost nás poučuje, že tomu tak není a že ani odpor vzduchu není dostatečně veliký, aby vysvětlil, proč se válec (obruč) konečně zastaví. Proto předpokládáme, že proti pohybu působí silová dvojice, kterou jsme nazvali tření valné. Její